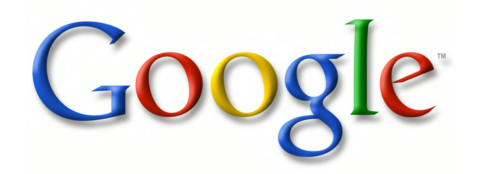
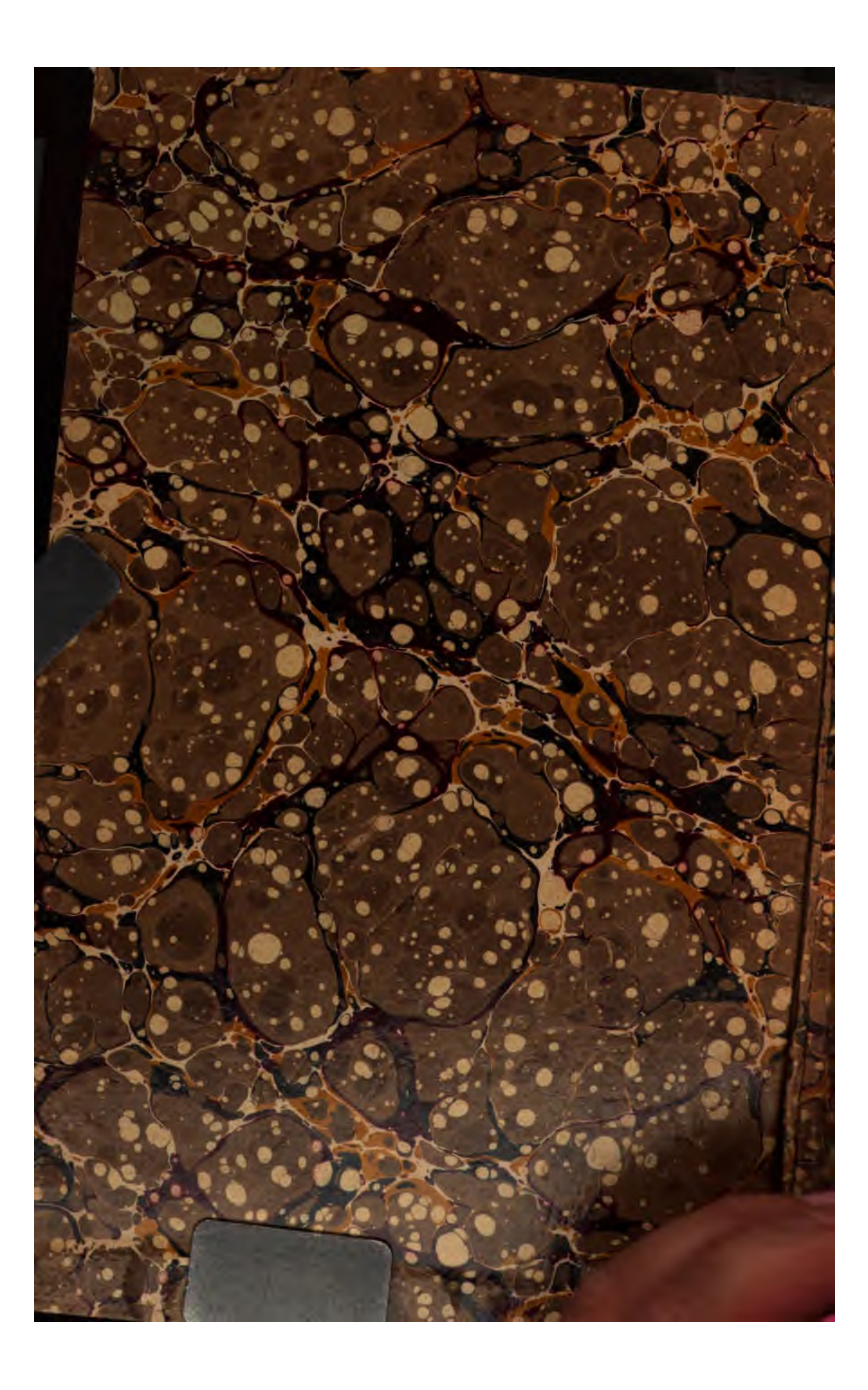
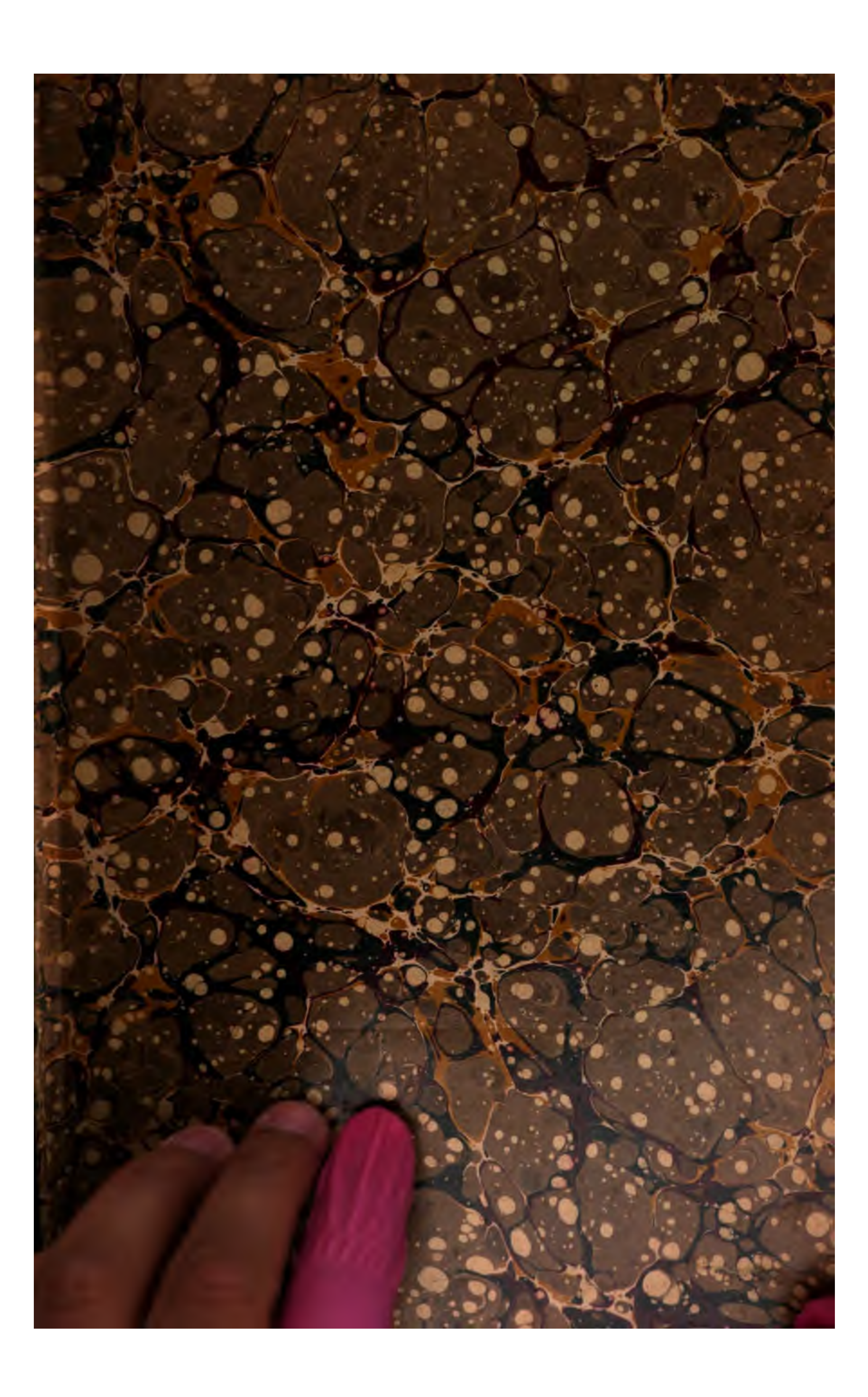








0.5
.48



ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND C. RUNGE IN GÖTTINGEN.

52. BAND. 1. HEFT.

MIT 26 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 4. Juli 1905.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

F. Bernstein, F. Blake, E. Czuber, N. Delaunay, K. Doehlemann, P. Ernst, A. Grünwald, W. Herglotz, G. Holtsmark, A. V. Leon, F. Ludwig, K. Mack, L. Matthiessen, R. Mehmke, A. G. M. Michell, E. Müller, K. Nitz, R. J. W. Reuter, C. Runge, R. Schimmack, L. Schleiermacher, J. Schnöckel, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, A. Timpe, E. Weinnoldt, Th. Weitbrecht, S. Wellisch, C. W. Wirtz, A. Wlassow, F. Wittenbauer, E. Wülfing.



ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG
UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE,
H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND **C. RUNGE** IN GÖTTINGEN

52. BAND.

MIT EINER TAFEL UND 119 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

Inhalt.

Kleinere Mitteilungen.

Bücherschau.

Berichtigung.

Auf S. 285, Z. 9 v. o. muß es heißen α_λ, β_λ, γ_λ statt $\alpha\lambda$, $\beta\lambda$, $\gamma\lambda$, d. h. λ ist ein Index, kein Faktor.

Weitere Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen.

Von J. Horn in Clausthal.

In zwei Aufsätzen „Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad" (Bd. 47 und 49 dieser Zeitschrift) habe ich kleine Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad unter der Einwirkung von Kräften behandelt, welche von den Koordinaten und Geschwindigkeiten abhängen, aber nicht als lineare Funktionen betrachtet werden.[1]) In dem Aufsatze „Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen" (Bd. 48) werden periodische[2]) Schwingungen von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden untersucht. Die meisten der im zweiten Bande der „Dynamik der Systeme starrer Körper" von Routh (deutsch von Schepp, 1898) unter Beschränkung auf die linearen Glieder behandelten Beispiele kleiner Schwingungen erfordern jedoch bei exakter Behandlung eine Ergänzung der in Bd. 48 geführten mathematischen Untersuchungen.[3])

In der vorliegenden Arbeit, welche als Fortsetzung der in Bd. 48 enthaltenen anzusehen ist, werden zunächst die Differentialgleichungen der Bewegung für einige konkrete Beispiele ohne Vernachlässigungen aufgestellt und umgeformt (§§ 1—4), damit die mathematische Aufgabe, deren Lösung erfordert wird, sich zweckmäßig formulieren läßt. Es

1) Die Arbeit von F. Richarz und P. Schulze über asymmetrische Schwingungen (Arch. néerl. (2) 6; Ann. Phys. (4) 8) und die Greifswalder Dissertation von P. Schulze (1901) sind vor meinem ersten Aufsatz, die Arbeit von F. A. Schulze über Schwingungsdauer und Dämpfung asymmetrischer Schwingungen (Ann. Phys. (4) 9) ist nach demselben erschienen. Vgl. Bd. 49, S. 246 u. S. 264. — Symmetrische endliche Schwingungen sind theoretisch behandelt bei F. Braun, über elastische Schwingungen, deren Amplituden nicht unendlich klein sind (Ann. Phys. 151, 1874) und in § 8 der Arbeit von R. Hartmann-Kempf, Einfluß der Amplitude auf die Tonhöhe usw. (Ann. Phys. (4) 13).

2) Die Arbeit des Verf. „Bewegungen in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage" (Journ. f. Math. 126) behandelt die nicht periodischen Schwingungen für eine spezielle Klasse dynamischer Systeme.

3) Vgl. die in Bd. 48 und unten am Anfang von § 3 zitierte Note von Painlevé (Comptes rendus 124).

stellt sich heraus, daß die erhaltenen Differentialgleichungen unter Benutzung bekannter Integrale auf diejenigen zurückgeführt werden können, deren periodische Lösungen in § 3 und § 4 des Aufsatzes in Bd. 48 bestimmt wurden (§§ 5 – 8). Die gewonnenen Hilfsmittel werden auf die vorausgeschickten dynamischen Aufgaben angewandt (§§ 9—12).

§ 1.

Aufgabe I. *Ein schwerer Punkt, welcher an eine Rotationsfläche mit lotrechter Achse gebunden ist, kann unter geeigneten Bedingungen einen Parallelkreis mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen. Wir untersuchen die wenig davon abweichenden Bewegungen.*

Wir nehmen die z-Achse lotrecht aufwärts an und führen in der xy-Ebene Polarkoordinaten ein:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Die Gleichung der Rotationsfläche sei

$$z = f(r).$$

Wenn Differentiationen nach der Zeit t durch einen Strich bezeichnet werden, ist die lebendige Kraft des bewegten Punktes von der Masse 1

$$T = \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \tfrac{1}{2}(1 + f'^2(r))r'^2 + \tfrac{1}{2}r^2\varphi'^2$$

und die Kräftefunktion

$$U = -gz = -gf(r).$$

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r'} - \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r},$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

lauten hier

$$(1 + f'^2(r))r'' + f'(r)f''(r)r'^2 - r\varphi'^2 + gf'(r) = 0,$$
$$r\varphi'' + 2r'\varphi' = 0.$$

Im Falle $f'(r_0) > 0$ besitzen sie die partikuläre Lösung

$$r = r_0, \quad \varphi' = \eta_0 = \sqrt{\frac{gf'(r_0)}{r_0}},$$

welche eine gleichförmige Bewegung auf dem Parallelkreis vom Radius r_0 mit der Geschwindigkeit $r_0\eta_0 = \sqrt{gr_0f'(r_0)}$ darstellt.

Zur Untersuchung der benachbarten Bewegungen setzen wir

$$r = r_0 + R, \quad \varphi' = \eta_0 + \Phi'.$$

Die Bewegungsgleichungen

$$(1 + f'^2(r_0 + R))R'' + f'(r_0 + R)f''(r_0 + R)R'^2$$
$$- (r_0 + R)(\eta_0 + \Phi')^2 + g f'(r_0 + R) = 0,$$
$$(r_0 + R)\Phi'' + 2R'(\eta_0 + \Phi') = 0$$

werden durch ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit den abhängigen Veränderlichen R, R', Φ' ersetzt:

$$\frac{dR}{dt} = R',$$
$$\frac{dR'}{dt} = \alpha R + \beta \Phi' + \cdots,$$
$$\frac{d\Phi'}{dt} = \gamma R' + \cdots;$$

hierbei ist

$$\alpha = \frac{\eta_0^2 - g f''(r_0)}{1 + f'^2(r_0)}, \quad \beta = \frac{2 r_0 \eta_0}{1 + f'^2(r_0)}, \quad \gamma = -\frac{2\eta_0}{r_0},$$

und die weggelassenen Glieder sind von mindestens der zweiten Dimension in R, R', Φ'. Vorausgesetzt ist dabei, daß sich $f(r_0 + R)$ in eine Potenzreihe von R entwickeln läßt.

Die charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} -s, & 1, & 0 \\ \alpha, & -s, & \beta \\ 0, & \gamma, & -s \end{vmatrix} = s^3 - (\alpha + \beta\gamma)s = 0$$

hat unter der Voraussetzung

$$r_0 f''(r_0) + 3 f'(r_0) > 0$$

außer der Wurzel $s = 0$ die beiden konjugiert imaginären Wurzeln $i\lambda$, $-i\lambda$, wo

$$\lambda = \sqrt{g \frac{r_0 f''(r_0) + 3 f'(r_0)}{r_0(1 + f'^2(r_0))}}$$

positiv genommen werden möge. Durch die Substitution

$$R = x_1 + \beta x_3, \quad R' = \lambda x_2, \quad \Phi' = \gamma x_1 - \alpha x_3$$

geht unser Differentialgleichungssystem über in

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda x_2 + F_1(x_1, x_2, x_3),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -\lambda x_1 + F_2(x_1, x_2, x_3),$$
$$\frac{dx_3}{dt} = F_3(x_1, x_2, x_3),$$

wo F_1, F_2, F_3 Potenzreihen von x_1, x_2, x_3 mit Gliedern zweiter und höherer Dimension sind.

Der Flächensatz für die xy-Ebene und der Satz von der lebendigen Kraft liefern zwei Integrale der Differentialgleichungen zweiter Ordnung für r und φ:

$$J_1 = r^2\varphi' = \text{Const.},$$
$$J_2 = (1 + f'^2(r))r'^2 + r^2\varphi'^2 + 2gf(r) = \text{Const.}$$

Unter Einführung der Veränderlichen x_1, x_2, x_3 wird

$$J_1 = x_3 + \Psi(x_1, x_2, x_3) = \text{Const.},$$
$$\frac{J_2 - 2\eta_0 J_1}{(1 + f'^2(r_0))\lambda^2} = \Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x_3^2 + \cdots = \text{Const.},$$

wo Φ und Ψ Potenzreihen von x_1, x_2, x_3 mit Gliedern von mindestens zweiter Dimension sind.

§ 2.

Aufgabe II. *Periodische Bewegungen eines um einen festen Punkt O drehbaren schweren starren Körpers in der Nähe einer Gleichgewichtslage. (Benutzung der Eulerschen Gleichungen.)*[1])

Die Hauptachsen des festen Punktes O bezeichnen wir mit x, y, z, die Hauptträgheitsmomente mit A, B, C, die Koordinaten des Schwerpunktes S in bezug auf die Hauptachsen mit ξ, η, ζ[2]), die Komponenten der jeweiligen Winkelgeschwindigkeit ω des Körpers in bezug auf die Hauptachsen mit p, q, r und die Kosinus der Winkel, welche die Lotrechte (positiv nach oben) mit den Hauptachsen bildet, mit γ, γ', γ''. Die Masse des Körpers sei 1.

Zu den Eulerschen Gleichungen

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr + g(\zeta\gamma' - \eta\gamma''),$$
$$B\frac{dq}{dt} = (C - A)rp + g(\xi\gamma'' - \zeta\gamma),$$
$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)pq + g(\eta\gamma - \xi\gamma')$$

treten die Gleichungen hinzu:

$$\frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'',$$
$$\frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma,$$
$$\frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'.$$

---

1) Routh, Dynamik Bd. II, S. 161. — Lecornu, sur les petits mouvements d'un corps pesant (Bull. de la Soc. math. 1902).

2) Wir denken uns die positiven Richtungen der Achsen x, y, z so gewählt, daß ξ, η, ζ positiv oder Null sind.

Der Gleichgewichtslage entsprechen die Werte

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0; \quad \gamma = \frac{\xi}{l}, \quad \gamma' = \frac{\eta}{l}, \quad \gamma'' = \frac{\zeta}{l},$$

wo

$$l = \pm\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

die Entfernung des Schwerpunktes S vom festen Punkte O, positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem S oberhalb oder unterhalb O liegt, mit anderen Worten, je nachdem das Gleichgewicht labil oder stabil ist.

Zur Untersuchung der Bewegungen in der Nähe der Gleichgewichtslage O setzen wir

$$\gamma = \frac{\xi}{l} + \Gamma, \quad \gamma' = \frac{\eta}{l} + \Gamma', \quad \gamma'' = \frac{\zeta}{l} + \Gamma'',$$

wodurch die Differentialgleichungen übergehen in

$$A\frac{dp}{dt} = g(\zeta\Gamma' - \eta\Gamma'') + (B - C)qr,$$

$$B\frac{dq}{dt} = g(\xi\Gamma'' - \zeta\Gamma) + (C - A)rp,$$

$$C\frac{dr}{dt} = g(\eta\Gamma - \xi\Gamma') + (A - B)pq;$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{l}(\eta r - \zeta q) + r\Gamma' - q\Gamma'',$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{1}{l}(\zeta p - \xi r) + p\Gamma'' - r\Gamma,$$

$$\frac{d\Gamma''}{dt} = \frac{1}{l}(\xi q - \eta p) + q\Gamma - p\Gamma'.$$

Um das Differentialgleichungssystem auf die kanonische Form zu bringen, beginnen wir mit den auf die linearen Glieder reduzierten Differentialgleichungen

$$\frac{dp}{dt} = \frac{g}{A}(\zeta\Gamma' - \eta\Gamma''),$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{g}{B}(\xi\Gamma'' - \zeta\Gamma),$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{g}{C}(\eta\Gamma - \xi\Gamma');$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{l}(\eta r - \zeta q),$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{1}{l}(\zeta p - \xi r),$$

$$\frac{d\Gamma''}{dt} = \frac{1}{l}(\xi q - \eta p).$$

Sie besitzen eine Lösung

$$p = L\sin(\lambda t + \mu), \qquad q = M\sin(\lambda t + \mu), \qquad r = N\sin(\lambda t + \mu),$$
$$\Gamma = L'\cos(\lambda t + \mu), \quad \Gamma' = M'\cos(\lambda t + \mu), \quad \Gamma'' = N'\cos(\lambda t + \mu),$$

worin λ, μ; L, M, N; L', M', N' Konstante sind. Die Einsetzung in die Differentialgleichungen ergibt

$$\begin{aligned} L\lambda &= \frac{g}{A}(\zeta M' - \eta N'), \\ M\lambda &= \frac{g}{B}(\xi N' - \zeta L'), \\ N\lambda &= \frac{g}{C}(\eta L' - \xi M'); \\ L'\lambda &= \frac{1}{l}(\zeta M - \eta N), \\ M'\lambda &= \frac{1}{l}(\xi N - \zeta L), \\ N'\lambda &= \frac{1}{l}(\eta L - \xi M). \end{aligned}$$

Durch Elimination von L', M', N' erhält man

$$\begin{aligned} \left(\frac{Al}{g}\lambda^2 + \eta^2 + \zeta^2\right)L - \xi\eta M - \xi\zeta N &= 0, \\ -\eta\xi L + \left(\frac{Bl}{g}\lambda^2 + \zeta^2 + \xi^2\right)M - \eta\zeta N &= 0, \\ -\zeta\xi L - \zeta\eta M + \left(\frac{Cl}{g}\lambda^2 + \xi^2 + \eta^2\right)N &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt für λ die Gleichung 6. Grades

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{Al}{g}\lambda^2 + \eta^2 + \zeta^2, & -\xi\eta, & -\xi\zeta \\ -\eta\xi, & \frac{Bl}{g}\lambda^2 + \zeta^2 + \xi^2, & -\eta\zeta \\ -\zeta\xi, & -\zeta\eta, & \frac{Cl}{g}\lambda^2 + \xi^2 + \eta^2 \end{vmatrix} = 0,$$

welche in die beiden Gleichungen

$$\lambda^2 = 0$$

und

$$\lambda^4 + \left(\frac{\eta^2 + \zeta^2}{A} + \frac{\zeta^2 + \xi^2}{B} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{C}\right)\frac{g}{l}\lambda^2 + g^2\frac{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2}{ABC} = 0$$

zerfällt. Die quadratische Gleichung für λ^2 hat reelle Wurzeln[1]), denn ihre Diskriminante, welche wir unter der Voraussetzung $A \geqq B \geqq C$ auf die Form

$$[A(B-C)\xi^2 - B(A-C)\eta^2 - C(A-B)\zeta^2]^2 + 2AB(A-C)(B-C)\xi^2\eta^2$$

1) Vgl. Routh Bd. II, S. 162.

bringen, ist nicht negativ. Liegt der Schwerpunkt S unterhalb O, was wir im folgenden annehmen, ist also l negativ, so sind zwei positive Wurzeln λ_1^2, λ_2^2 vorhanden, denn die Summe und das Produkt von λ_1^2 und λ_2^2 sind positiv. Die 6 Wurzeln der charakteristischen Gleichung mit der Unbekannten $s = i\lambda$ sind also

$$0, \quad 0, \quad i\lambda_1, \quad -i\lambda_1, \quad i\lambda_2, \quad -i\lambda_2.$$

Damit $\lambda_1 = \lambda_2$ wird, muß unter der Annahme $A \geqq B \geqq C$

$$\eta = 0, \quad A(B-C)\xi^2 = C(A-B)\zeta^2$$

sein. Es sind dies zwei der drei Bedingungen, welche im Hessschen Falle erfüllt sind. Hierin sind die Fälle von Euler ($\xi = \eta = \zeta = 0$) und Lagrange ($A = B$, $\xi = \eta = 0$ oder $B = C$, $\eta = \zeta = 0$) enthalten, welche sich vermittels elliptischer Funktionen behandeln lassen. Wenn S nicht mit O zusammenfällt, können λ_1 und λ_2 nicht verschwinden. Im folgenden nehmen wir λ_1, λ_2 reell, sowie voneinander und von Null verschieden an.

Sind L_i, M_i, N_i $(i=1,2)$ die Unterdeterminanten einer Zeile der Determinante $\Delta(\lambda_i)$, so kann man, wenn

$$L_i' = \frac{\xi M_i - \eta N_i}{l\lambda_i}, \qquad M_i' = \frac{\xi N_i - \zeta L_i}{l\lambda_i}, \qquad N_i' = \frac{\eta L_i - \xi M_i}{l\lambda_i}, \qquad (i=1,2)$$

gesetzt wird,

$$\lambda = \lambda_i, \quad \mu = \mu_i; \quad L = \varrho_i L_i, \quad M = \varrho_i M_i, \quad N = \varrho_i N_i;$$
$$L' = \varrho_i L_i', \quad M' = \varrho_i M_i', \quad N' = \varrho_i N_i'$$

annehmen, wo ϱ_i und μ_i $(i=1,2)$ willkürliche Konstante sind. Demnach besitzen die linearen Differentialgleichungen die partikulären Lösungen

$$p = L_i\varrho_i \sin(\lambda_i t + \mu_i), \quad q = M_i\varrho_i \sin(\lambda_i t + \mu_i), \quad r = N_i\varrho_i \sin(\lambda_i t + \mu_i),$$
$$\Gamma = L_i'\varrho_i \cos(\lambda_i t + \mu_i), \quad \Gamma' = M_i'\varrho_i \cos(\lambda_i t + \mu_i), \quad \Gamma'' = N_i'\varrho_i \cos(\lambda_i t + \mu_i)$$

für $i = 1, 2$.

Der Doppelwurzel $\lambda = 0$ der charakteristischen Gleichung entspricht die Lösung

$$p = \xi c_3, \quad q = \eta c_3, \quad r = \zeta c_3,$$
$$\Gamma = \xi c_3', \quad \Gamma' = \eta c_3', \quad \Gamma'' = \zeta c_3',$$

wo c_3, c_3' willkürliche Konstante sind.

Demnach ist die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
p &= L_1 \varrho_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1) + L_2 \varrho_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2) + \xi c_3,\\
q &= M_1 \varrho_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1) + M_2 \varrho_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2) + \eta c_3,\\
r &= N_1 \varrho_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1) + N_2 \varrho_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2) + \zeta c_3;\\
\Gamma &= L_1' \varrho_1 \cos(\lambda_1 t + \mu_1) + L_2' \varrho_2 \cos(\lambda_2 t + \mu_2) + \xi c_3',\\
\Gamma' &= M_1' \varrho_1 \cos(\lambda_1 t + \mu_1) + M_2' \varrho_2 \cos(\lambda_2 t + \mu_2) + \eta c_3',\\
\Gamma'' &= N_1' \varrho_1 \cos(\lambda_1 t + \mu_1) + N_2' \varrho_2 \cos(\lambda_2 t + \mu_2) + \zeta c_3',
\end{aligned}
$$

Setzen wir nun[1])

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \varrho_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1) = c_1 \cos \lambda_1 t + c_1' \sin \lambda_1 t,\\
x_2 &= \varrho_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2) = c_2 \cos \lambda_2 t + c_2' \sin \lambda_2 t,\\
x_3 &= c_3;\\
y_1 &= \varrho_1 \cos(\lambda_1 t + \mu_1) = - c_1 \sin \lambda_1 t + c_1' \cos \lambda_1 t,\\
y_2 &= \varrho_2 \cos(\lambda_2 t + \mu_2) = - c_2 \sin \lambda_2 t + c_2' \cos \lambda_2 t,\\
y_3 &= c_3',
\end{aligned}
$$

so ist

$$
\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\lambda_1 x_1,
$$
$$
\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\lambda_2 x_2,
$$
$$
\frac{dx_3}{dt} = 0, \quad \frac{dy_3}{dt} = 0
$$

und

$$
\begin{aligned}
p &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + \xi x_3,\\
q &= M_1 x_1 + M_2 x_2 + \eta x_3,\\
r &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + \zeta x_3;\\
\Gamma &= L_1' y_1 + L_2' y_2 + \xi y_3,\\
\Gamma' &= M_1' y_1 + M_2' y_2 + \eta y_3,\\
\Gamma'' &= N_1' y_1 + N_2' y_2 + \zeta y_3.
\end{aligned}
$$

Die ursprünglichen nicht linearen Differentialgleichungen gehen durch diese lineare Substitution über in

$$
\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 y_1 + F_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\lambda_1 x_1 + G_1,
$$
$$
\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 y_2 + F_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\lambda_2 x_2 + G_2,
$$
$$
\frac{dx_3}{dt} = F_3, \quad \frac{dy_3}{dt} = G_3,
$$

---

1) Dabei ist $c_i = \varrho_i \sin \mu_i, \quad c_i' = \varrho_i \cos \mu_i \qquad (i = 1, 2).$

wo $F_1, \ldots; G_1, \ldots$ ganze homogene Funktionen zweiten Grades von $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$ sind.

Die Relation

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

geht in

$$\xi \Gamma + \eta \Gamma' + \zeta \Gamma'' + \frac{l}{2}(\Gamma^2 + \Gamma'^2 + \Gamma''^2) = 0$$

über; der Flächensatz und der Satz von der lebendigen Kraft

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = \text{Const.},$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2g(\xi\gamma + \eta\gamma' + \zeta\gamma'') = \text{Const.}$$

werden

$$A\xi p + B\eta q + C\zeta r + l(Ap\Gamma + Bq\Gamma' + Cr\Gamma'') = \text{Const.},$$

$$\xi\Gamma + \eta\Gamma' + \zeta\Gamma'' + \frac{1}{g}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \text{Const.}$$

Durch Einführung der neuen Veränderlichen $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$ geht die erste Gleichung in

$$y_3 + \Psi_2(x_1, \ldots; y_1, \ldots) = 0,$$

die zweite in

$$x_3 + \Psi_1(x_1, \ldots; y_1, \ldots) = \text{Const.}$$

über, wo Ψ_1, Ψ_2 ganze homogene Funktionen zweiten Grades der x und y sind. Es ist nämlich

$$\xi\Gamma + \eta\Gamma' + \zeta\Gamma'' = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)y_3$$

und

$$A\xi p + B\eta q + C\zeta r$$
$$= (A\xi L_1 + B\eta M_1 + C\zeta N_1)x_1 + (A\xi L_2 + B\eta M_2 + C\zeta N_2)x_2$$
$$+ (A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2)x_3 = (A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2)x_3$$

wegen

$$A\xi L_i + B\eta M_i + C\zeta N_i = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Durch Subtraktion der ersten und dritten Gleichung erhalten wir die Gleichung

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - gl(\Gamma^2 + \Gamma'^2 + \Gamma''^2) = \text{Const.},$$

welche in

$$\Phi(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = \text{Const.}$$

übergeht, wo Φ eine ganze homogene Funktion zweiter Dimension darstellt. Die Koeffizienten von x_1^2 und x_2^2 in Φ,

$$AL_1^2 + BM_1^2 + CN_1^2, \quad AL_2^2 + BM_2^2 + CN_2^2$$

sind sicher von Null verschieden. Sie könnten nur verschwinden, wenn $L_1 = M_1 = N_1 = 0$ oder $L_2 = M_2 = N_2 = 0$, d. h. wenn

$$\begin{vmatrix} L_1, & L_2, & \xi \\ M_1, & M_2, & \eta \\ N_1, & N_2, & \zeta \end{vmatrix} = 0$$

wäre.

§ 3.

Aufgabe III. *Periodische Bewegungen eines um einen festen Punkt O drehbaren schweren starren Körpers in der Nähe einer Gleichgewichtslage. (Benutzung der Lagrangeschen Gleichungen.)* [1])

Neben dem Hauptachsenkreuz x, y, z des Körpers führen wir ein im Raume festes Achsenkreuz x_1, y_1, z_1 ein, wo die z_1-Achse lotrecht aufwärts gerichtet ist. Die Koordinaten des Schwerpunktes S im festen Achsenkreuz seien ξ_1, η_1, ζ_1. Die gegenseitige Lage der beiden Koordinatensysteme wird durch die Eulerschen Winkel ϑ, φ, ψ dargestellt.[2]) Die doppelte lebendige Kraft

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

geht unter Berücksichtigung der Formeln

$$\begin{aligned} p &= \psi' \sin\vartheta \sin\varphi + \vartheta' \cos\varphi, \\ q &= \psi' \sin\vartheta \cos\varphi - \vartheta' \sin\varphi, \\ r &= \psi' \cos\vartheta + \varphi' \end{aligned}$$

über in

$$\begin{aligned} 2T = {} & (A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)\vartheta'^2 + C\varphi'^2 \\ & + (A\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + B\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + C\cos^2\vartheta)\psi'^2 \\ & + 2(A - B)\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\cdot\psi'\vartheta' + 2C\cos\vartheta\cdot\varphi'\psi'. \end{aligned}$$

Die Kräftefunktion ist

$$U = -g\zeta_1 = -g(\xi\sin\vartheta\sin\varphi + \eta\sin\vartheta\cos\varphi + \zeta\cos\vartheta).$$

1) Zu § 3 und § 11 vgl. den Schluß der Note von Painlevé, sur les petits mouvements périodiques des systèmes (Comptes rendus 124, S. 1222 ff.)

2) Die Richtungskosinus der Achsen x_1, y_1, z_1 in bezug auf die Hauptachsen x, y, z seien $\alpha, \alpha', \alpha''$ bezw. β, β', β'' bezw. $\gamma, \gamma', \gamma''$. Setzt man dann

$$\gamma = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad \gamma' = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \gamma'' = \cos\vartheta,$$
$$\alpha'' = \sin\vartheta\sin\psi, \quad \beta'' = -\sin\vartheta\cos\psi,$$

so sind, wenn γ'' nicht ± 1 ist, ϑ, φ, ψ bis auf Vielfache von 2π mit der Maßgabe bestimmt, daß sie durch $-\vartheta, \varphi + \pi, \psi + \pi$ ersetzt werden dürfen. Da bei Bewegungen in der Nähe der Gleichgewichtslage $\gamma, \gamma', \gamma''$ nahezu gleich $\frac{\xi}{l}, \frac{\eta}{l}, \frac{\zeta}{l}$ sind, so ist bei geeigneter Bezeichnung der Achsen x, y, z γ'' von ± 1 verschieden.

Die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \psi} = 0$$

sind bei beliebigem ψ für $\vartheta = \vartheta_0$, $\varphi = \varphi_0$ erfüllt, wo

$$\sin \varphi_0 = \frac{\xi}{k}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{\eta}{k},$$

$$\sin \vartheta_0 = \frac{k}{l}, \quad \cos \vartheta_0 = \frac{\zeta}{l}$$

ist. Dabei ist $k = \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$[1]) und $l = -\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, wenn, wie wir im folgenden annehmen, S unterhalb O liegt, das Gleichgewicht also stabil ist. Zu den angegebenen Werten φ_0, ϑ_0 gehört

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = 0, \quad \zeta_1 = l.$$

Der Winkel ψ ist unbestimmt, d. h. der Körper gelangt durch Drehung um die Lotrechte OS in eine neue Gleichgewichtslage.

Wir führen Koordinaten

$$\Theta = \vartheta - \vartheta_0, \quad \Phi = \varphi - \varphi_0$$

ein, welche in der Gleichgewichtslage verschwinden. Dann ist

$$2T = \left(\frac{A\eta^2 + B\xi^2}{k^2} + \cdots\right)\Theta'^2 + C\Phi'^2 + \left(\frac{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2}{l^2} + \cdots\right)\psi'^2$$
$$+ 2\left(\frac{(A-B)\xi\eta}{kl} + \cdots\right)\psi'\Theta' + 2\left(\frac{C\zeta}{l} + \cdots\right)\psi'\Phi',$$

wo an Stelle von ... Potenzreihen von Θ, Φ ohne konstante Glieder stehen. Ferner ist (unter Weglassung eines unwesentlichen konstanten Gliedes)

$$U = \frac{g}{2}\left(l\Theta^2 + \frac{k^2}{l}\Phi^2 + \cdots\right),$$

wo die weggelassenen Glieder von mindestens dritter Dimension in Θ, Φ sind.

Wir setzen vorübergehend

$$a_{11} = \frac{A\eta^2 + B\xi^2}{k^2}, \quad a_{22} = C, \quad a_{33} = \frac{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2}{l^2},$$

$$a_{13} = \frac{(A-B)\xi\eta}{kl}, \quad a_{23} = \frac{C\zeta}{l}$$

1) Nachdem das Vorzeichen von k beliebig festgelegt ist, sind φ_0, ϑ_0 (bis auf Vielfache von 2π) bestimmt. Einer Zeichenänderung von k entspricht die Ersetzung von φ_0, ϑ_0 durch $\varphi_0 + \pi$, $-\vartheta_0$. Wir bezeichnen die Achsen so, daß S nicht in die z-Achse fällt; dann ist k von Null verschieden.

und führen die quadratischen Formen

$$F = a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 + 2a_{13}u_1u_3 + 2a_{23}u_2u_3,$$
$$G = glu_1^2 + \frac{gk^2}{l}u_2^2$$

durch eine lineare Substitution

$$u_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2,$$
$$u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2,$$
$$u_3 = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3$$

in

$$F = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2,$$
$$G = -\lambda_1^2 v_1^2 - \lambda_2^2 v_2^2$$

über. Zunächst ist, wenn

$$v_3 = \frac{a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3}{\sqrt{a_{33}}}$$

gesetzt wird,

$$F = v_3^2 + \frac{(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)u_1^2 + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)u_2^2 - 2a_{13}a_{23}u_1u_2}{a_{33}}.$$

Damit

$$\frac{(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)u_1^2 + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)u_2^2 - 2a_{13}a_{23}u_1u_2}{a_{33}} = v_1^2 + v_2^2,$$

$$glu_1^2 + \frac{gk^2}{l}u_2^2 = -\lambda_1^2 v_1^2 - \lambda_2^2 v_2^2$$

wird, müssen $\lambda^2 = \lambda_1^2$ und $\lambda^2 = \lambda_2^2$ der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_{33}} + gl, & -\lambda^2 \frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}} \\ -\lambda^2 \frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}}, & \lambda^2 \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{a_{33}} + \frac{gk^2}{l} \end{vmatrix} = 0$$

genügen, welche auf dieselbe Form wie in § 2 gebracht werden kann:

$$\lambda^4 + \left(\frac{\eta^2 + \zeta^2}{A} + \frac{\zeta^2 + \xi^2}{B} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{C}\right)\frac{g}{l}\lambda^2 + g^2\frac{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2}{ABC} = 0,$$

und welche im Fall $l < 0$ zwei positive Wurzeln λ_1^2, λ_2^2 besitzt, die wir wie in § 2 als verschieden voraussetzen. Die Substitutionskoeffizienten α_i, β_i $(i=1,2)$ ergeben sich nun aus

$$\left(\lambda_i^2 \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_{33}} + gl\right)\alpha_i - \lambda_i^2 \frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}} \cdot \beta_i = 0,$$

$$-\lambda_i^2 \frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}} \cdot \alpha_i + \left(\lambda_i^2 \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{a_{33}} + \frac{gk^2}{l}\right)\beta_i = 0;$$

hiernach können wir z. B. setzen:

$$\alpha_i = \lambda_i^2 \cdot Ck(A\xi^2 + B\eta^2) + \frac{gk^2}{l}(A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2),$$
$$\beta_i = (A - B)C\xi\eta\zeta.$$

Aus

$$u_3 = \frac{v_3}{\sqrt{a_{33}}} - \frac{a_{13}u_1 + a_{23}u_2}{a_{33}}$$

folgt, wenn man u_1, u_2 durch v_1, v_2 ersetzt,

$$\gamma_1 = -\frac{a_{13}\alpha_1 + a_{23}\beta_1}{a_{33}}, \quad \gamma_2 = -\frac{a_{13}\alpha_2 + a_{23}\beta_2}{a_{33}}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}}.$$

Führt man nun an Stelle von Θ, Φ, Ψ vermöge der Gleichungen

$$\Theta = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$
$$\Phi = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2,$$
$$\Psi = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3$$

neue Veränderliche x_1, x_2, x_3 ein, so wird

$$T = \tfrac{1}{2}(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) + \cdots,$$
$$U = -\tfrac{1}{2}g(\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2) + \cdots,$$

wo nur die Glieder niedrigster Dimension angeschrieben sind; U und die Koeffizienten von x_α', x_β' $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ in T sind Potenzreihen von x_1, x_2, hängen aber nicht von x_3 ab.

Wir kennen die beiden Integralgleichungen

$$T - U = \text{Const.},$$
$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = \text{Const.}$$

Die erste schreibt sich

$$\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + \cdots = \text{Const.}$$

oder

$$\Phi(x_1', x_2', x_3'; x_1, x_2) = \text{Const.},$$

wo Φ eine Potenzreihe der beigefügten Argumente ist, welche mit den angeschriebenen quadratischen Gliedern beginnt. Die zweite wird nach Einsetzung der bekannten Ausdrücke für p, q, r; γ, γ', γ''

$$(A - B)\sin\vartheta \sin\varphi \cos\varphi \cdot \vartheta' + C\cos\vartheta \cdot \varphi'$$
$$+ (A\sin^2\vartheta \sin^2\varphi + B\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + C\cos^2\vartheta)\cdot\psi' = \text{Const.}$$

oder

$$x_3' + \Psi(x_1', x_2', x_3'; x_1, x_2) = \text{Const.},$$

wo Ψ eine lineare homogene Funktion von x_1', x_2', x_3' ist, deren Koeffizienten Potenzreihen von x_1, x_2 ohne konstante Glieder sind.

Die Lagrangeschen Differentialgleichungen schreiben sich jetzt[1]):

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1', \quad \frac{dx_1'}{dt} = -\lambda_1^2 x_1 + \mathfrak{F}_1(x_1, x_2, x_1', x_2', x_3'),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2', \quad \frac{dx_2'}{dt} = -\lambda_2^2 x_2 + \mathfrak{F}_2(x_1, x_2, x_1', x_2', x_3'),$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_3', \quad \frac{dx_3'}{dt} = \mathfrak{F}_3(x_1, x_2, x_1', x_2', x_3');$$

$\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ sind Potenzreihen von x_1, x_2, x_1', x_2', x_3' ohne Glieder von geringerer als der zweiten Dimension.

Wir scheiden die Differentialgleichung

$$\frac{dx_3}{dt} = x_3'$$

aus und betrachten die fünf übrigen Differentialgleichungen mit den abhängigen Veränderlichen x_1, x_2, x_1', x_2', x_3'.

§ 4.

Aufgabe IV. *Der Schwerpunkt eines schweren starren Körpers mit dem festen Punkt O liege auf einer Hauptachse von O. Der Körper kann sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit n um diese vertikal gerichtete Hauptachse drehen. Wir untersuchen die benachbarten periodischen Bewegungen.*[2])

Die am Anfang von § 2 eingeführten Bezeichnungen werden beibehalten; nur die Koordinaten des Schwerpunktes S in bezug auf die Hauptachsen von O sollen jetzt $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta \gtrless 0$ sein.

Die Eulerschen Gleichungen

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr + g\zeta\gamma',$$
$$B\frac{dq}{dt} = (C - A)rp - g\zeta\gamma,$$
$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)pq$$

in Verbindung mit den Gleichungen

$$\frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'',$$
$$\frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma,$$
$$\frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'$$

1) Vgl. Bd. 48, S. 404. 2) Routh Bd. II, S. 159.

haben die Lösung

$$p=0,\quad q=0,\quad r=n;\quad \gamma=0,\quad \gamma'=0,\quad \gamma''=1,$$

wo n eine beliebige Konstante ist.

Zur Untersuchung der benachbarten Bewegungen setzen wir

$$p=P,\quad q=Q,\quad r=n+R;\quad \gamma=\Gamma,\quad \gamma'=\Gamma',\quad \gamma''=1+\Gamma'',$$

wodurch die Differentialgleichungen übergehen in

$$A\frac{dP}{dt}=(B-C)nQ+g\zeta\Gamma'+(B-C)QR,$$

$$B\frac{dQ}{dt}=(C-A)nP-g\zeta\Gamma+(C-A)RP,$$

$$C\frac{dR}{dt}=(A-B)PQ;$$

$$\frac{d\Gamma}{dt}=n\Gamma'-Q+R\Gamma'-Q\Gamma'',$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt}=P-n\Gamma+P\Gamma''-R\Gamma,$$

$$\frac{d\Gamma''}{dt}=Q\Gamma-P\Gamma'.$$

Die Integralgleichungen

$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1,$$

$$Ap\gamma+Bq\gamma'+Cr\gamma''=\text{Const.},$$

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2+2g\zeta\gamma''=\text{Const.}$$

schreiben sich

$$2\Gamma''+\Gamma^2+\Gamma'^2+\Gamma''^2=0,$$

$$CR+Cn\Gamma''+AP\Gamma+BQ\Gamma'+CR\Gamma''=\text{Const.},$$

$$2g\zeta\Gamma''+2CnR+AP^2+BQ^2+CR^2=\text{Const.}$$

Um unser Differentialgleichungssystem auf die kanonische Form zu bringen, zerlegen wir die auf die linearen Glieder reduzierten Differentialgleichungen in die beiden Systeme

$$A\frac{dP}{dt}=(B-C)nQ+g\zeta\Gamma',$$

$$B\frac{dQ}{dt}=(C-A)nP-g\zeta\Gamma;$$

$$\frac{d\Gamma}{dt}=n\Gamma'-Q,$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt}=P-n\Gamma$$

und

$$\frac{dR}{dt}=0,$$

$$\frac{d\Gamma''}{dt}=0.$$

Das zweite System hat die Lösung

$$R = c_3, \quad \Gamma'' = c_3',$$

wo c_3, c_3' willkürliche Konstante sind. Das erste System besitzt eine Lösung

$$P = L\sin(\lambda t + \mu), \quad Q = M\cos(\lambda t + \mu),$$
$$\Gamma = L'\sin(\lambda t + \mu), \quad \Gamma' = M'\cos(\lambda t + \mu).$$

Durch Einsetzen erhält man

$$A\lambda L = (B - C)nM + g\zeta M',$$
$$B\lambda M = (A - C)nL + g\zeta L';$$
$$\lambda L' = nM' - M,$$
$$\lambda M' = nL' - L;$$

die Elimination von L, M ergibt

$$-(A + B - C)n\lambda \cdot L' + (A\lambda^2 + (B - C)n^2 + g\zeta) \cdot M' = 0,$$
$$(B\lambda^2 + (A - C)n^2 + g\zeta) \cdot L' - (A + B - C)n\lambda \cdot M' = 0.$$

Hieraus folgt für λ^2 die quadratische Gleichung

$$(A + B - C)^2 n^2 \lambda^2 = (A\lambda^2 + (B - C)n^2 + g\zeta)(B\lambda^2 + (A - C)n^2 + g\zeta)$$

oder

$$AB\lambda^4 + (n^2(AC + BC - C^2 - 2AB) + (A + B)g\zeta)\lambda^2$$
$$+ ((A - C)n^2 + g\zeta)((B - C)n^2 + g\zeta) = 0.$$

Damit deren Wurzeln λ_1^2, λ_2^2 positiv und verschieden sind, muß die Diskriminante positiv, das konstante Glied positiv und der Koeffizient von λ^2 negativ sein:

$$[n^2(AC + BC - C^2 - 2AB) + (A + B)g\zeta]^2$$
$$> 4AB[(A - C)n^2 + g\zeta][(B - C)n^2 + g\zeta] > 0,$$
$$n^2(AC + BC - C^2 - 2AB) + (A + B)g\zeta < 0.$$

Im Falle $A = B$ sind

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \frac{\pm(2A - C)n \pm \sqrt{C^2 n^2 - 4Ag\zeta}}{2A}$$

reell, voneinander und von Null verschieden, wenn

$$n^2 > \frac{4Ag\zeta}{C^2}$$

ist.[1])

1) Vgl. Routh Bd. II, S. 160.

Nun ist

$$\frac{M'}{L'} = \sigma = \frac{\lambda n(A+B-C)}{A\lambda^2 + (B-C)n^2 + g\zeta} = \frac{B\lambda^2 + (A-C)n^2 + g\zeta}{\lambda n(A+B-C)}$$

und

$$L = nL' - \lambda M' = (n - \lambda\sigma)L',$$
$$M = nM' - \lambda L' = (n\sigma - \lambda)L'.$$

Bezeichnet man mit σ_1 und σ_2 die Werte, welche σ für $\lambda = \lambda_1$ und für $\lambda = \lambda_2$ annimmt, so hat das erste lineare System die allgemeine Lösung

$$P = (n - \lambda_1\sigma_1)\varrho_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1) + (n - \lambda_2\sigma_2)\varrho_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2),$$
$$Q = (n\sigma_1 - \lambda_1)\varrho_1 \cos(\lambda_1 t + \mu_1) + (n\sigma_2 - \lambda_2)\varrho_2 \cos(\lambda_2 t + \mu_2);$$
$$\Gamma = \varrho_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1) + \varrho_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2),$$
$$\Gamma' = \mu_1\varrho_1 \cos(\lambda_1 t + \mu_1) + \mu_2\varrho_2 \cos(\lambda_2 t + \mu_2)$$

mit den willkürlichen Konstanten $\varrho_1, \varrho_2; \mu_1, \mu_2$.

Setzt man

$$x_1 = \varrho_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1), \quad y_1 = \varrho_1 \cos(\lambda_1 t + \mu_1),$$
$$x_2 = \varrho_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2), \quad y_2 = \varrho_2 \cos(\lambda_2 t + \mu_2),$$
$$x_3 = c_3 \quad , \quad y_3 = c_3' \quad ,$$

so ist

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\lambda_1 x_1,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\lambda_2 x_2,$$
$$\frac{dx_3}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{dy_3}{dt} = 0$$

und

$$P = (n - \lambda_1\sigma_1)x_1 + (n - \lambda_2\sigma_2)x_2,$$
$$Q = (n\sigma_1 - \lambda_1)y_1 + (n\sigma_2 - \lambda_2)y_2,$$
$$R = x_3;$$
$$\Gamma = x_1 + x_2,$$
$$\Gamma' = \sigma_1 y_1 + \sigma_2 y_2,$$
$$\Gamma'' = y_3.$$

Die ursprünglichen nicht linearen Differentialgleichungen gehen durch diese lineare Substitution in

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 y_1 + F_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\lambda_1 x_1 + G_1,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 y_2 + F_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\lambda_2 x_2 + G_2,$$
$$\frac{dx_3}{dt} = F_3, \quad \frac{dy_3}{dt} = G_3$$

über, wo $F_1, \ldots; G_1, \ldots$ ganze homogene Funktionen zweiten Grades von $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$ sind.

Die erste der drei oben angeschriebenen Integralgleichungen wird

$$y_3 + \Psi_2(x_1, \ldots; y_1 \ldots) = 0.$$

Durch Addition der mit $-\frac{1}{2n}$ multiplizierten ersten und der mit $\frac{1}{C}$ multiplizierten zweiten Gleichung erhält man

$$x_3 + \Psi_1(x_1, \ldots; y_1, \ldots) = \text{Const.}$$

Die Addition der bezw. mit

$$Cn^2 - g\zeta, \ 2n, \ 1$$

multiplizierten drei Gleichungen ergibt

$$(Cn^2 - g\zeta)(\Gamma^2 + \Gamma'^2 + \Gamma''^2) - 2n(AP\Gamma + BQ\Gamma' + CR\Gamma'') \\ + (AP^2 + BQ^2 + CR^2) = \Phi(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = \text{Const.}$$

Hierbei sind Φ, Ψ_1, Ψ_2 ganze homogene Funktionen zweiten Grades von $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$.

Der Koeffizient von x_1^2 in Φ,

$$Cn^2 - g\zeta + A(\lambda_1^2\sigma_1^2 - n^2),$$

kann unter den oben gemachten Voraussetzungen ($\lambda_1 \gtrless \lambda_2$) nicht verschwinden. Die Bedingung für das Verschwinden dieses Koeffizienten stimmt nämlich, wenn man die Gleichung für λ_1 und die Formel für σ_1 berücksichtigt, mit der Bedingung dafür überein, daß die quadratische Gleichung für λ^2 zwei gleiche Wurzeln besitzt.

§ 5.

Wir geben einige Ergänzungen zu §§ 2—4 des Aufsatzes „Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen“ im 48. Bd. dieser Zeitschrift.

Es handelt sich um ein Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = X_\alpha(x_1, \ldots x_n), \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

wo

$$X_\alpha = a_{\alpha 1}x_1 + \cdots + a_{\alpha n}x_n + \cdots$$

eine Potenzreihe von $x_1, \ldots x_n$ darstellt, welche für $x_1 = \cdots = x_n = 0$ verschwindet. Die charakteristische Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - s, & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & \ldots & a_{nn} - s \end{vmatrix}$$

soll für $s = 0$ nicht verschwinden. Es sei ein Integral

$$\Phi(x_1, \ldots x_n) = \text{Const.}$$

vorhanden, wo Φ eine Potenzreihe von $x_1, \ldots x_n$ darstellt.

Dann fehlen in $\Phi(x_1, \ldots x_n)$ die linearen Glieder.

Um dies zu zeigen, bringen wir unser Differentialgleichungssystem durch lineare Transformation der abhängigen Veränderlichen auf die kanonische Form, in welcher einem p-fachen Elementarteiler $(s - a)^p$[1] der charakteristischen Determinante die p Differentialgleichungen

$$\frac{dx'}{dt} = ax' + \cdots,$$
$$\frac{dx''}{dt} = ax'' + x' + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dx^{(p)}}{dt} = ax^{(p)} + x^{(p-1)} + \cdots$$

entsprechen. Es sei

$$\Phi = A'x' + A''x'' + \cdots + A^{(p)}x^{(p)} + \cdots.$$

In der Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} = 0,$$

welche aussagt, daß $\Phi = \text{Const.}$ ein Integral ist, müssen sich die linearen Glieder fortheben, es muß also

$$A'ax' + A''(ax'' + x') + \cdots + A^{(p)}(ax^{(p)} + x^{(p-1)}) + \cdots = 0$$

sein. Daraus folgt

$$A' = 0, \quad A'' = 0, \quad \ldots A^{(p)} = 0,$$

w. z. b. w.

Da sich in der obigen Gleichung auch die quadratischen Glieder fortheben müssen, so hat man, wenn man

$$\Phi = A_{11}x_1^2 + 2A_{12}x_1x_2 + A_{22}x_2^2 + \cdots$$

setzt und annimmt, daß die beiden ersten Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 + \cdots,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = a_2x_2 + \cdots$$

---

1) Hierbei ist a reell oder komplex, $p \geqq 1$.

des kanonischen Systems einfachen Wurzeln $s = a_1$ und $s = a_2$ der charakteristischen Gleichung entsprechen:

$$0 = a_1 x_1 (A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + \cdots) + a_2 x_2 (A_{12} x_1 + A_{22} x_2 + \cdots) + \cdots$$
$$= A_{11} a_1 x_1^2 + A_{12}(a_1 + a_2) x_1 x_2 + A_{22} a_2 x_2^2 + \cdots.$$

Da a_1 und a_2 von Null verschieden sein sollen, so muß $A_{11} = 0$, $A_{22} = 0$ sein; A_{12} kann nur dann von Null verschieden sein, wenn $a_1 + a_2 = 0$ ist.

Sind $a_1 = \varkappa + \lambda i$, $a_2 = \varkappa - \lambda i$ konjugiert komplex, und setzt man

$$x_1 = \frac{\xi_1 - i\xi_2}{2}, \quad x_2 = \frac{\xi_1 + i\xi_2}{2},$$

so wird

$$\Phi = \tfrac{1}{2} A_{12}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \cdots,$$

und man hat die beiden ersten Differentialgleichungen

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \varkappa \xi_1 + \lambda \xi_2 + \cdots,$$
$$\frac{d\xi_2}{dt} = -\lambda \xi_1 + \varkappa \xi_2 + \cdots.$$

Soll Φ wirklich ein Glied mit ξ_1^2 enthalten, so muß der reelle Teil $\varkappa$ der beiden konjugierten Wurzeln a_1, a_2 verschwinden.

Wir ändern den Satz in § 4 der Arbeit Bd. 48 (S. 418) über die periodischen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \cdots,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \cdots,$$
$$\frac{dx_\alpha}{dt} = a_{\alpha 3} x_3 + \cdots + a_{\alpha n} x_n + \cdots, \qquad (\alpha = 3, \ldots n)$$

welches die früheren Bedingungen erfüllt, etwas ab.

Eine Lösung $x_{\alpha (\alpha = 1, \cdots n)}$ mit den Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad x_1 = c_1, \quad \ldots x_n = c_n$$

besitze die Periode $T = 2\pi + \delta$. Nach Bd. 48, S. 410 liefern die Bedingungen

$$x_3(2\pi + \delta) - c_3 = 0, \quad \ldots x_n(2\pi + \delta) - c_n = 0$$

$c_3, \ldots c_n$ als Potenzreihen von c_1, c_2, welche mit quadratischen Gliedern beginnen und Potenzreihen von δ zu Koeffizienten haben. Die Funktion x_2 verschwinde zum erstenmal für $t = t_0$, zum zweitenmal für $t = \bar{t}_0$; es sei $x_1 = c$ für $t = t_0$ und $x_1 = \bar{c}$ für $t = \bar{t}_0$. Die in der früheren

Arbeit aufgestellten Formeln sind hier anwendbar, wenn man das dortige t durch $t - t_0$ ersetzt.

Es ist

$$\delta = \varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_3 c^3 + \cdots = \varepsilon_2 \bar{c}^2 + \varepsilon_3 \bar{c}^3 + \cdots$$
$$= \varepsilon_2 \frac{c^2 + \bar{c}^2}{2} + \varepsilon_3 \frac{c^3 + \bar{c}^3}{2} + \cdots.$$

Für $t = t_0$ hat man $x_3 = \mathfrak{q}_3(c), \ldots x_n = \mathfrak{q}_n(c)$ als Potenzreihen von c mit Gliedern mindestens zweiten Grades. Auf Grund der Integralgleichung $\Phi(x_1, \ldots x_n) = \text{Const.}$ setzen wir die Werte von Φ für $t = 0$ und $t = t_0$ einander gleich, wobei wir $\Phi = x_1^2 + x_2^2 + \cdots$ annehmen. Wir erhalten

$$\Phi(c_1, \ldots c_n) = \Phi(c, 0, \mathfrak{q}_3(c), \ldots \mathfrak{q}_n(c)) = c^2 + \mathfrak{a}_1 c^3 + \mathfrak{a}_2 c^4 + \cdots;$$

hieraus folgt

$$c = \sqrt{\Phi(c_1, \ldots c_n)} + \mathfrak{b}_1 \Phi(c_1, \ldots c_n) + \mathfrak{b}_2 \sqrt{\Phi(c_1, \ldots c_n)}^3 + \cdots$$
$$= \mathfrak{b}_1 \Phi(c_1, \ldots c_n) + \cdots + \sqrt{\Phi(c_1, \ldots c_n)}(1 + \mathfrak{b}_2 \Phi(c_1, \ldots c_n) + \cdots).$$

Durch eine Vorzeichenänderung der Quadratwurzel geht c in $\bar{c}$ über. Man hat also

$$\left.\begin{matrix} c \\ \bar{c} \end{matrix}\right\} = A(c_1, \ldots c_n) \pm \sqrt{R(c_1, \ldots c_n)},$$

wo A und R Potenzreihen von $c_1, \ldots c_n$ sind, welche mit quadratischen Gliedern beginnen. Es sind also

$$\frac{c^2 + \bar{c}^2}{2} = A^2 + R,$$
$$\frac{c^3 + \bar{c}^3}{2} = A^3 + 3AR$$

usw. Potenzreihen von $c_1, \ldots c_n$. Demnach ist auch δ eine Potenzreihe von $c_1, \ldots c_n$, in welcher die Glieder von geringerer als der zweiten Dimension fehlen. Setzt man hierin für $c_3, \ldots c_n$ die oben gefundenen Potenzreihen von c_1, c_2, δ, so wird δ eine Potenzreihe von c_1, c_2 mit Gliedern mindestens zweiter Dimension, deren Koeffizienten Potenzreihen von δ sind. Hieraus berechnet man $\delta = T - 2\pi$ *als Potenzreihe von* c_1, c_2, *welche mit quadratischen Gliedern beginnt.* Unter Benutzung des gefundenen δ erscheinen $c_3 = \mathfrak{p}_3(c_1, c_2), \ldots c_n = \mathfrak{p}_n(c_1, c_2)$ als Potenzreihen von c_1, c_2 ohne Glieder geringeren als zweiten Grades.

Es ist noch zu zeigen, daß wir wirklich eine periodische Lösung erhalten, wenn wir c_1, c_2 hinreichend klein, aber sonst beliebig annehmen. Nach Bd. 48, S. 415 ist

$$x_\alpha = c\psi_{\alpha 1}(u) + c^2 \psi_{\alpha 2}(u) + \cdots, \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

wo

$$\psi_{11} = \cos u, \quad \psi_{21} = -\sin u, \quad \psi_{31} = 0, \ldots \psi_{n1} = 0$$

und

$$u = \frac{2\pi(t - t_0)}{T} = \frac{2\pi t}{T} - \vartheta$$

ist, eine periodische Lösung, welche die Bedingungen

$$t = t_0, \quad x_1 = c, \quad x_2 = 0$$

erfüllt. Sollen

$$t = 0, \quad x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2$$

zusammengehörige Werte sein, so ist

$$c_1 = c\cos\vartheta + c^2\psi_{12}(-\vartheta) + \cdots,$$
$$c_2 = c\sin\vartheta + c^2\psi_{22}(-\vartheta) + \cdots.$$

Jedem Paar hinreichend kleiner (nicht gleichzeitig verschwindender) Werte c_1, c_2 entspricht ein positiver Wert von c und ein Wert von ϑ zwischen 0 und 2π oder, was dasselbe ist, ein Wert t_0 zwischen 0 und T. Also ist eine (und nach dem Obigen nur eine) periodische Lösung vorhanden, welche die Bedingungen $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$ für $t = 0$ erfüllt. Wir berechnen sie direkt aus dem Differentialgleichungssystem.

Unter Einführung der unabhängigen Veränderlichen

$$w = \frac{2\pi t}{T}$$

gehen unsere Differentialgleichungen

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = X_\alpha(x_1, \ldots x_n) \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

über in

$$\frac{2\pi}{T}\frac{dx}{dw} = X_\alpha(x_1, \ldots x_n). \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

Die durch die Anfangsbedingungen

$$w = 0, \; x_1 = c_1, \; x_2 = c_2, \; x_3 = \mathfrak{p}_3(c_1, c_2), \ldots x_n = \mathfrak{p}_n(c_1, c_2)$$

bestimmten periodischen Funktionen $x_1, \ldots x_n$ mit der Periode 2π lassen sich in Potenzreihen von c_1, c_2 entwickeln, deren Koeffizienten periodische Funktionen von w mit der Periode 2π sind. *Man hat*

$$x_\alpha = x_\alpha^{(1)} + x_\alpha^{(2)} + \cdots + x_\alpha^{(\nu)} + \cdots \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

wo

$$x_1^{(1)} = c_1\cos w + c_2\sin w,$$
$$x_2^{(1)} = -c_1\sin w + c_2\cos w,$$
$$x_3^{(1)} = 0, \ldots x_n^{(1)} = 0$$

und $x_\alpha^{(\nu)}$ *eine ganze homogene Funktion* ν*ter Dimension von* c_1, c_2 *und eine lineare Funktion von* $\cos \mu w$, $\sin \mu w$ $(\mu = 0, 1, \dots \nu)$ *ist.*

Zur direkten Berechung der $x_\alpha^{(\nu)}$ und der Periode T aus den Differentialgleichungen verfährt man ähnlich wie in Bd. 48, S. 415—418.

Haben die beiden ersten Differentialgleichungen des Systems die Form

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda x_2 + \cdots,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -\lambda x_1 + \cdots,$$

wo λ reell positiv ist, so gelangt man zu dem bisher betrachteten Falle zurück, wenn man λt als unabhängige Veränderliche einführt. Die direkte Behandlung ohne Transformation von t ist eben so einfach. Jetzt ist $T - \frac{2\pi}{\lambda}$ eine mit quadratischen Gliedern beginnende Potenzreihe von c_1, c_2.

§ 6.

Die Differentialgleichungen, auf welche wir durch die in §§ 1—4 gestellten dynamischen Aufgaben geführt wurden, sind in folgender Form enthalten:

$$(A)\qquad \begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \lambda x_2 + F_1(x_1, \dots x_n),\\
\frac{dx_2}{dt} &= -\lambda x_1 + F_2(x_1, \dots x_n),\\
\frac{dx_3}{dt} &= a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_m + F_3(x_1, \dots x_n),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{dx_m}{dt} &= a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mm}x_m + F_m(x_1, \cdots x_m),\\
\frac{dx_{m+1}}{dt} &= \qquad F_{m+1}(x_1, \dots x_n),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{dx_n}{dt} &= \qquad F_n(x_1, \dots x_n).
\end{aligned}$$

Die Gleichung $(m-2)$ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_{33} - s, & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m3} & , \dots & a_{mm} - s \end{vmatrix} = 0$$

soll keine Wurzel $\pm ik\lambda$ (k ganze Zahl), keine mehrfache und keine verschwindende Wurzel besitzen. Die charakteristische Gleichung $n$ten

Grades unseres Differentialgleichungssystems hat dann neben den beiden Wurzeln $\pm i\lambda$ keine Wurzel $\pm ik\lambda$ (k ganze Zahl) und nur die $\mu = n - m$ Wurzeln $s = 0$, welchen μ einfache Elementarteiler der charakteristischen Determinante entsprechen; alle Wurzeln außer diesen verschwindenden sind einfach. $F_1, \ldots F_n$ sind Potenzreihen von $x_1, \ldots x_n$ ohne Glieder von geringerer als der zweiten Dimension.[1] Es seien die $\mu + 1 = n - m + 1$ Integrale

$$\text{(B)}\qquad \begin{aligned} &\Phi(x_1, \ldots x_n) = C, \\ &x_{m+1} + \Psi_1(x_1, \ldots x_n) = D_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_n + \Psi_\mu(x_1, \ldots x_n) = D_\mu \end{aligned}$$

vorhanden, wo $C, D_1, \ldots D_\mu$ willkürliche Konstante sind und $\Phi, \Psi_1 \ldots \Psi_\mu$ Potenzreihen von $x_1, \ldots x_n$, welche kein Glied von geringerer als der zweiten Dimension enthalten; in Φ soll das Glied mit x_1^2 nicht fehlen.

Wir führen das Differentialgleichungssystem (A) *mit den Integralen* (B) *auf das in Bd. 48, S. 405 ff. behandelte zurück.*

Aus den μ letzten Integralgleichungen berechnet man

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= D_1 + \mathfrak{p}_1(x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= D_\mu + \mathfrak{p}_\mu(x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu), \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_\mu$ Potenzreihen der beigefügten Argumente mit Gliedern zweiter und höherer Dimension sind. Unsere m ersten Differentialgleichungen werden

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \lambda x_2 + G_1(x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\lambda x_1 + G_2(x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu), \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_m + G_3(x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_m}{dt} &= a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mm}x_m + G_m(x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu), \end{aligned}$$

und die Integralgleichung $\Phi = C$ geht über in

$$\Psi(x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu) = C.$$

Dabei sind $G_1, \ldots G_m$ und Ψ Potenzreihen von $x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu$ mit Gliedern mindestens zweiten Grades; in Ψ kommt x_1^2 wirklich vor.

---

1) Wir können auch die 3te, ... $m$te Differentialgleichung auf die kanonische Form gebracht denken.

Aus den Gleichungen

$$0 = \lambda K_2 + G_1(K_1, \dots K_m, D_1, \dots D_\mu),$$
$$0 = -\lambda K_1 + G_2(K_1, \dots K_m, D_1, \dots D_\mu),$$
$$0 = a_{\alpha 3} K_3 + \cdots + a_{\alpha m} K_m + G_\alpha(K_1, \dots K_m, D_1, \dots D_\mu)$$
$$(\alpha = 3, \dots m)$$

berechnet man $K_1, \dots K_m$[1]) als Potenzreihen von $D_1, \dots D_u$, welche mit Gliedern zweiter Dimension beginnen. Setzt man nun

$$x_1 = K_1 + X_1, \dots X_m = K_m + X_m,$$

so gehen die Differentialgleichungen über in

$$\frac{dX_1}{dt} = \lambda X_2 + g_{11} X_1 + \cdots + g_{1m} X_m + H_1(X_1, \dots X_m),$$
$$\frac{dX_2}{dt} = -\lambda X_1 + g_{21} X_1 + \cdots + g_{2m} X_m + H_2(X_1, \dots X_m),$$
$$\frac{dX_\alpha}{dt} = a_{\alpha 3} X_3 + \cdots + a_{\alpha m} X_m + g_{\alpha 1} X_1 + \cdots + g_{\alpha m} X_m + H_\alpha(X_1, \dots X_m)$$
$$(\alpha = 3, \dots m)$$

und die Integralgleichung $\Psi = C$ in

$$H(X_1, \dots X_m) = C.$$

Dabei ist

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(D_1, \dots D_\mu) = \frac{\partial G_\alpha(K_1, \dots K_m, D_1, \dots D_\mu)}{\partial K_\beta}$$

eine Potenzreihe von $D_1, \dots D_\mu$, welche für $D_1 = \cdots = D_\mu = 0$ verschwindet; $H_1, \dots H_m$ sind Potenzreihen von $X_1, \dots X_m$ mit Gliedern zweiter und höherer Dimension, welche Potenzreihen von $D_1, \dots D_\mu$ zu Koeffizienten haben. Nach dem am Anfang von § 5 bewiesenen Satze fehlen in H die in $X_1, \dots X_m$ linearen Glieder; H ist also eine Potenzreihe von $X_1, \dots X_m$ mit Gliedern mindestens zweiten Grades (X_1^2 tritt wirklich auf), deren Koeffizienten Potenzreihen von $D_1, \dots D_\mu$ sind.

Die charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} g_{11} - S, & \lambda + g_{12}, & g_{13}, & \dots, & g_{1m} \\ -\lambda + g_{21}, & g_{22} - S, & g_{23}, & \dots, & g_{2m} \\ g_{31}, & g_{32}, & a_{33} + g_{33} - S, & \dots, & a_{3m} + g_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{m1}, & g_{m2}, & a_{m3} + g_{m3}, & \dots, & a_{mm} + g_{mm} - S \end{vmatrix} = 0$$

1) Nach den oben gemachten Voraussetzungen ist

$$\begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m3} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden.

hat m in Potenzreihen von $D_1, \ldots D_\mu$ entwickelbare einfache reelle oder paarweise konjugiert komplexe Wurzeln $S_1, \ldots S_m$, welche sich für $D_1 = \cdots = D_\mu = 0$ auf die m Wurzeln der Gleichung

$$(s^2 + \lambda^2)\begin{vmatrix} a_{33} - s, & \ldots & a_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m3}, & \ldots & a_{mm} - s \end{vmatrix} = 0$$

reduzieren. Durch eine reelle lineare Substitution

$$X_\alpha = h_{\alpha 1}\xi_1 + \cdots + h_{\alpha m}\xi_m, \qquad (\alpha = 1, \ldots m)$$

deren Koeffizienten $h_{\alpha\beta}$ Potenzreihen von $D_1, \ldots D_\mu$ sind, erhalten unsere Differentialgleichungen, wenn

$$S_1 = K + i\Lambda, \quad S_2 = K - i\Lambda$$

gesetzt wird, die Form[1])

$$\frac{d\xi_1}{dt} = K\xi_1 + \Lambda\xi_2 + \cdots,$$
$$\frac{d\xi_2}{dt} = -\Lambda\xi_1 + K\xi_2 + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ist $D_1 = \cdots = D_\mu = 0$, so ist $K = 0$, $\Lambda = \lambda$, und diese Form ist von vornherein vorhanden; für $D_1 = \cdots = D_\mu = 0$ ist also $X_\alpha = \xi_\alpha$ und demnach $h_{\alpha\alpha} = 1$, $h_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \gtrless \beta)$. Die Integralgleichung $H = C$ geht durch die obige Transformation in

$$\Omega(\xi_1, \ldots \xi_m) = C$$

über, wo Ω eine mit quadratischen Gliedern beginnende Potenzreihe von $\xi_1, \ldots \xi_m$ ist, deren Koeffizienten Potenzreihen von $D_1, \ldots D_\mu$ sind. Da das Glied mit ξ_1^2 in Ω nicht verschwindet, so muß nach dem zweiten in § 5 bewiesenen Satze K für alle Werte von $D_1, \ldots D_\mu$ verschwinden. Die beiden ersten Differentialgleichungen sind demnach

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \Lambda\xi_2 + \cdots,$$
$$\frac{d\xi_2}{dt} = -\Lambda\xi_1 + \cdots.$$

Wir haben also Differentialgleichungen von derselben Form wie in der früheren Arbeit; nur sind die Koeffizienten, welche früher gegebene Werte hatten, jetzt Potenzreihen von $D_1, \ldots D_\mu$.

---

1) Bd. 48, S. 406.

§ 7.

Das Differentialgleichungssystem mit den abhängigen Veränderlichen $\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_n$ besitzt nach § 5 eine periodische Lösung mit der Periode

$$T = \frac{2\pi}{A} + T_2 + T_3 + \cdots,$$

wo T_ν eine ganze homogene Funktion νten Grades von γ_1, γ_2 und eine Potenzreihe von $D_1, \ldots D_\mu$ ist; dabei soll $\mathfrak{x}_1 = \gamma_1$, $\mathfrak{x}_2 = \gamma_2$ für $t = 0$ sein. Wenn

$$w = \frac{2\pi t}{T}$$

gesetzt wird, hat diese Lösung die Form

$$\mathfrak{x}_\alpha = (\mathfrak{x}_\alpha)_1 + (\mathfrak{x}_\alpha)_2 + \cdots + (\mathfrak{x}_\alpha)_\nu + \cdots; \qquad (\alpha = 1, \ldots m)$$

es ist

$$(\mathfrak{x}_1)_1 = \gamma_1 \cos w + \gamma_2 \sin w,$$
$$(\mathfrak{x}_2)_1 = -\gamma_1 \sin w + \gamma_2 \cos w,$$
$$(\mathfrak{x}_3)_1 = 0, \ldots, (\mathfrak{x}_m)_1 = 0;$$

$(\mathfrak{x}_\alpha)_\nu$ ist eine ganze homogene Funktion νter Dimension von γ_1, γ_2, eine Potenzreihe von $D_1, \ldots D_\mu$ und eine lineare Funktion von $\cos pw$, $\sin pw$ $(p = 0, 1, \ldots \nu)$.

Wegen

$$x_\alpha = K_\alpha + h_{\alpha 1}\mathfrak{x}_1 + \cdots + h_{\alpha m}\mathfrak{x}_m \qquad (\alpha = 1, \ldots m)$$

wird

$$x_\alpha = K_\alpha + (x_\alpha)_1 + (x_\alpha)_2 + \cdots + (x_\alpha)_\nu + \cdots,$$

wo $(x_\alpha)_\nu$ ein Ausdruck von derselben Form ist wie oben $(\mathfrak{x}_\alpha)_\nu$. Insbesondere ist

$$(x_\alpha)_1 = h_{\alpha 1}(\mathfrak{x}_1)_1 + h_{\alpha 2}(\mathfrak{x}_2)_1$$

oder, da sich h_{11}, h_{22} für $D_1 = \cdots = D_\mu = 0$ auf 1, die übrigen $h_{\alpha 1}, h_{\alpha 2}$ auf Null reduzieren,

$$(x_1)_1 = \gamma_1 \cos w + \gamma_2 \sin w + \cdots,$$
$$(x_2)_1 = -\gamma_1 \sin w + \gamma_2 \cos w + \cdots,$$
$$(x_3)_1 = \cdots, \ \ldots, \ (x_m)_1 = \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder in γ_1, γ_2 linear homogen sind und für $D_1 = \cdots = D_\mu = 0$ verschwinden.

Aus

$$x_{m+\beta} = D_\beta + \mathfrak{p}_\beta(x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu) \qquad (\beta = 1, \ldots \mu)$$

folgt

$$x_{m+\beta} = D_\beta + K_{m+\beta} + (x_{m+\beta})_1 + \cdots + (x_{m+\beta})_\nu + \cdots; \qquad (\beta = 1, \ldots \mu)$$

$K_{m+\beta}$ ist eine mit quadratischen Gliedern beginnende Potenzreihe von $D_1, \ldots D_\mu$ und $(x_{m+\beta})_\nu$ ein Ausdruck von derselben Form wie oben $(x_\alpha)_\nu$; $(x_{m+\beta})_1$ verschwindet für $D_1 = \cdots = D_\mu = 0$.

Wir können auch schreiben:

$$\begin{gathered} x_1 = \gamma_1 \cos w + \gamma_2 \sin w + \cdots, \\ x_2 = -\gamma_1 \sin w + \gamma_2 \cos w + \cdots, \\ x_3 = \cdots, \quad \cdots, \quad x_m = \cdots, \\ x_{m+1} = D_1 + \cdots, \quad \cdots, \quad x_n = D_\mu + \cdots, \end{gathered}$$

wo die nicht angeschriebenen Reihenglieder mindestens die zweite Dimension in bezug auf die Konstanten $\gamma_1, \gamma_2, D_1, \ldots D_\mu$ besitzen. Man kann diese Konstanten so bestimmen, daß für $t = 0$

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad x_{m+1} = c_{m+1}, \quad \ldots \quad x_n = c_n$$

wird. Dann ist nämlich

$$c_1 = \gamma_1 + \cdots, \quad c_2 = \gamma_2 + \cdots, \quad c_{m+1} = D_1 + \cdots, \quad \cdots, \quad c_n = D_u + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder mindestens von der zweiten Dimension in $\gamma_1, \gamma_2, D_1, \ldots D_u$ sind. Daraus berechnet man

$$\gamma_1 = c_1 + \cdots, \quad \gamma_2 = c_2 + \cdots, \quad D_1 = c_{m+1} + \cdots, \quad \cdots, \quad D_\mu = c_n + \cdots$$

als Potenzreihen von $c_1, c_2, c_{m+1}, \ldots c_n$, von welchen nur die Glieder niedrigsten Grades angeschrieben sind.[1]) Demnach lassen sich $x_1, \ldots x_n$ in Potenzreihen von $c_1, c_2, c_{m+1}, \ldots c_n$ umwandeln.

Wir haben

$$x_\alpha = x_\alpha^{(1)} + x_\alpha^{(2)} + \cdots + x_\alpha^{(\nu)} + \cdots \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

Hierbei ist

$$\begin{gathered} x_1^{(1)} = c_1 \cos w + c_2 \sin w, \\ x_2^{(1)} = -c_1 \sin w + c_2 \cos w, \\ x_3^{(1)} = 0, \quad \ldots \quad x_m^{(1)} = 0, \\ x_{m+1}^{(1)} = c_{m+1}, \quad \ldots \quad x_n^{(1)} = c_n; \end{gathered}$$

1) Soll die zu ermittelnde periodische Lösung die Bedingung

$$x_n + \Psi_\mu(x_1 \ldots x_n) = D_\mu = 0$$

erfüllen (vgl. Aufg. II und IV), so lassen sich die Konstanten $\gamma_1, \gamma_2, D_1, \ldots D_{\mu-1}$ so bestimmen, daß für $t = 0$

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad x_{m+1} = c_{m+1}, \quad \ldots \quad x_{n-1} = c_{n-1}$$

wird. An Stelle von c_n tritt jetzt eine Potenzreihe von $c_1, c_2, c_{m+1}, \ldots c_{n-1}$, welche mit quadratischen Gliedern beginnt.

$x_\alpha^{(\nu)}$ $(\nu=2,3\ldots)$ *ist eine ganze homogene Funktion νter Dimension von* $c_1, c_2, c_{m+1}, \ldots c_n$ *und eine lineare Funktion von* $\cos pw$, $\sin pw$ $(p=0,1,\ldots\nu)$. *Die Periode wird*

$$T=\frac{2\pi}{\lambda}+T^{(1)}+T^{(2)}+\cdots+T^{(\nu)}+\cdots,$$

wo $T^{(1)}$ *eine lineare homogene Funktion von* $c_{m+1}, \ldots c_n$ *und* $T^{(\nu)}$ $(\nu=2,3,\ldots)$ *eine ganze homogene Funktion νten Grades von* $c_1, c_2, c_{m+1}, \ldots c_n$ *ist.*

Es können nämlich aus T_2 nur Glieder zweiter und höherer Dimension in den c hervorgehen, während

$$\frac{2\pi}{A}=\frac{2\pi}{\lambda}+\mathfrak{a}_1 D_1+\cdots+\mathfrak{a}_\mu D_\mu+\cdots$$
$$=\frac{2\pi}{\lambda}+\mathfrak{a}_1 c_{m+1}+\cdots+\mathfrak{a}_\mu c_n+\cdots$$

ist.

§ 8.

Die Reihen, deren Existenz nachgewiesen ist, sollen nun nebst der Periode T aus dem Differentialgleichungssystem (A) *am Anfang von* § 6 *direkt berechnet werden.*

Setzt man

$$w=\frac{2\pi t}{T}=(\lambda+\eta^{(1)}+\eta^{(2)}+\cdots)t,$$

wo $\eta^{(\nu)}$ eine ganze homogene Funktion νter Dimension der Integrationskonstanten ist, so schreiben sich die Differentialgleichungen

$$(\lambda+\eta^{(1)}+\eta^{(2)}+\cdots)\frac{dx_1}{dw}=\lambda x_2+F_1(x_1,\ldots x_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\lambda+\eta^{(1)}+\eta^{(2)}+\cdots)\frac{dx_n}{dw}=F_n(x_1,\ldots x_n).$$

Durch Einsetzung der Reihen

$$x_\alpha=x_\alpha^{(1)}+x_\alpha^{(2)}+\cdots+x_\alpha^{(\nu)}+\cdots \qquad (\alpha=1,\ldots n)$$

und Vergleichung der Glieder erster, zweiter usw. Dimension in den Integrationskonstanten c erhält man Differentialgleichungen für die $x_\alpha^{(1)}$, $x_\alpha^{(2)}$ usw. Zur Bestimmung der Konstanten beachtet man, daß für $w=0$

$$x_1^{(1)}=c_1,\quad x_2^{(1)}=c_2,\quad x_{m+1}^{(1)}=c_{m+1},\quad\ldots\quad x_n^{(1)}=c_n,$$
$$x_1^{(\nu)}=0,\quad x_2^{(\nu)}=0,\quad x_{m+1}^{(\nu)}=0,\quad\ldots\quad x_n^{(\nu)}=0 \qquad (\nu=2,\ldots)$$

sein muß und daß sämtliche $x_\alpha^{(\nu)}$ als Funktionen von w die Periode 2π besitzen müssen.[1]) Durch diese Bedingungen werden auch $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots$ bestimmt.

Zunächst hat man die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dw} = x_2^{(1)}, \quad \frac{dx_2^{(1)}}{dw} = -x_1^{(1)},$$

$$\lambda \frac{dx_\alpha^{(1)}}{dw} = a_{\alpha 3} x_3^{(1)} + \cdots + a_{\alpha m} x_m^{(1)} \qquad (\alpha = 3, \dots m)$$

$$\frac{dx_{m+1}^{(1)}}{dw} = 0, \; \dots \; \frac{dx_n^{(1)}}{dw} = 0$$

mit der Lösung

$$x_1^{(1)} = c_1 \cos w + c_2 \sin w,$$

$$x_2^{(1)} = -c_1 \sin w + c_2 \cos w,$$

$$x_3^{(1)} = 0, \; \dots \; x_m^{(1)} = 0,$$

$$x_{m+1}^{(1)} = c_{m+1}, \; \dots \; x_n^{(1)} = c_n.$$

Weiter ist, wenn $F_\alpha^{(2)}(x_1, \dots x_n)$ die Glieder zweiter Dimension in $F_\alpha(x_1, \dots x_n)$ darstellt,

$$\frac{dx_1^{(2)}}{dw} = x_2^{(2)} - c_2 \eta^{(1)} \cos w + c_1 \eta^{(1)} \sin w + \frac{1}{\lambda} F_1^{(2)}(x_1^{(1)}, \dots x_n^{(1)}),$$

$$\frac{dx_2^{(2)}}{dw} = -x_1^{(1)} + c_1 \eta^{(1)} \cos w + c_2 \eta^{(1)} \sin w + \frac{1}{\lambda} F_2^{(2)}(x_1^{(1)}, \dots x_n^{(1)}),$$

$$\lambda \frac{dx_\alpha^{(2)}}{dw} = a_{\alpha 3} x_3^{(2)} + \cdots + a_{\alpha m} x_m^{(2)} + F_\alpha^{(2)}(x_1^{(1)}, \dots x_n^{(1)})$$

$$(\alpha = 3, \dots m),$$

$$\lambda \frac{dx_{m+1}^{(2)}}{dw} = F_{m+1}^{(2)}(x_1^{(1)}, \dots x_n^{(1)}),$$

. . . .

$$\lambda \frac{dx_n^{(2)}}{dw} = F_n^{(2)}(x_1^{(1)}, \dots x_n^{(1)}).$$

---

1) Ist die Bedingung

$$D_\mu = x_n + \Psi_\mu(x_1, \dots x_n) = 0$$

vorgeschrieben, so bleiben nur die Integrationskonstanten $c_1, c_2, c_{m+1}, \dots c_{n-1}$ bestehen. Die Bedingungen $x_n^{(1)} = c_n$, $x_n^{(2)} = 0, \dots$ für $w = 0$ sind zu ersetzen durch die folgenden:

$$x_n^{(1)} = 0, \quad x_n^{(2)} = -\Psi_\mu^{(2)}(c_1, c_2, 0, \dots 0, c_{m+1}, \dots c_{n-1}, 0), \dots$$

für $w = 0$. Dabei ist $\Psi_\mu^{(2)}$ die Summe der in Ψ_μ enthaltenen quadratischen Glieder. — Übrigens könnte man von vornherein x_n vermittels der obigen Bedingung eliminieren.

Die Ausdrücke $F_\alpha^{(2)}(x_1^{(1)}, \dots x_n^{(1)})$ $(\alpha = 1, \dots n)$ sind homogene quadratische Funktionen von $c_1, c_2, c_{m+1}, \dots c_n$; $c_1^2, c_1 c_2, c_2^2$ haben als Koeffizienten lineare Funktionen von $\cos 2w$, $\sin 2w$ und $c_1 c_m, c_2 c_m, \dots, c_1 c_n, c_2 c_n$ lineare homogene Funktionen von $\cos w$, $\sin w$, während c_{m+1}^2, $c_{m+1} c_n, \dots c_n^2$ mit konstanten Koeffizienten multipliziert sind.

Damit sich aus den beiden ersten Differentialgleichungen $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$ als periodische Funktionen von w ergeben, muß der Koeffizient von $\cos w$ in der ersten dem Koeffizienten von $\sin w$ in der zweiten Differentialgleichung gleich, ferner muß der Koeffizient von $\sin w$ in der ersten dem Koeffizienten von $\cos w$ in der zweiten Differentialgleichung entgegengesetzt gleich sein.[1]) So erhält man zwei Bedingungen

$$2 c_2 \eta^{(1)} = \cdots, \quad 2 c_1 \eta^{(1)} = \cdots,$$

deren rechte Seiten lineare homogene Funktionen von $c_1 c_\gamma, c_2 c_\gamma$ $(\gamma = m+1, \dots n)$ sind. Damit sich hieraus $\eta^{(1)}$ als lineare Funktion der c ergibt, muß die rechte Seite der ersten Bedingung durch c_2, die rechte Seite der zweiten durch c_1 teilbar sein, und man erhält $\eta^{(1)}$ als lineare homogene Funktion von $c_{m+1}, \dots c_n$. Aus den beiden ersten Differentialgleichungen ergeben sich nun $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$ als lineare Funktionen von $\cos pw$, $\sin pw$ $(p = 0, 1, 2)$; die Koeffizienten von $\cos w$, $\sin w$ folgen aus der Bedingung $x_1^{(2)} = 0$, $x_2^{(2)} = 0$ für $w = 0$.

Aus den $m-2$ folgenden Differentialgleichungen berechnet man $x_3^{(2)}, \dots x_m^{(2)}$ als partikuläre Lösungen mit Benutzung der Bedingung, daß sie die Periode 2π besitzen müssen. Damit $x_{m+\beta}^{(2)}$ $(\beta = 1, \dots \mu)$ periodisch sein kann, muß in der Entwicklung von $F_{m+\beta}^{(2)}(x_1^{(1)}, \dots x_n^{(1)})$

1) Durch Einsetzung der Ausdrücke

$$x_1 = a_1 \cos w + b_1 \sin w + \cdots,$$
$$x_2 = a_2 \cos w + b_2 \sin w + \cdots$$

in die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dw} = x_2 + \mathfrak{a}_1 \cos w + \mathfrak{b}_1 \sin w + \cdots,$$
$$\frac{dx_2}{dw} = -x_1 + \mathfrak{a}_2 \cos w + \mathfrak{b}_2 \sin w + \cdots$$

und Vergleichung der Koeffizienten von $\cos w$, $\sin w$ erhält man die Gleichungen

$$b_1 - a_2 = \mathfrak{a}_1, \quad a_1 + b_2 = -\mathfrak{b}_1,$$
$$a_1 + b_2 = \mathfrak{a}_2, \quad b_1 - a_2 = \mathfrak{b}_1,$$

welche nur bestehen können, wenn

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_2, \quad \mathfrak{b}_1 = -\mathfrak{a}_2$$

ist.

als lineare Funktion von $\cos w$, $\sin w$, $\cos 2w$, $\sin 2w$ das konstante Glied von selbst fortfallen; dann erscheint

$$x_{m+\beta}^{(2)} = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^w F_{m+\beta}^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots x_n^{(1)})\,dw$$

als lineare Funktion von $\cos w$, $\sin w$, $\cos 2w$, $\sin 2w$.[1])

So fortfahrend findet man $\eta^{(2)}$, $x_1^{(3)}$, $\ldots$ $x_n^{(3)}$ usw.

Durch Umstellung *erscheint* x_α *als Fouriersche Reihe, deren Koeffizienten Potenzreihen von* c_1, c_2, c_{m+1}, $\ldots$ c_n *sind:*

$$x_\alpha = A_0^{(\alpha)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^{(\alpha)} \cos \nu w + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu^{(\alpha)} \sin \nu w\,; \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

$A_\nu^{(\alpha)}$, $B_\nu^{(\alpha)}$ $(\nu = 2, 3 \ldots)$ beginnen mit Gliedern νter Dimension in den c, $A_0^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, \ldots m)$ und $A_1^{(\alpha)}$, $B_1^{(\alpha)}$ $(\alpha = 3, \ldots n)$ mit Gliedern zweiter Dimension; ferner ist

$$A_1^{(1)} = c_1 + \cdots, \quad B_1^{(1)} = c_2 + \cdots; \quad A_1^{(2)} = c_2 + \cdots, \quad B_1^{(2)} = -c_1 + \cdots;$$
$$A_0^{(m+1)} = c_{m+1} + \cdots, \quad \cdots, \quad A_0^{(n)} = c_n + \cdots,$$

wo die nicht angeschriebenen Glieder mindestens die zweite Dimension haben.

§ 9.

Aufgabe I (vgl. § 1). Die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda x_2 + \cdots, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\lambda x_1 + \cdots, \quad \frac{dx_3}{dt} = + \cdots$$

mit den Integralen

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x_3^2 + \cdots = C,$$
$$x_3 + \cdots = D$$

besitzen unter den Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad x_3 = c_3$$

die periodische Lösung

$$x_\alpha = x_\alpha^{(1)} + x_\alpha^{(2)} + \cdots + x_\alpha^{(\nu)} + \cdots; \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

---

1) Ist die Bedingung $D_\mu = 0$ vorgeschrieben, so ist

$$x_n^{(2)} = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^w F_n^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots)\,dw - \Psi_\mu^{(2)}(c_1, \ldots)$$

oder

$$x_n^{(2)} = -\Psi_\mu^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots).$$

hierin ist $x_\alpha^{(\nu)}$ eine ganze homogene Funktion νter Dimension von c_1, c_2, c_3 und eine lineare Funktion von $\cos pw$, $\sin pw$ ($p = 0, 1, \ldots \nu$) und insbesondere

$$x_1^{(1)} = c_1 \cos w + c_2 \sin w,$$
$$x_2^{(1)} = -c_1 \sin w + c_2 \cos w,$$
$$x_3^{(1)} = c_3;$$

die Periode ist

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} + T^{(1)} + T^{(2)} + \cdots,$$

wo $T^{(1)} = 2\pi a c_3$ und $T^{(\nu)}$ eine homogene Funktion νter Dimension von c_1, c_2, c_3 ist; es ist

$$w = \frac{2\pi t}{T}.$$

Unter Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen R, R', Φ' und x_1, x_2, x_3 drücken wir c_1, c_2, c_3 durch die Werte R_0, R_0', Φ_0' aus, welche R, R', Φ' für $t = 0$ annehmen:

$$c_1 = -\frac{\alpha R_0 + \beta \Phi_0'}{\lambda^2}, \quad c_2 = \frac{R_0'}{\lambda}, \quad c_3 = -\frac{\gamma R_0 - \Phi_0'}{\lambda^2}.$$

Dann ist

$$R = \sum_{\nu=1}^{\infty}(R)_\nu, \quad R' = \sum_{\nu=1}^{\infty}(R')_\nu, \quad \Phi' = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Phi')_\nu,$$

wo $(R)_\nu$, $(R')_\nu$, $(\Phi')_\nu$ ganze homogene Funktionen νter Dimension von R_0, R_0', Φ_0' und lineare Funktionen von $\cos pw$, $\sin pw$ ($p = 0, 1, \ldots \nu$) sind. Insbesondere hat man

$$(R)_1 = -\frac{\alpha R_0 + \beta \Phi_0'}{\lambda^2} \cos w + \frac{R_0'}{\lambda} \sin w + \frac{\beta(\Phi_0' - \gamma R_0)}{\lambda^2},$$
$$(R')_1 = R_0' \cos w + \frac{\alpha R_0 + \beta \Phi_0'}{\lambda} \sin w,$$
$$(\Phi')_1 = -\frac{\gamma(\alpha R_0 + \beta \Phi_0')}{\lambda^2} \cos w + \frac{\gamma R_0'}{\lambda} \sin w + \frac{\alpha(\gamma R_0 - \Phi_0')}{\lambda^2}.$$

Die Periode ist

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} + T^{(1)} + T^{(2)} + \cdots,$$

wo $T^{(\nu)}$ von der νten Dimension in R_0, R_0', Φ_0' und insbesondere

$$T^{(1)} = \frac{2\pi a(\gamma R_0 - \Phi_0')}{\lambda^2}$$

ist.[1])

Weiter hat man

$$\frac{d\varphi}{dw} = \frac{T}{2\pi}(\eta_0 + \Phi') = \frac{\eta_0}{\lambda} + \left(\frac{\eta_0 a}{\lambda^2} + \frac{\alpha}{\lambda^3}\right)(\gamma R_0 - \Phi_0')$$
$$- \frac{\gamma(\alpha R_0 + \beta \Phi_0')}{\lambda^3} \cos w + \frac{\gamma R_0'}{\lambda^2} \sin w + \cdots.$$

1) Der konstante Faktor a kann nach § 8 berechnet werden.

Der Mittelwert dieser periodischen Funktion (die Summe der von cos und sin freien Reihenglieder),

$$\Omega = \frac{\eta_0}{\lambda} + \left(\frac{\eta_0 \alpha}{\lambda^2} + \frac{\alpha}{\lambda^3}\right)(\gamma R_0' - \Phi_0') + \cdots,$$

ist eine Potenzreihe von R_0, R_0', Φ_0'.[1] Indem man

$$\frac{d\varphi}{dw} - \Omega$$

so integriert, daß $\varphi = \varphi_0$ für $t = 0$ wird, erhält man

$$\varphi - \varphi_0 = \Omega w + (\Phi)_1 + \cdots + (\Phi)_\nu + \cdots,$$

wo

$$(\Phi)_1 = \frac{\gamma R_0'}{\lambda^2} - \frac{\gamma R_0'}{\lambda^2}\cos w - \frac{\gamma(\alpha R_0 + \beta \Phi_0')}{\lambda^2}\sin w$$

und $(\Phi)_\nu$ eine ganze homogene Funktion νter Dimension von R_0, R_0', Φ_0' und lineare Funktion von $\cos pw$, $\sin pw$ $(p = 0, 1, \ldots \nu)$ ist.

Wir wählen jetzt den Anfangspunkt der Zeit t so, daß für $t = 0$ $R' = 0$ wird. Die in § 1 aufgestellten Differentialgleichungen mit der unabhängigen Veränderlichen t und den abhängigen Veränderlichen R, R', Φ' bleiben ungeändert, wenn man t durch $-t$ und R, R', Φ' durch R, $-R'$, Φ' ersetzt. Dabei bleiben die Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad R = R_0, \quad R' = 0, \quad \Phi' = \Phi_0'$$

ungeändert. Die so festgelegten Funktionen R, Φ' bleiben also bei einer Zeichenänderung von t ungeändert, während R' das Zeichen ändert. Auf Grund des Zusammenhanges zwischen x_1, x_2, x_3 und R, R', Φ' sind unter den Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad \dot{x}_1 = c_1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = c_3$$

x_1, x_3 gerade Funktionen von t oder von $w = \frac{2\pi t}{T}$, während x_2 eine ungerade Funktion von t ist. Die Fourierschen Reihen für R, Φ' und x_1, x_3 enthalten also nur Kosinusglieder, diejenigen für R' und x_2 nur Sinusglieder. Demnach verschwindet R' für $w = 0, \pi, \ldots$ oder für $t = 0, \frac{T}{2}, \ldots$; diesen Werten von t entsprechen die Maxima und Minima von R.

---

[1] Das Anfangsglied von Ω ist $\frac{\eta_0}{\lambda} = \sqrt{\frac{f'(r_0)\cdot(1 + f'^2(r_0))}{r_0 f''(r_0) + 3f'(r_0)}}$.

§ 10.

Aufgabe II (vgl. § 2). Die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 y_1 + \cdots, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\lambda_1 x_1 + \cdots,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 y_2 + \cdots, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\lambda_2 x_2 + \cdots,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \quad + \cdots, \quad \frac{dy_3}{dt} = \quad + \cdots$$

mit den Integralen

$$\Phi = \text{Const.}, \quad x_3 + \Psi_1 = D_1, \quad y_3 + \Psi_2 = D_2 = 0$$

besitzen, wenn $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ keine ganze Zahl ist, eine periodische Lösung mit drei[1]) Konstanten c_1, c_1', c_3 (es sind dies die Werte von x_1, y_1, x_3 für $t = 0$), welche, wenn

$$w = \frac{2\pi t}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\lambda_1} + T^{(1)} + T^{(2)} + \cdots$$

gesetzt wird, eine Entwicklung

$$x_\alpha = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\alpha^{(\nu)}, \quad y_\alpha = \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\alpha^{(\nu)} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

zuläßt, worin $x_\alpha^{(\nu)}$, $y_\alpha^{(\nu)}$ ganze homogene Funktionen νter Dimension und lineare Funktionen von $\cos \mu w$, $\sin \mu w$ ($\mu = 0, 1, \ldots \nu$) sind. Insbesondere ist

$$x_1^{(1)} = c_1 \cos w + c_1' \sin w, \quad y_1^{(1)} = -c_1 \sin w + c_1' \cos w,$$

$$x_2^{(1)} = 0, \quad y_2^{(1)} = 0, \quad x_3^{(1)} = c_3, \quad y_3^{(1)} = 0.$$

$T^{(\nu)}$ ist eine ganze homogene Funktion νten Grades von c_1, c_1', c_3; $T^{(1)}$ ist proportional c_3.

Wenn für $t = 0$

$$p = p_0, \quad q = q_0, \quad r = r_0; \quad \Gamma = \Gamma_0, \quad \Gamma' = \Gamma_0', \quad \Gamma'' = \Gamma_0''$$

ist, so ergeben sich aus den Substitutionsgleichungen (§ 2)

$$p = L_1 x_1 + L_2 x_2 + \xi x_3 \quad \text{usw.},$$

$$\Gamma = L_1' y_1 + L_2' y_2 + \xi y_3 \quad \text{usw.}$$

c_1, c_1, c_3 als Potenzreihen von p_0, q_0, Γ_0'':

$$c_1 = \frac{\eta p_0 - \xi q_0}{l \lambda_1 N_1'} + \cdots,$$

$$c_1' = \frac{\Gamma_0''}{N_1'} + \cdots,$$

$$c_3 = \frac{L_1 q_0 - M_1 p_0}{l \lambda_1 N_1'} + \cdots,$$

1) Wegen $D_2 = 0$ sind die Anmerkungen zu § 7 und § 8 zu berücksichtigen.

vorausgesetzt, daß $N_1' \gtrless 0$ ist[1]); es ist ferner

$$r_0 = -\frac{L_1' p_0 + M_1' q_0}{N_1'} + \cdots,$$
$$\Gamma_0 = \frac{L_1'}{N_1'} \Gamma_0'' + \cdots,$$
$$\Gamma_0' = \frac{M_1'}{N_1'} \Gamma_0'' + \cdots.$$

Man hat nun

$$T = \frac{2\pi}{\lambda_1} + (T)_1 + (T)_2 + \cdots,$$

wo $(T)_\nu$ eine ganze homogene Funktion νten Grades von c_1, c_1', c_3 und insbesondere $(T)_1$ zu $L_1 q_0 - M_1 p_0$ proportional ist, und

$$p = \sum_{\nu=1}^{\infty}(p)_\nu, \quad q = \sum_{\nu=1}^{\infty}(q)_\nu, \quad r = \sum_{\nu=1}^{\infty}(r)_\nu,$$
$$\Gamma = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Gamma)_\nu, \quad \Gamma' = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Gamma')_\nu, \quad \Gamma'' = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Gamma'')_\nu,$$

wo $(p)_\nu, \ldots; (\Gamma)_\nu, \ldots$ ganze homogene Funktionen νten Grades von $\cos \mu w$, $\sin \mu w$ ($\mu = 0, 1, \ldots \nu$) sind. Es ist insbesondere

$$(p)_1 = L_1 c_1 \cos w + L_1 c_1' \sin w + c_3 \xi,$$
$$(q)_1 = M_1 c_1 \cos w + M_1' c_1' \sin w + c_3 \eta,$$
$$(r)_1 = N_1 c_1 \cos w + N_1' c_1' \sin w + c_3 \zeta;$$
$$(\Gamma)_1 = - L_1' c_1 \sin w + L_1' c_1' \cos w,$$
$$(\Gamma')_1 = - M_1' c_1 \sin w + M_1' c_1' \cos w,$$
$$(\Gamma'')_1 = - N_1' c_1 \sin w + M_1' c_1' \cos w,$$

wo c_1, c_1', c_3 wie oben durch p_0, q_0, Γ'' auszudrücken sind.

Wenn $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ keine ganze Zahl ist, erhält man auf ähnlichem Wege eine periodische Lösung mit drei willkürlichen Konstanten, welche eine von $\frac{2\pi}{\lambda_2}$ wenig abweichende Periode besitzt.

Beiden Scharen periodischer Lösungen gemeinsam sind die von Staude[2]) nachgewiesenen Drehungen um permanente Rotationsachsen, so weit die letzteren in der Nähe von OS liegen.

Die Differentialgleichungen am Anfang von § 2 mit den abhängigen Veränderlichen p, q, r; γ, γ', γ'' werden nämlich befriedigt, wenn man

$$p = \gamma \omega, \quad q = \gamma' \omega, \quad r = \gamma'' \omega$$

1) L_1', M_1', N_1' können nicht gleichzeitig verschwinden.

2) Staude, über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt (Crelles Journ. 113). Routh Bd. II, S. 163. — Lecornu, a. a. O.

setzt, wo γ, γ', γ'' und ω konstante Werte sind, welche durch die Gleichungen

$$(B-C)\xi\gamma'\gamma''\omega^2 = g(\eta\gamma''-\zeta\gamma'),$$
$$(C-A)\eta\gamma''\gamma\omega^2 = g(\zeta\gamma-\xi\gamma''),$$
$$(A-B)\zeta\gamma\gamma'\omega^2 = g(\xi\gamma'-\eta\gamma)$$

verknüpft sind, woraus

$$(B-C)\xi\gamma'\gamma''+(C-A)\eta\gamma''\gamma+(A-B)\zeta\gamma\gamma'=0$$

folgt. Es handelt sich um gleichförmige Rotationen (Winkelgeschwindigkeit ω) um lotrechte Achsen (Richtungskosinus γ, γ', γ'' in bezug auf die Hauptachsen des Körpers). Für uns kommen nur Achsen in der Nähe von OS in Betracht. Für die Achse OS ist $\omega = 0$, für benachbarte, dem „Schwerpunktskegel" angehörige Achsen ist ω klein.

Die obigen Gleichungen gehen, wenn man darin

$$\gamma = \frac{\xi}{l} + \Gamma, \quad \gamma' = \frac{\eta}{l} + \Gamma', \quad \gamma'' = \frac{\zeta}{l} + \Gamma''$$

setzt, in

$$\omega^2 = \frac{gl^2(\eta\Gamma''-\zeta\Gamma')}{(B-C)\eta\zeta} + \cdots = \frac{gl^2(\zeta\Gamma-\xi\Gamma'')}{(C-A)\zeta\xi} + \cdots$$

usw. über. Verbindet man damit die durch Umformung von $\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1$ erhaltene Gleichung

$$\xi\Gamma+\eta\Gamma'+\zeta\Gamma''+\frac{l}{2}(\Gamma^2+\Gamma'^2+\Gamma''^2)=0,$$

so ergeben sich

$$\Gamma = \omega^2\cdot\frac{\xi((B-A)\eta^2+(C-A)\zeta^2)}{gl^4}+\cdots,$$
$$\Gamma' = \omega^2\cdot\frac{\eta((C-B)\zeta^2+(A-B)\xi^2)}{gl^4}+\cdots,$$
$$\Gamma'' = \omega^2\cdot\frac{\zeta((A-C)\xi^2+(B-C)\eta^2)}{gl^4}+\cdots$$

als Potenzreihen von ω^2, und

$$p=\frac{\xi}{l}\omega+\cdots, \quad q=\frac{\eta}{l}\omega+\cdots, \quad r=\frac{\zeta}{l}\omega+\cdots$$

schreiten nach ungeraden Potenzen von ω fort.[1])

Diese Lösung mit konstanten Werten von p, q, r, Γ, Γ', Γ'' muß in der oben bestimmten periodischen Lösung mit einer von $\frac{2\pi}{\lambda_1}$ wenig

---

1) Liegt der Schwerpunkt S auf einer Hauptachse von O, ist also z. B. $\xi=\eta=0$, $\zeta \gtrless 0$, so ist bei beliebigem ω $\gamma=0$, $\gamma'=0$, $\gamma''=1$, d. h. es ist eine gleichförmige Rotation mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit um die lotrechte Hauptachse OS möglich.

als Potenzreihen von p, q, Γ, Γ' Γ'' dar. Die Einsetzung der oben für p, q, Γ, Γ', Γ'', gefundenen Ausdrücke ergibt

$$\Theta = \frac{lN_1'}{k}(c_1 \sin w - c_1' \cos w) + \cdots,$$

$$\Phi = \frac{l}{k^2}(\xi M_1' - \eta L_1')(c_1 \sin w - c_1' \cos w) + \cdots,$$

$$\psi' = \frac{l}{k^2}(\xi L_1 + \eta M_1)(c_1 \cos w + c_1' \sin w) + lc_3 + \cdots.$$

Ist für $t = 0$

$$\Theta = \Theta_0, \quad \Theta' = \Theta_0', \quad \psi' = \psi_0',$$

so hat man

$$c_1 = \frac{k\Theta_0'}{l\lambda_1 N_1'} + \cdots,$$

$$c_1' = -\frac{k\Theta_0}{lN_1'} + \cdots,$$

$$lc_3 = \psi_0' - \frac{(\xi L_1 + \eta M_1)\Theta_0'}{\lambda_1 N_1'} + \cdots.$$

Nun ist

$$\Theta = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Theta)_\nu, \quad \Phi = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Phi)_\nu, \quad \psi' = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\psi')_\nu,$$

wo

$$(\Theta)_1 = \Theta_0 \cos w + \frac{\Theta_0'}{\lambda_1}\sin w,$$

$$(\Phi)_1 = \frac{\xi M_1' - \eta L_1'}{kN_1'}\left(\Theta_0 \cos w + \frac{\Theta_0'}{\lambda_1}\sin w\right),$$

$$(\psi')_1 = \psi_0' + \frac{\xi L_1 + \eta M_1}{kN_1'}\left[\frac{\Theta_0'}{\lambda_1}(\cos w - 1) - \Theta_0 \sin w\right]$$

und $(\Theta)_\nu$, $(\Phi)_\nu$, $(\psi')_\nu$ ganze homogene Funktionen νten Grades von Θ_0, Θ_0', ψ_0' und lineare Funktionen von $\cos \mu w$ $(\mu = 0, 1, \ldots \nu)$ sind. Wenn man

$$\frac{d\psi}{dw} = \frac{T}{2\pi}\psi' = \frac{(\psi')_1}{\lambda_1} + \cdots$$

integriert und $\psi = \psi_0$ für $t = 0$ annimmt, so erhält man

$$\psi - \psi_0 = \Omega w + (\psi)_1 + \cdots + (\psi)_\nu + \cdots,$$

wo

$$\Omega = \frac{\psi_0'}{\lambda_1} - \frac{(\xi L_1 + \eta M_1)\Theta_0'}{k\lambda_1^2 N_1'} + \cdots.$$

eine Potenzreihe von Θ_0, Θ_0', ψ_0',

$$(\psi)_1 = \frac{\xi L_1 + \eta M_1}{k\lambda_1 N_1'}\left[\Theta_0(\cos w - 1) + \frac{\Theta_0'}{\lambda_1}\sin w\right]$$

und $(\psi)_\nu$ eine ganze homogene Funktion νten Grades von Θ_0, Θ_0', ψ_0' und lineare Funktion von $\cos \mu w$, $\sin \mu w$ $(\mu = 0, 1, \ldots \nu)$ ist.

§ 11.

Aufgabe III (vergl. § 3). Die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1\left(\frac{x_1'}{\lambda_1}\right), \quad \frac{d\left(\frac{x_1'}{\lambda_1}\right)}{dt} = -\lambda_1 x_1 + \cdots,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2\left(\frac{x_2'}{\lambda_2}\right), \quad \frac{d\left(\frac{x_2'}{\lambda_2}\right)}{dt} = -\lambda_2 x_2 + \cdots,$$

$$\frac{dx_3'}{dt} = \quad + \cdots$$

mit den Integralen

$$\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + \cdots = \text{Const.},$$
$$x_3' + \cdots = \text{Const.}$$

besitzen, wenn $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ keine ganze Zahl ist, eine periodische Lösung mit drei Konstanten c_1, c_1', c_3' (den Anfangswerten von x_1, x_1', x_3')

$$x_\alpha = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\alpha^{(\nu)}, \qquad (\alpha = 1, 2)$$

$$x_\alpha' = \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\alpha^{(\nu)}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

worin

$$x_1^{(1)} = c_1 \cos w + \frac{c_1'}{\lambda_1} \sin w, \quad x_2^{(1)} = 0,$$
$$y_1^{(1)} = -c_1 \lambda_1 \sin w + c_1' \cos w, \quad y_2^{(1)} = 0, \quad y_3^{(1)} = c_3'$$

und $(x_\alpha)_\nu$, $(y_\alpha)_\nu$ ganze homogene Funktionen νter Dimension von c_1, c_1', c_3' und lineare Funktionen von $\cos \mu w$, $\sin \mu w$ ($\mu = 0, 1, \ldots \nu$) sind; dabei ist

$$w = \frac{2\pi t}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\lambda_1} + T^{(1)} + T^{(2)} + \cdots,$$

wo $T^{(1)}$ proportional c_3' und $T^{(\nu)}$ eine ganze homogene Funktion νter Dimension von c_1, c_1', c_3' ist.

Nun ist

$$\Theta = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1\left(c_1 \cos w + \frac{c_1'}{\lambda_1} \sin w\right) + \cdots,$$

$$\Phi = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \beta_1\left(c_1 \cos w + \frac{c_1'}{\lambda_1} \sin w\right) + \cdots,$$

$$\Theta' = \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' = \alpha_1(-c_1 \lambda_1 \sin w + c_1' \cos w) + \cdots,$$

$$\Phi' = \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' = \beta_1(-c_1 \lambda_1 \sin w + c_1' \cos w) + \cdots,$$

$$\psi' = \gamma_1 x_1' + \gamma_2 x_2' + \gamma_3 x_3' = \gamma_1(-c_1 \lambda_1 \sin w + c_1' \cos w) + \gamma_3 c_3' + \cdots.$$

Soll für $t = 0$

$$\Theta = \Theta_0, \quad \Theta' = \Theta_0', \quad \psi' = \psi_0'$$

sein, so hat man

$$c_1 = \frac{\Theta_0}{\alpha_1} + \cdots, \quad c_1' = \frac{\Theta_0'}{\alpha_1} + \cdots, \quad \gamma_3 c_3' = \psi_0' - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\Theta_0' + \cdots.$$

Die Einsetzung dieser Werte ergibt

$$\Theta = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Theta)_\nu, \quad \Phi = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Phi)_\nu, \quad \psi' = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\psi')_\nu,$$

wo $(\Theta)_\nu$, $(\Phi)_\nu$, $(\psi')_\nu$ dieselbe Bedeutung haben wie in § 10; jetzt ergibt sich

$$(\Theta)_1 = \Theta_0 \cos w + \frac{\Theta_0'}{\lambda_1} \sin w,$$

$$(\Phi)_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\left(\Theta_0 \cos w + \frac{\Theta_1'}{\lambda_1} \sin w\right),$$

$$(\psi')_1 = \psi_0' - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\Theta_0' + \frac{\gamma_1}{\alpha_1}(\Theta_0' \cos w - \Theta_0 \lambda_1 \sin w).$$

Ferner ist in

$$T = \frac{2\pi}{\lambda_1} + (T)_1 + (T)_2 + \cdots$$

$(T)_1$ proportional $\psi_0' - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\Theta_0'$ und $(T)_\nu$ eine ganze homogene Funktion νten Grades von Θ_0, Θ_0', ψ_0'. Durch Integration erhält man wie in § 10

$$\psi - \psi_0 = \Omega w + (\psi)_1 + \cdots + (\psi)_\nu + \cdots,$$

wo

$$\Omega = \frac{\psi_0'}{\lambda_1} - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\frac{\Theta_0'}{\lambda_1} + \cdots$$

und

$$(\psi)_1 = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\left[\Theta_0(\cos w - 1) + \frac{\Theta_0'}{\lambda_1} \sin w\right]$$

ist.

Wenn $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ keine ganze Zahl ist, findet man ebenso eine von den drei Konstanten abhängige periodische Lösung Θ, Φ, ψ', deren Periode von $\frac{2\pi}{\lambda_2}$ wenig abweicht.

§ 12.

Aufgabe IV (vgl. § 4). Die kanonischen Differentialgleichungen, die bekannten Integrale und die periodischen Lösungen haben dieselbe Form wie am Anfang von § 10. Für $t = 0$ sei

$$P = P_0, \quad Q = Q_0, \quad R = R_0.$$

Aus dem Zusammenhang zwischen den ursprünglichen und den neuen Veränderlichen folgt

$$c_1 = \frac{P_0}{n - \lambda_1 \sigma_1} + \cdots, \quad c_1' = \frac{Q_0}{n\sigma_1 - \lambda_1} + \cdots, \quad c_3 = R_0.$$

Hiernach ist die Periode

$$T = \frac{2\pi}{\lambda_1} + (T)_1 + (T)_2 + \cdots,$$

wo $(T)_1$ proportional R_0 und $(T)_\nu$ eine ganze homogene Funktion νter Dimension von P_0, Q_0, R_0 ist. Ferner hat man

$$p = P = \sum_{\nu=1}^{\infty}(P)_\nu, \quad q = Q = \sum_{\nu=1}^{\infty}(Q)_\nu, \quad r = n + R = n + \sum_{\nu=1}^{\infty}(R)_\nu,$$

$$\gamma = \Gamma = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Gamma)_\nu, \quad \gamma' = \Gamma' = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Gamma')_\nu, \quad \gamma'' = 1 + \Gamma'' = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Gamma'')_\nu,$$

wo $(P)_\nu, \ldots; (\Gamma)_\nu, \ldots$ ganze homogene Funktionen νten Grades von P_0, Q_0, R_0 und lineare Funktionen von $\cos\mu w$, $\sin\mu w$ $(\mu = 0, 1, \ldots \nu)$ sind. Insbesondere ist

$$(P)_1 = P_0 \cos w + Q_0 \frac{n - \lambda_1 \sigma_1}{n\sigma_1 - \lambda_1} \sin w,$$

$$(Q)_1 = - P_0 \frac{n\sigma_1 - \lambda_1}{n - \lambda_1 \sigma_1} \sin w + Q_0 \cos w,$$

$$(R)_1 = R_0;$$

$$(\Gamma)_1 = \frac{P_0}{n - \lambda_1 \sigma_1} \cos w + \frac{Q_0}{n\sigma_1 - \lambda_1} \sin w,$$

$$(\Gamma')_1 = - \frac{P_0 \sigma_1}{n - \lambda_1 \sigma_1} \sin w + \frac{Q_0 \sigma_1}{n\sigma_1 - \lambda_1} \cos w,$$

$$(\Gamma'')_1 = 0.$$

Der Körper führt also, wenn $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ keine ganze Zahl ist, eine Bewegung mit einer von $\frac{2\pi}{\lambda_1}$ wenig abweichenden Periode aus, wenn ihm eine nahezu lotrechte und von n wenig verschiedene Winkelgeschwindigkeit in einer alsdann bestimmten Anfangslage erteilt wird. Ähnlich findet man, wenn $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ keine ganze Zahl ist, die periodischen Bewegungen mit von $\frac{2\pi}{\lambda_2}$ wenig verschiedener Periode.

Der Körper kann mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit um die durch den Schwerpunkt gehende vertikal gerichtete Hauptachse rotieren. Unsere Differentialgleichungen (§ 4) besitzen in Übereinstimmung damit die Lösung

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = c_3; \quad \Gamma = \Gamma' = \Gamma'' = 0.$$

Diese Lösung muß aus der oben gefundenen periodischen Lösung mit der Periode $\frac{2\pi}{\lambda_1} + \cdots$ hervorgehen, indem man $c_1 = 0$, $c_1' = 0$ setzt.

Zur konstruktiven Infinitesimalgeometrie der ebenen Kurven.

Von RICHARD V. MISES in Wien.

Die vorliegende Arbeit versucht es, die konstruktiven Probleme der infinitesimalen Geometrie von einem allgemeinen, einheitlichen Gesichtpunkt aus zu behandeln. Sie knüpft an gewisse in der Kinematik übliche Anschauungen an, ohne jedoch, wie dies in bisherigen kinematisch-geometrischen Untersuchungen meist der Fall war, die Betrachtung *starrer* bewegter Systeme zum Ausgangspunkte zu wählen. Die Grundlage der folgenden Erörterungen bildet vielmehr die Aufstellung eines neuen[1]) Begriffes, der sich für die Lösung hierhergehöriger Aufgaben nützlich erweist. Dieser Begriff, die *Charakteristik eines veränderlichen geometrischen Elementes*, fällt für den speziellen Fall des veränderlichen Punktes bezw. der veränderlichen Geraden wesentlich mit dem der kinematischen Geschwindigkeit[2]) bezw. Winkelgeschwindigkeit zusammen. Im allgemeinen kann er als *geometrisches Äquivalent* für den analytischen Begriff der *Ableitung einer veränderlichen Größe* angesehen werden. Denn der ökonomische Grundgedanke der Differentialrechnung — alle Infinitesimalbetrachtungen im vorhinein zu erledigen, um sie im Einzelfalle zu ersparen — war für die Begriffsbildung in erster Linie maßgebend, und durchweg bildete die Analogie unserer Probleme mit jenen der Analysis den leitenden Gesichtspunkt für die hier gebotenen Untersuchungen. Die Aufgaben, mit denen wir uns zu beschäftigen haben, enthalten in ihren Daten in gleicher Weise analytische und rein geometrische Beziehungen. Die Lösung erfordert in jedem Falle eine

1) Durch eine Besprechung im Jahrbuch ü. d. Fortschritte d. Mathem. 1897 S. 505 f. erhielt Verfasser, kurz vor Abschluß dieser Arbeit, Kenntnis von dem Inhalte einer ihm unzugänglichen Abhandlung: Joh. Petersen, *Grundprinciper for den infinitesimale Descriptivgeometri med Anvendelse paa Laeren om variable Figurer.* Inauguraldiss. Kjöb. 1897. Darnach hat Hr. Petersen den hier verwendeten Begriff zum Teil unter dem Namen Fluxion bereits eingeführt und in umfassender Weise zur Anwendung gebracht. Doch dürfte ihm ein großer Teil der in vorliegender Untersuchung gewonnenen Ergebnisse fehlen. — Einer geschätzten Mitteilung des Herrn Prof. Dr. R. Mehmke verdankt Verfasser ferner den Hinweis auf eine hierhergehörige Stelle in: G. Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale,* Torino 1887. Daselbst ist der hier allgemein verwertete Gedanke für den Fall des Punktes, der Geraden und der Ebene durchgeführt.

2) S. Schadwill, Das Gliedervierseit als Grundlage der ebenen Kinematik. Verhandl. d. Vereines zur Förderung d. Gewerbefleißes in Preußen. 1876. Jahrg. 55. S. 378 ff. § 4. Burmester, Lehrbuch der Kinematik I. Leipzig 1888. S. 12 f.

Differentiation der ersteren; das Analoge für die geometrischen Elemente leistet die Bestimmung ihrer Charakteristiken. Damit sind zugleich die Gebiete abgegrenzt, die in unserer Untersuchung einerseits der Rechnung, andererseits der geometrischen Konstruktion zufallen. Niemals betrachten wir es als unsere Aufgabe, ein errechnetes Resultat in eine Konstruktion umzusetzen.

Eine Erweiterung der hier dargelegten Betrachtungsweise für räumliche Gebilde, sowie eine Spezialisierung derselben für das Gebiet der algebraischen Kurven müssen besonderen Arbeiten vorbehalten bleiben.[1])

I. Zwei Phasen des veränderlichen Systems. Synthetische Kurvendefinition erster Art.

1. Wir betrachten eine Reihe von Punkten, Geraden und beliebigen Kurven (Punkt- oder Geradenörtern), nennen jedes dieser Gebilde ein Element und ihre Gesamtheit ein System. Von jedem Elemente nehmen wir an, es durchlaufe, sich stetig verändernd, eine einfache Mannigfaltigkeit von Phasen und zwischen allen Elementen bestehe ein derartiger Zusammenhang, daß mit der jeweiligen Phase eines einzigen unter ihnen eine oder mehrere entsprechende Phasen jedes andern bestimmt sind. Ist die Beziehung zwischen den zusammengehörigen Phasen eine mehrdeutige, so setzen wir voraus, sie lasse sich durch Zerfällung in Zweige auf eine Anzahl eindeutiger Zuordnungen zurückführen, sodaß wir unsere Betrachtungen auf die letzteren beschränken können. Ein System, das den ausgesprochenen Bedingungen genügt, wollen wir im allgemeinsten Sinne *zwangläufig veränderlich* nennen.

Analytisch würde sich das folgendermaßen darstellen. Die Punkte des Systems seien durch ihre Koordinaten

(1) $$x_1, y_1; \quad x_2, y_2, \ldots$$

bezüglich eines unveränderlichen, in der Ebene festgelegten Achsensystems bestimmt, die übrigen Elemente durch ihre Gleichungen in bezug auf dasselbe Koordinatensystem:

(2) $$f_1(x, y) = C_1, \quad f_2(x, y) = C_2, \ldots$$

Dann sind alle x_i und y_i von (1), sowie alle C_i von (2) stetige Funktionen einer unabhängigen Variablen t

(3) $$x_i = X_i(t), \quad y_i = Y_i(t), \quad C_i = F_i(t).$$

1) Bei Ausführung vorliegender Arbeit ist mir von seiten meines verehrten Lehrers Herrn Prof. Dr. E. Müller in Wien vielfache Förderung zuteil geworden, die mich zu besonderem Danke verpflichtet.

Mit der Annahme irgend eines x_i, y_i oder C_i ist aus der entsprechenden Gleichung (3) das t, daher weiterhin jedes andere x_i usf. bestimmt. Hinsichtlich einer etwaigen Mehrdeutigkeit der Funktionen (3) muß wieder in analoger Weise die Auflösbarkeit in Zweige, oder was dasselbe ist, Eindeutigkeit innerhalb begrenzter Gebiete zur Voraussetzung gemacht werden.

Greift man zwei beliebige Phasen S und S_1 des Systems heraus, so bestimmen zunächst entsprechende Punkte p[1]) und p_1 sowie entsprechende Gerade G und G_1 der beiden Phasen Verbindungsgerade pp_1 und Schnittpunkte GG_1 und mit diesen gewisse Längen und Winkelgrößen $\overline{pp_1}$ und $\overline{GG_1}$. Nähert sich die zweite Phase unaufhörlich der ersten, so nähern sich — von singulären Fällen, die wir aus unserer Betrachtung ausschließen, abgesehen — Verbindungsgerade und Schnittpunkte gewissen Grenzlagen und die Verhältnisse jener Längen und Winkelgrößen bestimmten Grenzwerten. Wir konstruieren nun für jeden Punkt p, q ... auf der *Grenzlage* der Geraden pp_1, qq_1 ... je einen Punkt p', q' ... und für jede Gerade G, H ... durch die *Grenzlage* des Punktes GG_1, HH_1 ... eine Gerade G', H' ... derart, daß die Verhältnisse, welche die Strecken $\overline{pp'}$, $\overline{qq'}$ ... und die trigonometrischen Tangenten der Winkel $\overline{GG'}$, $\overline{HH'}$ ... miteinander bilden, den Grenzwerten der entsprechenden Verhältnisse von $\overline{pp_1}$, $\overline{qq_1}$ ... $\overline{GG_1}$, $\overline{HH_1}$ ... gleichkommen.[2]) Alle Elemente sind nach der Wahl eines einzigen unter ihnen eindeutig bestimmt. Wir nennen p' und G' beziehentlich die *Charakteristiken von p und G*[3]) und bemerken, daß durch die Angabe einer Phase aller Punkte und Geraden des Systems sowie der zugehörigen Charakteristiken zwei aufeinanderfolgende Phasen dieser Elemente vollkommen charakterisiert sind. Offenbar ist die Gerade pp' Tangente an den Ort (p) der Phasen von p und GG' der Berührungspunkt von (G) mit seiner Tangente G.

Es seien C und C_1 (Fig. 1) zwei Phasen einer dem System angehörigen Kurve und m ein Punkt von C. Wir legen durch m einen beliebigen Strahl A, den wir uns in der Ebene unveränderlich denken, und beschränken unsere Betrachtungen, um Mehrdeutigkeiten auszuschließen, auf einen solch kleinen Teil von C in der Umgebung von

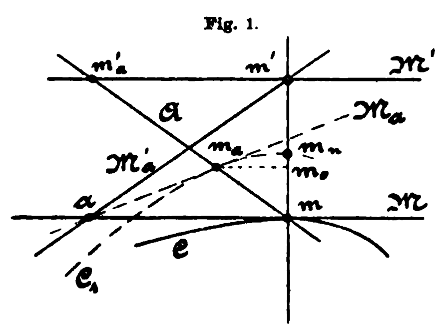
1) Kleine Buchstaben bezeichnen im folgenden in der Regel Punkte, große Buchstaben Gerade. Immer bedeutet die Aneinanderreihung ab die Verbindungsgerade, $\overline{ab}$ die Entfernung der Punkte a und b; AB den Schnittpunkt, $\overline{AB}$ den Winkel von A und B. Der in Klammer gesetzte Buchstabe (E) eines Elementes bezeichnet den Ort, bezw. den Inbegriff aller Phasen von E.

2) Der Fall, daß der Schnittpunkt GG' im Unendlichen liegt, wird später seine Erledigung finden.

3) Petersen benützt nur p' als „*Fluxion des Punktes p*". Vgl. Jahrbuch a. a. O. S. 505. — Peano, a. a. O. S. 321 nennt pp' „*Derivierte von p*".

m, daß weitere Schnittpunkte von C und A nicht mehr in denselben fallen. Fassen wir jetzt eine infinitesimale Phasenänderung von C ins Auge, so gibt es nur *einen* unendlich nahe an m gelegenen Punkt von A, der zugleich der Nachbarphase von C angehört. Es läßt sich daher im allgemeinen aus der Mannigfaltigkeit der Phasen von C ein derartig begrenztes, die Ausgangsphase selbst enthaltendes Gebiet herausheben, daß innerhalb derselben zwischen den Phasen von C und den Punkten von A eine eindeutige stetige Zuordnung besteht. Eine solche Zuordnung gestattet aber, den jeweiligen Schnittpunkt m_a von A und C als Element des zwangläufigen Systems aufzufassen, und damit ist nach dem Vorangehenden auch eine Charakteristik m_a' für denselben bestimmt, die notwendigerweise auf A liegen muß. Wir können auch sagen, durch den Strahl A werde dem Punkte m von C ein Punkt m_a von C_1 zugeordnet, und dieser Zuordnung von a entspreche die Charakteristik m_a' von m. Läßt man A das ganze Büschel in m durchlaufen, so erhält man eine Reihe von Punkten m_a', m_b' . . ., deren Gesamtheit für das Verhalten von C in der Umgebung von m und in zwei aufeinanderfolgenden Phasen charakteristisch ist. Wir wollen nun zeigen, welches der Ort der m_a' ist, wenn A das Strahlenbüschel in m beschreibt. Bezeichnet man mit M und N Tangente und Normale von C in m und zieht $m_a m_0 \parallel M$, so erkennt man, daß bei unbegrenzter Annäherung von C_1 an C mit $\overline{m m_a}$ zugleich $\overline{m_a m_0}$, sowie der Winkel $\overline{M M_a}$ der Tangenten in m und m_a von gleicher Ordnung unendlich klein werden. Daher ist die Entfernung des Punktes m_0 von $M_a N$ und umsomehr $\overline{m_0 m_n}$ den genannten Größen gegenüber von höherer Ordnung unendlich klein, d. h. m_a *nähert sich der Lage* auf der durch m_n zu M gezogenen Parallelen. Da nun die Punkte m_a' den m_a in der Grenze ähnlich liegen, so folgt der Satz: *Die Charakteristiken eines Punktes m einer Kurve C für alle möglichen Zuordnungen liegen auf einer Parallelen M' zur Tangente M an C in m.*[1]) M' heißt die *Charakteristik von C für den Punkt m.*[2])

Fig. 1.



---

1) Eine analytische Ableitung dieses Satzes unter Verwendung des Geschwindigkeitsbegriffes gibt G. Scheffers, Anwendung d. Differ. u. Integr.-Rechnung auf Geometrie. 1. Bd. Leipzig 1901. S. 86.

2) Die „*Fluxionslinie*" von Petersen. Vgl. Jahrbuch a. a. O. S. 506. — Für den Fall, daß C eine Gerade ist, heißt M nach Peano a. a. O. S. 321 „*Polare von C in m.*"

Es seien wieder C und C_1 (Fig. 1) zwei Phasen einer Kurve, die jetzt als das Erzeugnis der Tangenten M aufgefaßt werde. Durch eine der vorigen ganz ähnliche Betrachtung gelangt man zu folgender Auffassung. Jeder Punkt a von M ordnet dieser Tangente eine Tangente M_a von C_1 zu, und jeder solchen Zuordnung a entspricht eine Charakteristik M'_a von M, die durch a hindurchgeht. In derselben Weise wie früher erkennt man, daß beim Übergange zu unendlich benachbarten Phasen die Entfernung des Punktes m_n von $M_a N$ gegenüber $\overline{MM_a}$ usw. verschwindet, daß daher die M_a sich *der Lage auf dem Büschel* mit m_n als Scheitel *nähern*. Da die M'_a den M_a in der Grenze affin liegen, kann man den Satz aussprechen: *Die Charakteristiken einer Tangente M einer Kurve C für alle möglichen Zuordnungen gehen durch einen Punkt m' auf der Normalen N von C in m. m'* ist die *Charakteristik von C für ihre Tangente M.*

Da das Ähnlichkeitsverhältnis im ersten und das Affinitätsverhältnis im zweiten Falle einander gleich sind, so folgt, daß für das Linienelement Mm einer Kurve m' und M' vereinigt liegen. Wir werden die Strecke $\overline{mm'}$ gleich dem Abstande der Geraden M und M' auch die *Charakteristik der Kurve C für ihr Linienelement mM nennen.*

2. Die Charakteristiken einer Kurve (m) für alle ihre Punkte bilden ihr *charakteristisches Geradengebilde* (M'), die einer Kurve (M) für alle ihre Tagenten das *charakteristische Punktgebilde* (m'). Aus den gemeinsamen Tangenten von (m) und (M'), sowie den gemeinsamen Punkten von (M) und (m'), erhält man die Linienelemente, in denen (m) bezw. (M) *ihre Enveloppe berührt.* Die beiden charakteristischen Örter einer Kurve C bezeichnen wir als deren *Charakteristiken C'.* Wie die Verbindungsgerade pp' die Tangente an (p), der Schnittpunkt GG' den Berührungspunkt für (G) lieferte, so stellen die gemeinsamen Elemente (Punkte oder Geraden) CC' die *Grundpunkte*, bezw. *Grundtangenten* jener *linearen Schar* (Büschel oder Reihe) dar, mit der die Schar (C) in erster Annäherung *als augenblicklich zusammenfallend* angesehen werden kann.[1])

Für einen Punkt p als degeneriertes *Punktgebilde* ist das Büschel um p' der charakteristische *Geradenort*, für eine Gerade G als degeneriertes *Tangentengebilde* die Punktreihe G' der charakteristische *Punktort.* Die duale Charakteristik besteht im ersten Falle aus den Punkten des

1) Hierbei ist von dem Falle abgesehen worden, daß eine Charakteristik M' von C für deren Punkt m die Kurve C in einem andern Punkt als m berühren kann. Eine strenge mathematische Durchführung der in diesem Abschnitte angedeuteten Untersuchung würde eine Beschränkung auf algebraische Kurven erfordern.

über pp' als Durchmesser errichteten *Kreises*, im zweiten aus den Strahlen des *Parallelbüschels* der Richtung G. Als Charakteristik einer Geraden G, die zu ihrer Nachbarphase G_1 parallel ist, erscheint demgemäß eine zu G parallele Gerade G', deren Abstand $\overline{GG'}$ von G durch den Grenzwert der Verhältnisse bestimmt wird, die $\overline{GG_1}$ mit den früher betrachteten Längen $\overline{pp_1}$, $\overline{qq_1}$ usf. bildet.

Die Charakteristik M' einer Kurve C für einen ihrer Punkte m kann zugleich aufgefaßt werden als Charakteristik der Tangente M für den ihr angehörigen Punkt m; und in gleicher Weise der Punkt m' als Charakteristik des Punktes m für die durch ihn gehende Gerade M. Haben daher zwei Kurven C und E *dauernd* ein Linienelement Mm gemeinsam, so fallen auch ihre Charakteristiken $m'M'$ für mM zusammen. Ist nun eine Kurve C allgemein als Einhüllende eines beliebigen Elementes E erzeugt, und trifft man zwischen irgend einem E einerseits und den unendlich benachbarten Elementen E_a, E_b ... der Nachbarphase C_1 von C andrerseits eine *beliebige Zuordnung* a, b ..., so haben alle so entstehenden Charakteristiken E'_a, E'_b ... von E *jene Punkte oder Geraden gemein*, welche den Geraden und Punkten entsprechen, in denen E seine Einhüllende C berührt, bilden also ein Büschel bezw. eine Reihe. Es ist dies die Verallgemeinerung der in 1 für Punkte und Gerade als Elemente E bewiesenen Sätze. Wir bezeichnen demgemäß als *Charakteristik einer Kurve C für ihr Element E* jede der beiden linearen Scharen E'_a, E'_b ... oder was auf dasselbe hinausläuft, deren Grundpunkte, bezw. Grundtangenten. Die Gesamtheit der letzteren für alle Elemente E von C bildet dann wieder einen der beiden charakteristischen Örter, die wir oben mit C' bezeichnet haben.

Die bisher betrachteten *rein geometrischen* Elemente des veränderlichen Systems führen mittelbar zur Behandlung anderer, uneigentlicher oder *metrischer Elemente*. Es sind dies zunächst die durch Punkt- oder Geradenpaare des Systems bestimmten *Längen und Winkel*. Faßt man zwei Phasen eines solchen Paares ins Auge, so erhält man eine Größendifferenz, die bei unendlicher Annäherung der Phasen aneinander zugleich mit den früher betrachteten Größen $\overline{pp_1}$ ... $\overline{GG_1}$ ... von gleicher Ordnung unendlich klein wird und mit ihnen Verhältnisse von bestimmten endlichen Grenzwerten bildet. Als Charakteristiken der metrischen Elemente definieren wir *Größen*, also wieder metrische Elemente, deren *Verhältnisse* zu den bereits definierten Größen $\overline{pp'}$ ... tg $\overline{GG'}$ ... jenen *Grenzwerten* gleichkommen.

Beschreiben beide Punkte eines Paares dieselbe Kurve, so bestimmen sie auf dieser eine veränderliche *Bogenlänge*, deren Charakteristik in gleicher Weise wie die der anderen metrischen Elemente

definiert wird. Man erkennt den Zusammenhang der hier gegebenen Definitionen mit jenen der Differentialrechnung.

Allgemein können wir sagen, daß die Charakteristik E' eines beliebigen Elementes E mit E zusammen ein *Äquivalent für zwei unendlich benachbarte Phasen* von E bildet. Aus dieser Auffassung ergibt sich der für das folgende grundlegende Satz, daß *die Charakteristik eines Elementes mit den Charakteristiken seiner Bestimmungsstücke gegeben ist.*

Betrachtet man ein veränderliches Element *ohne* Rücksicht auf seine Zugehörigkeit zu einem zwangläufigen System, so verliert seine Charakteristik der Definition gemäß im Falle des metrischen Elementes *gänzlich*, im Falle des eigentlichen *teilweise* ihre Bedeutung. Unter der Charakteristik eines *unabhängig veränderlichen* (eigentlichen) Elementes E hat man sonach nur jenes Gebilde zu verstehen, das im allgemeinen mit EE' bezeichnet werden kann, also für einen Punkt p die Tangente pp', für eine Gerade G den Berührungspunkt GG', für eine beliebige Kurve C die gemeinsamen Punkte bezw. Tangenten CC'.

Wir gehen nun daran, die gewonnenen Begriffe auf die Lösung der allgemeinen Probleme der *Infinitesimalgeometrie* anzuwenden.

3. Gegeben sei eine Reihe zunächst unveränderlicher Elemente bestehend aus Punkten, Geraden, beliebigen Kurven, Längen- und Winkelgrößen F_1, F_2 ... F_{m-1} und E_1. Alle diese Elemente mögen nach einem ebenfalls gegebenen Gesetze in irgend welcher Weise andere, neue Elemente bestimmen, diese mit den früheren zusammen wieder weitere usf., bis ein einziges letztes Element E_n als Endergebnis der (ihrer Zahl nach endlichen) wiederholten Operationen erscheint. Unterwirft man nun *eines* der ursprünglich gegebenen Elemente, etwa E_1, fortgesetzter stetiger Veränderung, indem man es eine einfache Mannigfaltigkeit von Phasen durchlaufen läßt, während das Operationsgesetz erhalten bleibt, so ändern sich im allgemeinen alle späteren, abgeleiteten Elemente E_2, E_3 ... und bilden mit E_1 zusammen ein *zwangläufig veränderliches System* im Sinne unserer Betrachtung. Ist E_n ein eigentliches (nicht metrisches) Element, so erzeugt es allgemein eine Kurve A, die durch das Operationsgesetz definiert ist. Wir nennen eine derartige Darstellungsweise einer Kurve eine *synthetische Definition erster Art* und die Elemente E_1, E_2 ... E_n das *erzeugende System* derselben. Bestimmt wird die Kurve durch die Elemente F_1, F_2 ... F_m, wenn F_m der Ort der Phasen von E_1 ist. Jedes F kann zugleich als Ort der Phasen eines veränderlichen E des Systems angesehen werden.

Die Anwendung der oben gewonnen Begriffe auf den vorliegenden Fall ergibt nun Folgendes. Wenn für E_1 als unabhängig-veränderliches

Element die Charakteristik E_1' bekannt ist, so läßt sich die Charakteristik des die Kurve erzeugenden Elementes E_n, also insbesondere für einen Punkt die Tangente an seine Bahn, für eine Gerade der Berührungspunkt mit seiner Einhüllenden, durch wiederholte Lösung einer *Grundaufgabe* von immer derselben Form ermitteln: *Es ist die Charakteristik eines Elementes aus den Charakteristiken seiner Bestimmungsstücke zu finden.* Die Formen, in denen die im erzeugenden Systeme aufeinanderfolgenden Elemente einander bestimmen, bilden das Analogon zu den einfachen Funktionen der Analysis, und es handelt sich jetzt darum, die Grundaufgabe für einzelne Bestimmungsformen tatsächlich zu lösen. Um jedoch zugleich einen Überblick über die Anwendbarkeit des Verfahrens zu erhalten, wollen wir zunächst eine für unsere Zwecke taugliche Einteilung der Kurven auf Grundlage ihrer Definitionen vornehmen.

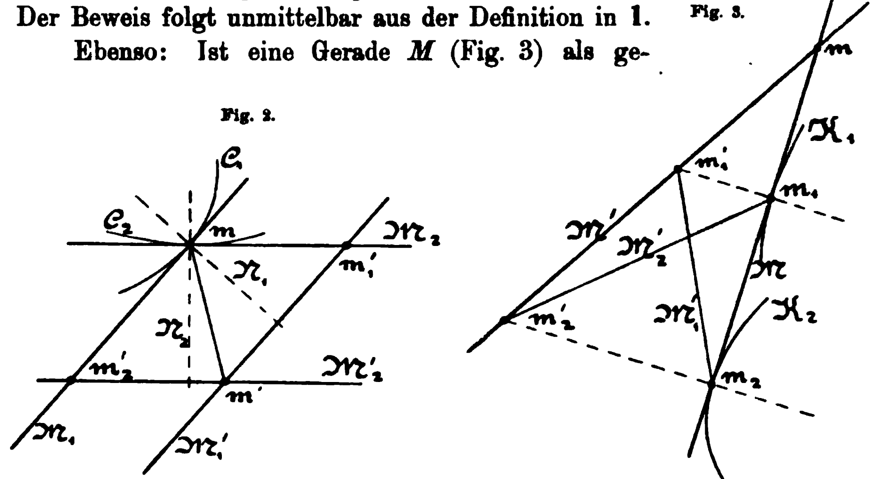
Wir sagen, eine Kurve A sei *mit Hilfe der Kurven* $B_1, B_2 \ldots$ *konstruierbar*, wenn das erzeugende System der A außer Punkten und Geraden keine anderen Kurven als solche der Gruppe B, und die Definition keine anderen Bestimmungsformen als die folgenden enthält: Jeder Punkt bezw. jede Gerade ist als gemeinsames Element zweier Kurven, jedes metrische Element durch ein Punkte- oder Geradenpaar, jede Kurve B durch gewisse ihr eigentümliche *normale Bestimmungsstücke* gegeben. Der gewöhnliche Begriff der Konstruierbarkeit würde noch eine Einschränkung bezüglich der festen Bestimmungsstücke von A und der Art des unabhängig veränderlichen Elementes erfordern, die wir jedoch fortlassen können. Denkt man sich unter B den Kreis, so fallen die mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Kurven unter den hier aufgestellten Begriff; dabei treten als normale Bestimmungselemente des Kreises Mittelpunkt und Halbmesser auf. Naturgemäß ist immer der Fall schon eingeschlossen zu denken, daß eine B unmittelbar durch andere als die normalen Stücke gegeben erscheint, aus denen sich aber mittelbar die letzteren durch Konstruktionen, die wieder nur aus B usw. bestehen, ableiten lassen.

Wir sagen ferner, *eine Kurve A sei mit Hilfe der Kurven* $B_1, B_2 \ldots$ *explizite darstellbar*, wenn zu den Bestimmungsformen, die bei den konstruierbaren Kurven vorkommen, noch die eine hinzutritt: Ein metrisches Element y des erzeugenden Systems ist aus anderen bereits gefundenen ebensolchen Elementen durch eine explizite Gleichung von der Form $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ abgeleitet, wobei f eine differenzierbare Funktion ist. Bedeutet B wieder den Kreis, so gehören zu den A die durch explizite Gleichungen in Parallel- oder Polarkoordinatensystemen gegebenen Kurven usf. Alle bisher genannten Bestimmungsformen

nennen wir *explizite* und wird in den folgenden beiden Abschnitten die Lösung der Grundaufgabe für dieselben gebracht. In Abschnitt 7 behandeln wir schließlich einen besonderen, wichtigen Fall der *impliziten Bestimmungsform* eines Elementes, der in folgendem besteht. Ein Punkt oder eine Gerade ist als gemeinsames Element von n Kurven ($n \geq 2$) gegeben, von denen jede eine einfach unendliche Schar durchläuft, und deren zusammengehörige Phasen durch eine Bedingung miteinander verknüpft sind. Eine solche Bedingung kann etwa in einer Gleichung zwischen den n Parametern der Kurvenscharen oder darin bestehen, daß zwei Kurven A und B, die aus jenen n Gebilden ableitbar sind, einander fortdauernd berühren sollen usf.

4. Ist ein Punkt m (Fig. 2) als gemeinsamer Punkt zweier Kurven C_1 und C_2 gegeben, so ist seine Charakteristik m' der *Schnittpunkt der Charakteristiken* M_1' und M_2' von C_1 und C_2 für m. Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition in **1**.

Ebenso: Ist eine Gerade M (Fig. 3) als ge-



meinsame Tangente zweier Linien K_1 und K_2 gegeben, so ist ihre Charakteristik M' *die Verbindungsgerade der Charakteristiken* m_1' und m_2' von K_1 und K_2 für M.[1])

Bleibt im ersten Falle die eine Kurve C_1 unverändert, so ist M_1' mit der Tangente M_1 identisch und m' fällt nach m_2' (Fig. 2). Ebenso

1) Während die zweite der beiden dualen Aufgaben meines Wissens noch nirgends behandelt wurde, bildete die erste den Kernpunkt aller auf eine allgemeine konstruktive Lösung des Tangentenproblems gerichteter Bestrebungen. Derartige Versuche gehen (nach M. Cantor, Vorles. ü. Geschichte d. Mathematik. Leipzig, B. II, 1900, S. 876ff. u. B. III. 1901, S. 184ff.) auf Roberval (1602—1675) und Barrow (1630—1677) zurück. In neuerer Zeit hat Chr. Wiener, Lehrb. d. darst. Geometrie, I. B., Leipzig 1884 S. 170f. ein Verfahren entwickelt, das in jedem einzelnen Falle die Vornahme von Grenzbetrachtungen fordert. Beispiele

kommt, wenn nur C_1 veränderlich ist, m' nach m_1' auf der Tangente M_2 an C_2 zu liegen, und man erkennt, daß sich die Strecke mm' als geometrische Summe von mm_1' und mm_2' ergibt. Analog ist im zweiten Falle die Ordinate von M', (Fig. 3) gemessen normal zu M, gleich der Summe der entsprechenden Ordinaten der Geraden M_1' und M_2', die einer partiellen Änderung von K_1 bezw. K_2 allein als Charakteristiken für M entsprechen. Die hier auftretende Erscheinung ist ein spezieller Fall eines allgemeinen, später zu behandelnden Gesetzes.

Durch Spezialisierung der vorhergehenden Aufgaben erhält man die Charakteristik m' des *Schnittpunktes* m (Fig. 4) *zweier Geraden* A und B als Schnittpunkt der beiden Charakteristiken A_m' und B_m' von A und B für m. Gleichzeitig erkennt man durch eine einfache Infinitesimalbetrachtung, daß die *Charakteristik des Winkels* $\overline{AB}$

Fig. 4.

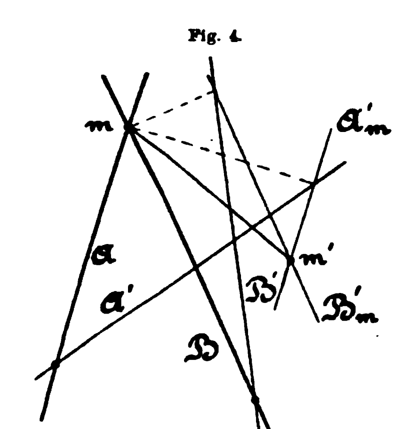
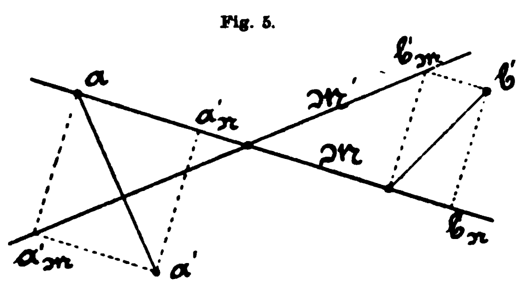


Fig. 5.



durch die algebraische Summe $-\operatorname{tg}\overline{AA'} + \operatorname{tg}\overline{BB'}$ gegeben ist, beide Winkel im Sinne der in betracht kommenden Drehung von A nach B positiv, im entgegengesetzten negativ gerechnet. Dual ergibt sich die Charakteristik M' (Fig. 5) der *Verbindungsgeraden* M *zweier Punkte* a und b als Verbindungsgerade der Charakteristiken a_M' und b_M' von a und b für ihre Gerade M, sowie die *Charakteristik der Länge* $\overline{ab}$ als algebraische Summe $-\overline{aa_N'} + \overline{bb_N'}$.

Die Charakteristik der Bogenlänge $\widehat{ab}$ ist $-\overline{aa'} + \overline{bb'}$ bei analoger Festsetzung der Zeichen (Fig. 6).

Die gegebenen Ausdrücke für die Charakteristiken der metrischen Elemente bilden den wesentlichen Inhalt der „*formules fondamentales*“,

---

dazu gibt Rohn u. Papperitz, Lehrb. d. darst. Geometrie, Leipzig 1901, I. B., 6. Kap. Für starre Kurven enthält viele Konstruktionen L. Burmester, Lehrb. d. Kinematik I. Leipzig 1884, 1. Kap. Vgl. ferner v. Mangoldt in der Encykl. d. mat. Wiss. III. D. 1, 2 (6) und Schönfließ ebenda IV. 3. (9). Petersen gibt eine mit der hier gebrachten identische Lösung. (Vgl. Jahrb. f. Fortschr. d. Math., 1897, S. 506.)

die zuerst Mannheim[1]) und nach ihm d'Ocagne[2]) aufgestellt und zur Grundlage der ganzen Infinitesimalgeometrie der Ebene gemacht haben. Sie reichen auch tatsächlich zur Bewältigung aller auf metrische Beziehungen gegründeten Aufgaben hin. Sind etwa (Fig. 7) a und b zwei Punkte, deren Abstand *konstant* ist, und a_3, b_3 die Projektionen von a' und b' auf ab, so ist $\overline{aa_3} = \overline{bb_3}$. Soll der Punkt c von a und b unveränderliche Entfernung haben, so ist seine Charakteristik dadurch bestimmt, daß $\overline{cc_2} = \overline{aa_2}$ und $\overline{cc_1} = \overline{bb_1}$ ist. Man erkennt leicht, daß die in a, b, c errichteten Normalen zu aa', bb' und cc' durch einen Punkt 0 gehen, daß die von O auf A, B, C gefällten Lote

Fig. 6.

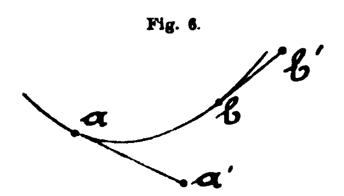
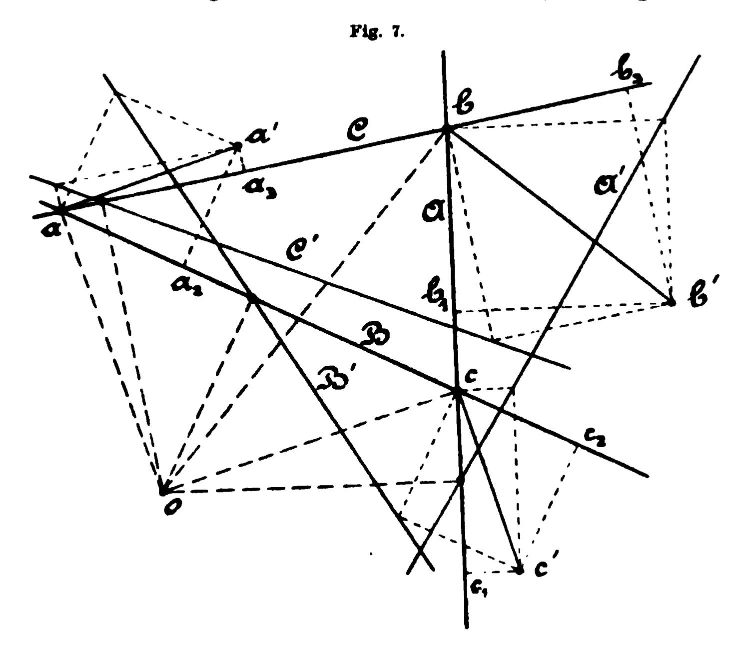


Fig. 7.



die Berührungspunkte AA', BB', CC' bestimmen, und daß A', B', C' miteinander dieselben Winkel einschließen wie A, B, C.[3]) Wir werden von diesen bekannten Sätzen in der Folge Gebrauch machen.

Ist das metrische Element y aus den metrischen Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch die Gleichung
$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

1) A. Mannheim, Principes et développements de géométrie cinématique. Paris 1894. S. 44 ff.

2) M. d'Ocagne, Cours de géométrie descriptive et de géométrie infinitésimale. Paris 1896. S. 258 ff.

3) Vgl. den ähnlichen Gedankengang bei d'Ocagne, a. a. O. S. 267.

abgeleitet, so folgt durch Differentiation die Charakteristik von y:

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2' + \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n',$$

wobei $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ die Charakteristiken der Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind.

Es soll hier noch folgendes bemerkt werden. Gehört die Kurve C_1 (Fig. 2) bezw. K_1 (Fig. 3) zu den unveränderlichen Bestimmungsstücken F von A, so bedarf es zur Ermittelung von m' bezw. M' bezüglich C_1 oder K_1 nur der Kenntnis der Tangente M_1 in m. bezw. des Berührungspunktes m_1 in M. Allgemein kann man sagen, daß zur Behandlung des *Tangentenproblems*[1]) für jedes unveränderliche Bestimmungsstück F von A die Angabe zweier benachbarter Phasen jenes Elementes E erforderlich ist, als dessen Ort F erscheint, oder mit anderen Worten die Angabe der Charakteristik von E, das als *unabhängig* veränderliches Element betrachtet wird. Dies stimmt auch damit überein, daß prinzipiell jedes der E als Ausgangspunkt für die Erzeugung von A gewählt werden kann; es ändern sich dann nur die in der Definition auftretenden Bestimmungsformen.

5. Es erübrigt nun noch, für die letzte der expliziten Bestimmungsformen eines Elementes die Lösung der Grundaufgabe anzugeben: Die Charakteristik einer veränderlichen Kurve B aus den Charakteristiken ihrer normalen Bestimmungsstücke zu ermitteln. Wir bezeichnen die letzteren jetzt mit $F_1, F_2 \ldots$ und wollen sagen, eine Kurve B sei *aus ihren normalen Bestimmungsstücken explizite darstellbar*, wenn die $F_1, F_2 \ldots$ die festen Elemente sind, welche gemäß dem in **3** Gesagten einer expliziten Definition von B entsprechen. Dann beweisen wir den Satz, daß die eben ausgesprochene Grundaufgabe für eine Kurve B lösbar ist, *sobald B aus seinen normalen Bestimmungsstücken mit Hilfe der Kurven $C_1, C_2 \ldots$ explizite dargestellt werden kann, und die Aufgabe für die C als gelöst angesehen wird.*

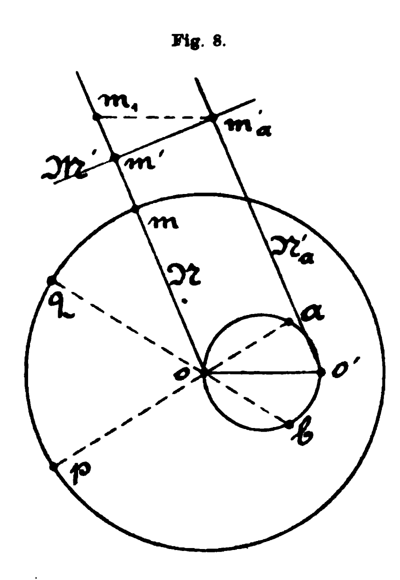
Es seien $E_1, E_2, \ldots E_n$ zusammengehörige Phasen der veränderlichen Elemente des Systems, von denen speziell E_n den Ort B beschreibt. E_1 sei das unabhängig-veränderliche Element, und F_n der Ort von E_1. Nun werden die $F_1 \ldots F_n$ einer Änderung unterworfen, die ihnen die gegebenen Charakteristiken $F_1', \ldots F_n'$ erteilt; man soll die Charakteristik der erzeugten Kurve B für ihr Element E_n ermitteln. Zu diesem Zwecke denken wir uns zwischen den Elementen E_1 der zwei aufeinanderfolgenden Phasen von F_n eine beliebige Zuordnung a

1) Unter Tangentenproblem verstehen wir hier den Inbegriff aller jener Aufgaben, die ein einmaliges Eingehen in Infinitesimalbetrachtungen erfordern, die also, analytisch gesprochen, durch einmalige Differentiation gelöst werden.

getroffen, d. h. wenn E_1 ein Punkt ist, so wählen wir E'_{1a} auf der gegebenen Charakteristik E'_1 von F_n für E_1 usf. Da nun in jeder Phase alle folgenden Elemente $E_2, E_3 \ldots E_n$ sukzessive aus E_1 und den $F_1, F_2 \ldots F_{n-1}$ *explizite* ableitbar sind, so können der Voraussetzung gemäß (wonach für alle E die Grundaufgabe gelöst, für alle F Tangente usw. bekannt ist) aus den gegebenen Charakteristiken $F'_1 \ldots$ und der gewählten E'_{1a} die Charakteristiken $E'_{2a} \ldots E'_{na}$ ermittelt werden. Mit E'_{na} aber haben wir für E_n eine Charakteristik gefunden, die einer gewissen Zuordnung a zwischen den erzeugenden Elementen E_n von B in zwei Nachbarphasen entspricht. Ist etwa E_n ein Punkt, so liegt E'_{na} auf der gesuchten Charakteristik E'_n von B für E_n. Eine Wiederholung des Verfahrens bei anderer Wahl der Zuordnung liefert eine zweite Charakteristik E'_{nb}, die mit E'_{na} zusammen die lineare Schar bestimmt, die wir in 2 als Charakteristik E'_n von B für E_n bezeichnet haben. Statt den Vorgang für eine zweite Zuordnung durchzuführen, genügt es auch, die Linienelemente, die E_n mit B gemein hat, aufzusuchen. Wenn z. B. E_n ein Punkt ist, so braucht man außer E'_{na} noch die Richtung der Tangente an B in E_n.

Um jetzt einen Überblick über die Tragweite der gewonnenen Ergebnisse zu erhalten, betrachten wir ein einfaches hierhergehöriges Beispiel, den *Kreis*. o (Fig. 8) sei der Mittelpunkt, $r = \overline{om}$ der Radius. o' die Charakteristik von o, und $r' = \overline{mm_1}$ die von r. Ferner sei $om \equiv N$ das unabhängig-veränderliche Element, dessen Ort der Punkt o ist. Wir wählen, entsprechend einer Zuordnung im unendlich fernen Punkte von N, als seine Charakteristik N'_a die durch o' gehende Parallele. Die zugehörige Charakteristik m'_a von m ergibt sich auf Grundlage der Definitionsbestimmung, daß $\overline{om} = r$ ist, indem man durch m_1 die Parallele zu oo' zieht. Denn es muß die Charakteristik von $\overline{om}$, also $\overline{o'm'_a} - \overline{om} = r'$ sein. Die Normale zu N durch m'_a ist die gesuchte Charakteristik M' des Kreises K für den Punkt m. Man erkennt, daß (M') *ein Kreis* mit dem Zentrum in o' und dem Halbmesser $r + r'$ ist, der Ort (m') aller $m' \equiv NM'$ eine *Pascalsche Schnecke* mit dem über oo' als Durchmesser errichteten Kreise als Basis, o als Pol und $r + r'$ als Parameter. Die

Fig. 8.



Punkte p, q, in denen K seine Enveloppe berührt, findet man als Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an K und (M'), indem man $\overline{oa} = \overline{ob} = r'$ macht und die durch a und b gehenden Radien zieht.

Die Anwendung der früher entwickelten allgemeinen Betrachtungen auf den jetzt behandelten Spezialfall führt unmittelbar zu folgenden Sätzen. *Ist eine Kurve* als Ort von Punkten, Geraden oder Kreisen (p, G, K) *in der Weise definiert, daß sich alle Phasen des erzeugenden Elementes in steter Folge mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen*, so kann man mit *denselben* Hilfsmitteln die Tangente, bezw. die Berührungspunkte konstruieren. Ist die Reihe der einander aufeinanderfolgend bestimmenden Elemente p, G, K ein- oder mehrmals *unterbrochen*, und in den Lücken die Verbindung durch gegebene explizite Gleichungen zwischen linearen Größen des Systems hergestellt, so *hängt die Konstruierbarkeit* der Tangenten usw. nur mehr *von der Möglichkeit ab*, die aus der Differentiation jener Gleichungen sich ergebenden Größen wieder konstruktiv darzustellen. Schließlich können wir für alle explizite definierten Punkt-, Geraden- und Kreisörter, deren erzeugendes System beliebige Kurven enthält, die *sich in letzter Linie* auf p, G, K *zurückführen lassen*, die betreffenden Aufgaben mit Zirkel und Lineal lösen, sobald wir eine vollständige Phase aller in betracht kommenden Elemente als gezeichnet vorliegend voraussetzen. Damit ist wohl der größte Teil aller Erzeugungsformen algebraischer und transzendenter Kurven erschöpft. Es braucht nicht erst hervorgehoben zu werden, daß auch alle analytischen Kurvendefinitionen, insoweit sie in endlichen expliziten Gleichungen zwischen zwei Variablen bestehen, hierin einbezogen sind.

6. An die in Nr. 4 gegebene Konstruktion der Charakteristik des Schnittpunktes und der gemeinsamen Tangente zweier Kurven knüpfen wir die Ableitung eines allgemeinen Gesetzes, das nötigenfalls auch direkt aus Infinitesimalbetrachtungen gewonnen werden kann.

Es sei zunächst der veränderliche Punkt m in seiner jeweiligen Phase von n veränderlichen Elementen $E_1 \ldots E_n$ abhängig. Wir teilen diese Elemente in zwei Gruppen A und B, von denen wir voraussetzen, daß sie voneinander unabhängig seien, d. h. daß die Elemente, die zur Gruppe A gehören, mit denen der Gruppe B gar keine oder nur unveränderliche Bestimmungsstücke gemein haben. Dann wird die Rücksichtnahme auf die Elemente A allein die Lage des Punktes m auf eine Kurve C_1 beschränken und ebenso die bloße Rücksichtnahme auf B auf eine zweite Kurve C_2. Der Punkt m ist also wieder wie in 4 als gemeinsames Element zweier veränderlicher Kurven C_1 und C_2 bestimmt. Denkt man sich jetzt die Elemente B unverändert gelassen, während die A die ihnen zukommenden Änderungen erhalten,

so gewinnt man als Charakteristik des Punktes m einen auf der Tangente M_2 an C_2 gelegenen Punkt m_1', und analog bei partieller Änderung von B einen Punkt m_2' auf der Tangente M_1. Nach der schon in 4 gemachten Bemerkung findet sich die tatsächliche Charakteristik m' des Schnittpunktes m aus m_1' und m_2' durch Zusammensetzung von mm_1' und mm_2' nach dem *Parallelogrammgesetz*. Wir nennen kurz einen Punkt m', der sich in dieser Weise aus m, m_1' und m_2' ergibt, *die Summe von m_1' und m_2' bezüglich m*. Dann können wir sagen, die *totale* Charakteristik von m, herrührend von der Änderung sämtlicher Bestimmungsstücke, sei gleich der bezüglich m genommenen Summe der *partiellen* Charakteristiken, herrührend von den partiellen Änderungen der Gruppen A und B. Beachtet man nun, was als Charakteristik einer Kurve C für einen ihrer Punkte definiert wurde, so erkennt man, daß ein ähnlicher Satz auch für die Charakteristik von Kurven gilt, sobald man *als Summe zweier Paralleler M_1' und M_2' bezüglich eines Punktes m* eine Gerade M erklärt hat, deren Abstand von m gleich der algebraischen Summe der Abstände $\overline{mM_1'} + \overline{mM_2'}$ ist. Daraus folgt aber ferner, daß man die vorher betrachteten Gruppen A und B noch beliebig weiter spalten kann und dabei immer m' als Summe aller partieller Charakteristiken erhält, — sinngemäße Begriffsbestimmung für die Summe *mehrerer* Punkte vorausgesetzt. Es ist daher, vorläufig für Punkte und Punktörter, der Satz bewiesen: *Die totale Charakteristik eines Elementes ist gleich der Summe der partiellen Charakteristiken* genommen in bezug auf dieses Element selbst. Bedeutet (m) einen beliebigen Punktort, (M_1') und (M_2') partielle Charakteristiken desselben, so erhält man die totale Charakteristik (M'), indem man jedes Paar zusammengehöriger, paralleler Geraden M_1' und M_2' bezüglich des entsprechenden Punktes m in der angegebenen Weise summiert.

Naturgemäß kann man dieselbe Betrachtung auf die Gerade als veränderliches Element und beliebige Geradenörter anwenden. Denkt man sich in den Schnittpunkten zweier Geraden M_1' und M_2' mit einer festen Geraden M parallele Vektoren errichtet, deren Längen proportional den Werten von $\operatorname{tg} \widehat{MM_1'}$ und $\operatorname{tg} \widehat{MM_2'}$ sind, sucht den resultierenden Vektor und deutet ihn in entsprechender Weise als Gerade M', so nennen wir M' die *Summe von M_1' und M_2' bezüglich M*. Einfacher gelangt man zu M' auf Grund der Bemerkung, daß die Ordinaten von M' in bezug auf M als Achse sich durch Addition der zugehörigen Ordinaten von M_1' und M_2' ergeben. Als *Summe zweier Punkte m_1' und m_2' bezüglich einer auf $m_1'm_2'$ senkrechten Geraden M* hat man schließlich den Punkt m' anzusehen, dessen Abstand von M

gleich der algebraischen Summe der Abstände $\overline{m_1'M} + \overline{m_2'M}$ ist. Auf Grund dieser Definitionen gilt dann der oben ausgesprochene Satz nicht nur für veränderliche Gerade und Geradenörter, sondern mit Rücksicht auf die in 4 gegebenen Konstruktionen auch für die metrischen Elemente, sohin überhaupt für *alle* von uns in Betracht gezogenen Gebilde. Freilich entfällt für den Fall der metrischen Elemente der dann bedeutungslose Hinweis auf das Bezugselement der Summe.

Die Analogie unseres Satzes mit dem vom *totalen Differentiale* einer Funktion mehrerer Variabler ist unverkennbar.

7. Eine erfolgreiche Anwendung des vorangehenden Satzes geschieht bei der Lösung der Grundaufgabe für die in Nr. 3 erwähnte implizite Bestimmungsform eines Punktes oder einer Geraden.

Es sei der Punkt m in allen seinen Phasen gemeinsames Element der zusammengehörigen Phasen der n Kurven $C_1, C_2 \ldots C_n$. A und B seien zwei weitere Kurven, die aus den C_i mit Hilfe gegebener, unveränderlicher Elemente auf Grund eines Konstruktionsgesetzes explizite ableitbar sind und einander in allen ihren Phasen berühren sollen. Nach dem in 2 Gesagten müssen die beiden Gebilde A und B, von denen auch das eine in eine Gerade, das andere in einen Punkt ausarten kann, für ihr gemeinsames Linienelement *gleiche* Charakteristik haben. Wir bezeichnen für die Kurve C_i Tangente und Normale in m mit M_i und N_i, ferner ihre Charakteristik für M_i bezw. m_i mit m_i', M_i' und den Winkel, den C_i mit (m), also auch M_i mit $mm' \equiv M$ bildet, mit φ_i. Dann gilt, weil alle M_i' durch den Punkt m' gehen, also alle m_i' auf dem über mm' als Durchmesser errichteten Kreise liegen,

$$(1) \quad \overline{mm_1'} = \overline{mm'} \sin \varphi_1, \quad \overline{mm_2'} = \overline{mm'} \sin \varphi_2 \quad \ldots \quad \overline{mm_n'} = \overline{mm'} \sin \varphi_n.$$

Wir errichten nun zu jeder Tangente M_i in m in einem beliebigen, aber für alle gleichen, Abstand e eine Parallele M_i^0, und denken uns zunächst alle C_i bis auf C_1 unverändert und nur C_1 einer Änderung unterworfen, die ihr für m die Charakteristik M_1^0 erteilt und sie im übrigen ihrer gegebenen Schar angehören läßt. Dann entsprechen auf Grund des vorgeschriebenen Zusammenhanges zwischen den C_i einerseits und den A und B andererseits dieser Änderung gewisse Charakteristiken a_1' und b_1' von A und B für ihr gemeinsames Linienelement. Ebenso erhält man bei bloßer Variation von C_2 die Größen a_2', b_2' usf. Bei der tatsächlich vor sich gehenden Phasenänderung des Systems ist nun die Charakteristik von C_i für m nicht M_i^0, sondern M_i', daher die zugehörige partielle Charakteristik von A nicht a_i', sondern *proportional dem Produkte* $a_i' \cdot \overline{mm_i'}$. Die aufgestellte Bedingung, wonach die totale

Charakteristik von A jener von B (für das Berührungselement) gleich sein muß, liefert daher die Gleichung

$$(2)\qquad a_1' \cdot \overline{mm_1'} + a_2' \cdot \overline{mm_2'} + \cdots a_n' \cdot \overline{mm_n'} = b_1' \cdot \overline{mm_1'} + b_2' \cdot \overline{mm_2'} + \cdots b_n' \cdot \overline{mm_n'}.$$

Führt man die Werte aus (1) in diese Gleichung ein, so fällt $\overline{mm'}$ heraus, und es bleibt

$$(3)\qquad (a_1' - b_1') \sin \varphi_1 + (a_2' - b_2') \sin \varphi_2 + \cdots (a_n' - b_n') \sin \varphi_n = 0.$$

Trägt man daher die Strecken $(a_i' - b_i')$ in den Richtungen der Tangenten M_i in m auf, so gelangt man durch *geometrische Summierung* derselben *zu einem Punkte der gesuchten Tangente* M an (m). Man erkennt nun auch leicht, daß das vorstehende Verfahren überall Anwendung finden kann, wo aus der gegebenen Bedingung, welche die zusammengehörigen Phasen der C_i verknüpft, eine lineare Beziehung zwischen den Größen $\overline{mm_i'}$ gefolgert werden kann. Dies ist insbesondere der Fall, wenn zwischen den n Parametern der Kurvenscharen eine Gleichung

$$(4)\qquad f(p_1, p_2 \ldots p_i) = 0$$

gegeben ist. Man hat hier zunächst das Verhältnis zwischen der Charakteristik p_i' des Parameters und der Größe $\overline{mm_1'}$ zu ermitteln, was auf Grund der Definition der C_i möglich sein muß. Es sei

$$(5)\qquad \overline{mm_1'} = c_1 \cdot p_1', \quad \overline{mm_2'} = c_2 \cdot p_2' \ \ldots \ \overline{mm_n'} = c_n \cdot p_n'.$$

Durch Differentiation von (4) erhält man

$$(6)\qquad \frac{\partial f}{\partial p_1} p_1' + \frac{\partial f}{\partial p_2} \cdot p_2' + \cdots \frac{\partial f}{\partial p_n} p_n' = 0$$

und mit Berücksichtigung von (1) und (5)

$$(7)\qquad \frac{1}{c_1} \frac{\partial f}{\partial p_1} \sin \varphi_1 + \frac{1}{c_2} \frac{\partial f}{\partial p_2} \sin \varphi_2 + \cdots \frac{1}{c_n} \frac{\partial f}{\partial p_n} \sin \varphi_n = 0,$$

woraus zu ersehen ist, daß jetzt die Größen $\frac{1}{c_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}$ in der früher angegebenen Weise zu summieren sind.[1])

1) Den Keim zu der hier entwickelten Konstruktion für den Fall, daß die gegebene Bedingung die Form einer Gleichung hat, enthält nach M. Cantor, a. a. O. III. S. 153 ff. u. S. 258 ff. schon eine Abhandlung von Fatio de Duillier (1664—1753). Sie behandelt den speziellen Fall, in dem die Kurvenscharen Büschel konzentrischer Kreise sind. Die Methode ist von Poinsot auf Parallelscharen im allgemeinen ausgedehnt worden (Journ. de l'école polyt. 1806 cah. 13) und nach ihm benannt in zahlreiche Lehrbücher übergegangen. Vgl. Koenigs, Leçons de cinématique, Paris 1897, S. 88 ff., Scheffers, a. a. O. S. 86. Hierher gehören auch einige Konstruktionen von d'Ocagne a. a. O. S. 268 ff., der auch einen dualen Fall behandelt (S. 277 f.).

Die ganze Untersuchung kann fast unverändert auf den dualen Fall übertragen werden. Es sei M die gemeinsame Tangente der n Kurven C_i, m_i der Berührungspunkt, m_i', M_i' die Charakteristik von C_i für M_i bezw. m_i, ferner d_i der Abstand des Punktes m_i vom Berührungspunkt $m \equiv MM'$. Dann tritt an Stelle von (1) wenn man statt des Abstandes MM_i' die Entfernung $\overline{m_i m_i'}$ schreibt:

(1') $\overline{m_1 m_1'} = \operatorname{tg} \overline{MM'} \cdot d_1, \quad \overline{m_2 m_2'} = \operatorname{tg} \overline{MM'} \cdot d_2 \ldots \overline{m_n m_n'} = \operatorname{tg} \overline{MM'} \cdot d_n$

und an Stelle von (3), da jetzt $\operatorname{tg} \overline{MM'}$ herausfällt,

(3') $$(a_1' - b_1')d_1 + (a_2' - b_2')d_2 + \cdots (a_n' - b_n')d_n = 0.$$

Denkt man sich daher in den Berührungspunkten m_i' *den Werten* $(a_i' - b_i')$ proportionale Massen wirksam, so ist ihr Schwerpunkt der gesuchte Punkt m. Hat die Bedingung die Form der Gleichung (4), so sind die $(a_i' - b_i')$ durch $\frac{1}{c_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}$ zu ersetzen. Die Konstruktion kann in der Weise ausgeführt werden, daß durch die Punkte m_i Gerade M_i^0 gezogen werden, für die $\operatorname{tg} \overline{MM_i^0}$ einen der Größe $(a_i' - b_i')$ bezw. $\frac{1}{c_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}$ proportionalen Wert hat. Die Gerade, deren Ordinaten bezüglich M die Summe der zugehörigen Ordinaten aller M_i^0 sind, geht durch den gesuchten Berührungspunkt m.

II. Drei und mehr Phasen des veränderlichen Systems. Synthetische Kurvendefinition zweiter Art.

8. Wir betrachten wieder ein zwangläufig veränderliches System S und denken uns zu jedem seiner Elemente E in einer bestimmten Phase die Charakteristik E' ermittelt. Bei Festsetzung der Charakteristik des unabhängig veränderlichen Elementes E_1 konnte eine Größe, die wir jetzt mit s bezeichnen, willkürlich gewählt werden. Fassen wir jedoch s als gegeben auf, so bilden die E und E' zusammen wieder ein zwangläufiges Sytsem — es sei mit $S + S'$ bezeichnet —, das wir der gleichen Betrachtung unterwerfen können. Dabei sei vorausgesetzt daß jetzt zur Bestimmung der Charakteristik E_1' von E_1, das wir auch im Systeme $S + S'$ als unabhängig veränderliches Element beibehalten, *dasselbe s gewählt* werde, sodaß die E' Charakteristiken der E bleiben. Es steht uns dann noch frei, für s als metrisches Element von $S + S'$ eine willkürliche Größe s', die auch Null sein kann, als Charakteristik zu bestimmen, und wir erhalten nach Annahme irgend eines solchen s' für *jedes Element* E' von $S + S'$ eine *Charakteristik* E''. Wir nennen die Elemente E'', die von zwei willkürlich bestimmten

Größen s und s' abhängen, die *Charakteristiken zweiter Ordnung der Elemente E.* In derselben Weise definieren wir die Charakteristiken E''', $E^{(IV)}$.., $E^{(n)}$ dritter, vierter ... $n$ter Ordnung, die drei, vier ... n willkürliche Größen enthalten. Es ist sofort klar, daß die E', E'' ... $E^{(n)}$ mit E zusammen ein *Äquivalent für* $n+1$ *aufeinanderfolgende Phasen* von E bilden. Die Charakteristiken beliebiger Ordnung eines Punktes, einer Geraden, eines metrischen Elementes sind immer wieder Elemente derselben Art. Die eines Punkt- oder Geradenortes (m) oder (M) sind abwechselnd Geraden- oder Punktörter $(M')(m'')$ ... bezw. $(m')(M'')$ ...

Für alle im ersten Teile dieser Arbeit betrachteten Bestimmungsformen eines Elementes E, für die wir eine explizite Bestimmungsform von E' gefunden haben, können wir dieselbe Aufgabe auch bezüglich der Charakteristiken höherer Ordnung E'', E'''... sofort lösen. Es handelt sich noch darum, zu zeigen, in welcher Weise aus der Charakteristik $n$ter Ordnung eines Elementes jene Elemente gefunden werden können, die in der Infinitesimalgeometrie zur *Charakterisierung von* $n+1$ *aufeinanderfolgenden Phasen* eines als *unabhängig* veränderlich betrachteten Elementes verwendet werden. Wir denken hier zunächst an Scharen von Punkten und Geraden (m bezw. (M), für welche die Angabe der Krümmungen bis zur $(n-1)$ten Ordnung ein allgemein verwendetes Äquivalent für $(n+1)$ Nachbarphasen von m bezw. M bildet.[1]) Nun ist bekannt, daß der erste Krümmungsmittelpunkt n einer Kurve C nichts anderes als der Berührungspunkt der veränderlichen Kurvennormalen N mit ihrer Einhüllenden (N) bezw. (n) ist, n_1 aus (N) in derselben Weise abgeleitet wird usf. Da wir nun die Normale N an (m) und (M) mit Hilfe von m' oder M' konstruieren können, so sind wir auch imstande, aus m'' oder M'' den Krümmungsmittelpunkt n zu finden, also für alle Kurven, für die wir das „Tangentenproblem" gelöst haben, auch die *Probleme höherer Ordnung zu erledigen.* Insbesondere soll noch der Satz ausgesprochen werden: Ist eine Kurve als Ort von Punkten, Geraden oder Kreisen in der Weise definiert, daß sich alle Phasen des erzeugenden Elementes in steter Folge mit *Zirkel und Lineal* konstruieren lassen, so kann man mit *denselben Hilfsmitteln* auch die *Krümmungsmittelpunkte beliebiger Ordnung* finden.[2])

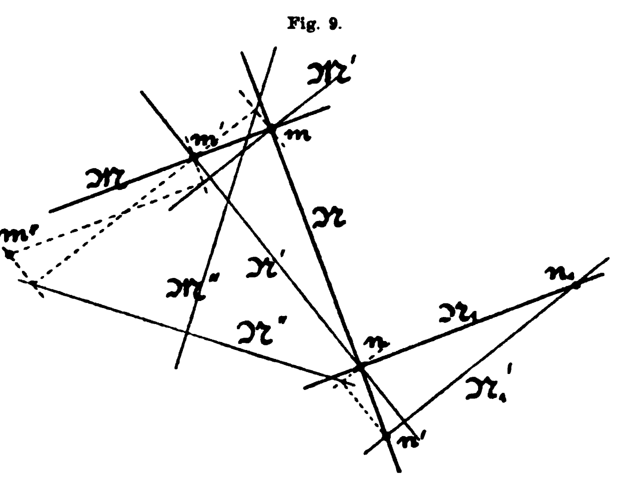
Die am Ende von Abschnitt 4 gemachte Bemerkung bezüglich der festen Bestimmungsstücke F einer durch eine synthetische Definition

1) Ein ähnliches Mittel, um mehr als zwei Phasen eines *beliebigen* (unabhängig) veränderlichen Elementes zu charakterisieren, ist nicht bekannt.

2) Dieser Satz findet sich zum Teil schon bei Petersen. Vgl. Jahrbuch a. a. O. S. 506.

erster Art gegebenen Kurve hat jetzt sinngemäße Ergänzung dahin zu erfahren, daß zur Lösung der Infinitesimalprobleme n ter Ordnung stets $n+1$ aufeinanderfolgende Phasen des Elementes E gegeben sein müssen, als dessen Ort F erscheint. Tritt ein Punkt m oder eine Gerade M als unabhängig veränderliches Element auf, so müssen von dem Ort (m) bezw. (M) die $n-1$ ersten Krümmungsmittelpunkte n, $n_1 \ldots$ gegeben sein. Daß aus diesen bei willkürlichen Annahmen über die s, $s' \ldots$ die Charakteristiken m', $m'' \ldots$ bezw. M', $M'' \ldots$ gefunden werden können, lehrt die folgende Betrachtung. Für jeden Punkt m mit der Charakteristik m' (Fig. 9) gewinnen wir aus m'' zunächst die Charakteristik M' der Tangente $M \equiv mm'$ an (m) und für jede Gerade M mit der Charakteristik M' aus M'' die Charakteristik m' des Berührungspunktes $m \equiv MM'$ mit (M). In beiden Fällen gibt die durch m' zu M' gezogene Senkrechte N', die Charakteristik der Normalen N, in ihrem Durchschnittspunkt mit N das erste Krümmungszentrum n von (m) bezw. (M) Umgekehrt kann man aus m und n, wenn $\overline{mm'} = s$ angenommen wird, den Punkt m' auf der Senkrechten M zu $mn \equiv N$ und weiter nach Verfügung über die Größe s'' auch m'' finden. Daher sind zur Bestimmung der Charakteristik m''' von m'' bloß die Charakteristiken von m, n und s'' erforderlich. Man erhält aber n', das auf N liegen muß, mit Hilfe von $N_1' \perp N'$ aus n_1, ebenso n_1' aus n_2 usf. Es ist daher tatsächlich möglich, aus n, n_1, $n_2 \ldots n_i$ die Punkte m'', m''', $m^{(IV)} \ldots m^{(i+1)}$ zu finden.

Fig. 9.



Der Umstand, daß die Probleme höherer Ordnung sich durchweg in solche der ersten Ordnung auflösen, zeigt wieder die *Analogie* der vorliegenden Untersuchungen mit dem Gedankengang der *Differentialrechnung*.

9. Als synthetische *Kurvendefinition zweiter Art* führen wir die folgende Bestimmungsweise einer Kurve ein. Gegeben seien eine Anzahl fester Elemente F_1, $F_2 \ldots$, ferner n Phasen eines veränderlichen, eigentlichen, Elementes E und ein Gesetz, nach welchem aus den

Elementen F und den n Phasen von E eine und nur eine $(n+1)$te Phase des letzteren (oder auch eine endliche Anzahl solcher) abgeleitet werden kann. Die gewonnene $(n+1)$te Phase bestimmt mit $(n-1)$ der früheren eine $(n+2)$te usf., sodaß im allgemeinen eine einfach unendliche Schar von Phasen definiert ist. Je nachdem das Operationsgesetz nur explizite oder auch andere Bestimmungsformen enthält, können wir die Definitionen zweiter Art explizite oder implizite nennen, und ebenso auch den Begriff der Konstruierbarkeit hierher übertragen.

Uns soll nur der spezielle Fall beschäftigen, in dem die $n+1$ Phasen von E alle unendlich benachbart liegen, somit die Definition die *Charakteristik $n$ter Ordnung des unabhängig veränderlich gedachten E* liefert. Für den Punkt als Element E und $n=1$ besteht die Definition in der Angabe der Tangentenkonstruktion für die Kurve; ist $n=2$, so liefert sie zu jedem gegebenen oder willkürlich gewählten Linienelement den ersten Krümmungsmittelpunkt usf. Das analytische Analogon zu den jetzt betrachteten Kurvendefinitionen ist die Bestimmung der Funktion einer Veränderlichen durch *Differenzen- bezw. Differentialgleichungen.*

Die Aufgaben, welche der konstruktiven Infinitesimalgeometrie mit Rücksicht auf die Kurvendefinitionen zweiter Art erwachsen[1]), (unendlich nahe Lage der $n+1$ Phasen vorausgesetzt) bestehen in der Ermittelung der Charakteristiken $(n+2)$ter und höherer Ordnung des erzeugenden Elementes E. Diese erhält man aber durch die Charakteristiken erster, zweiter ... Ordnung jenes Elementes, das zur Charakterisierung der $(n+1)$ten Phase von E diente und aus gegebenen Stücken auf Grund der Definition ableitbar war. Daher sind die hier auftretenden Aufgaben ebenfalls auf die früher behandelten zurückgeführt.

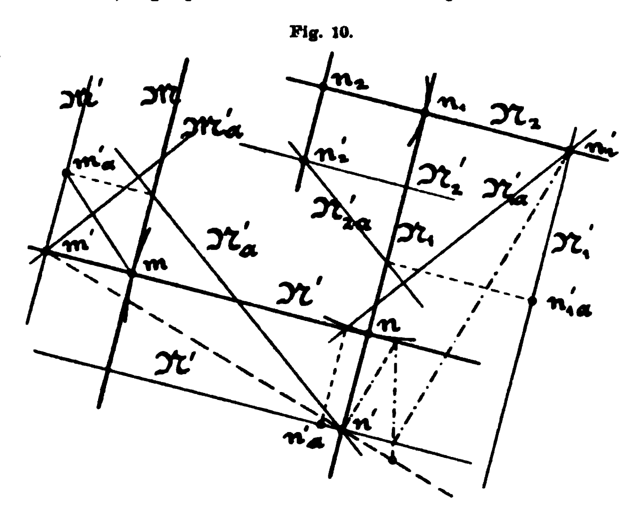
Die Möglichkeit, eine Kurve in der genannten Weise durch eine Infinitesimaleigenschaft zu bestimmen und aus einer derartigen Definition die weiteren Infinitesimalkonstruktionen abzuleiten, gibt uns ein für die praktische Behandlung vieler spezieller Aufgaben wichtiges Prinzip. Haben wir nämlich für irgend eine Kurve eine Tangentenkonstruktion abgeleitet, so können wir aus dieser, ohne erst auf die ursprüngliche Definition der Kurve zurückzugehen, die Krümmungsmittelpunkte ermitteln usf. Es ist dies ein tatsächlich vielfach verwendeter, wenn auch nicht ausdrücklich hervorgehobener Grundsatz.

10. Es sei C (Fig. 10) ein beliebiger Punkt- oder Geradenort,

1) Es ist hierbei nur an Differentiationsprobleme gedacht. Doch dürfte die Behandlung inverser Aufgaben auf Grund der hier abgeleiteten Begriffe nicht aussichtslos sein.

mM ein Linienelement desselben, $M'm'$ die zugehörige Charakteristik. Die dem mM entsprechenden Linienelemente der ersten, zweiten... Evolute von C seien mit nN, n_1N_1... bezeichnet. Da jede veränderliche Kurve mit der Reihe ihrer sukzessiven Evoluten ein zwangläufig veränderliches System bildet, so entsprechen den genannten Linienelementen der letzteren ebenfalls bestimmte Charakteristiken $n'N'$, $n_1'N_1'$... Die Angabe der $m, n, n_1 \ldots n_i$ und der zugehörigen $M', N', N_1' \ldots N_i'$ (oder, was dasselbe ist, der $M, N, N_1 \ldots N_i$ und $m', n', n_1' \ldots n_i'$) ist ein Äquivalent für die Kenntnis zweier aufeinanderfolgender Phasen von $i + 2$ benachbarten Linienelementen der Kurve C.

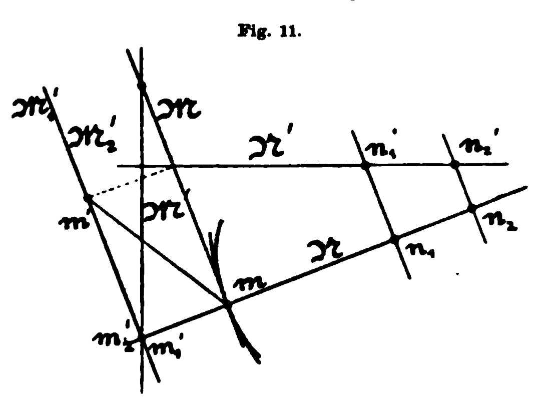
Fig. 10.



Jede Gerade M_a' durch m' ist nach Abschn. 1 eine Charakteristik von M entsprechend einer gewissen Zuordnung a zwischen den Tangenten der aufeinanderfolgenden Phasen von C. Eine jede solche Zuordnung a zwischen den M zieht auch eine Zuordnung zwischen den ersten, zweiten... Normalen N, N_1... der Nachbarphasen von C nach sich, die je einen Strahl N_a', N_{1a}'... durch n', n_1'... als Charakteristik bedingt. Da aber die M, N, N_1... aufeinander sukzessive normal stehen, bilden die M_a', N_a', N_{1a}' bei Änderung der Zuordnung a kongruente Strahlenbüschel mit m' n' n_1'... als Scheitel. Die tangentenweise Zuordnung zweier Kurven bedingt nun immer auch eine bestimmte punktweise Beziehung zwischen ihnen, die im vorliegenden Fall leicht abgeleitet werden kann. m ist der stete Schnittpunkt der Geraden M und N. Die Charakteristik von M für den Punkt m ist immer M', die von N ist für jede Zuordnung mit Hilfe von N_a' gegeben. Die Charakteristik m_a' von m entsprechend der Zuordnung a wird daher erhalten, indem man durch den Schnittpunkt MN_a' die Parallele zu N zieht und sie mit M' zum Schnitte bringt. In gleicher Weise ergibt sich mit Hilfe von N_{1a}' der Punkt n_a' auf N' usf. Die Punktreihen auf M', N', N_1'... sind sämtlich untereinander ähnlich und mit den Strahlenbüscheln m', n', n_1'... projektiv.

Die vorstehenden Betrachtungen finden zunächst Verwertung in jenen Fällen, in denen von einer veränderlichen Kurve des Systems zum Zwecke der Ableitung weiterer Elemente mehr als ein Punkt, bezw. eine Tangente in Betracht kommt. Es sei z. B. (Fig. 11) mM gemeinsames Linienelement zweier einander stetig berührender Kurven C_1 und C_2; man soll die Charakteristiken von m und M ermitteln. Zu diesem Behufe müssen von den beiden Kurven die ersten Krümmungsmittelpunkte n_1 und n_2 und die zugehörigen Charakteristiken der ersten Evoluten n_1' und n_2' gegeben sein. Die Verbindungsgerade $n_1'n_2'$ ist Charakteristik N' der gemeinsamen Normale, die durch $m_1' \equiv m_2'$ gezogene Senkrechte dazu ist Charakteristik M' von M, die Projektion von $N'M$ auf $M_1' \equiv M_2'$ liefert m'.

Fig. 11.

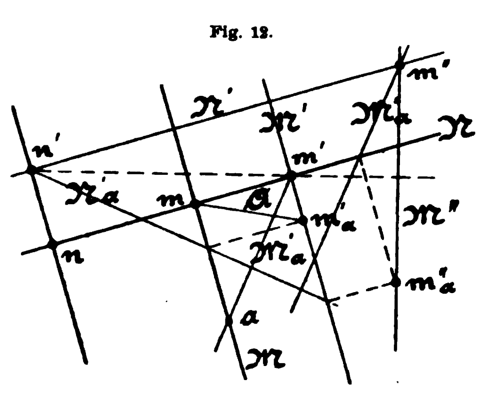


Es ist schließlich von Interesse, den Zusammenhang zwischen den jetzt betrachteten Elementen $n'N'$, $n_1'N_1' \ldots$ (Fig. 10) und den Normalen, Krümmungszentren usf. der charakteristischen Punkt- und Geradenörter C' von C kennen zu lernen. Betrachtet man die Kurve C in zweiter Annäherung als Kreis mit dem Zentrum in n, so entspricht ihm nach Abschnitt 5 als Ort der M' ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf N' liegt. Daher ist N' die Normale von (M') im Berührungspunkt der Tangente M und ebenso N_1' Normale von (N') usf. Man erkennt also, daß die Folge der Geraden M', N', $N_1' \ldots$ für (M') dieselbe Bedeutung hat, wie die der Geraden M, N, $N_1 \ldots$ für (M) selbst. Minder einfach sind die analogen Beziehungen für (m'). Faßt man m' in jeder Phase als Schnittpunkt von M' und N auf, so lassen sich auf Grund der in dieser Arbeit entwickelten Methoden Konstruktionen für die Reihe der Krümmungsmittelpunkte von (m') ableiten. Um jedoch später zu Besprechendem nicht vorzugreifen, sei hier nur angegeben: $m'n'$ ist die Normale von (m'), $n'n_1'$ die von (n') usf. Den ersten Krümmungsmittelpunkt von (m') erhält man, indem man in n' und m' die Senkrechten zu $n'm'$ zieht, sie mit N bezw. N' zum Schnitte bringt und schließlich die Verbindungsgerade der so erhaltenen Schnittpunkte mit $m'n'$ schneidet.[1])

1) Vgl. dazu die Definitionen in Abschnitt 13. n' ist gedrehte Charakteristik von m', n_1' die von n' usf., wenn n als gedrehte Charakteristik von m an-

11. Drei aufeinanderfolgende Phasen einer veränderlichen Kurve (m) Fig. 12 sind durch das charakteristische Geradengebilde (M') und das charakteristische Punktgebilde (m'') des letzteren gegeben. Da N' die jeweilige Normale von (M') ist, liegt jedes m'' auf der zugehörigen N'. Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, die Charakteristik M'' von (m') für das ins Auge gefaßte Element m' zu finden. Dem Vorangehenden gemäß muß M'' zu $m'n'$ normal stehen. m' ist der stete Schnittpunkt von M' und N. Man erhält also einen Punkt von M'', indem man M' und N zusammengehörige Änderungen erteilt, das sind aber solche, die zueinander normal stehende Charakteristiken bedingen. Wir ziehen durch m'' eine Gerade M_a'' normal zu der durch n' gehenden N_a' und finden in bekannter Weise m_a''. Man erkennt, daß M'', der Ort der m_a'', als Erzeugnis zweier ähnlicher Parallelstrahlbüschel entsteht und erstens wirklich auf $m'n'$ senkrecht ist, zweitens durch m'' hindurchgeht. Jedem Punkte m_a' von M' entspricht eine gewisse durch m'' gehende Gerade M_a'' als Charakteristik von M' gemäß der Zuordnung a; und jedem Strahle M_a' durch m' entspricht in dualer Weise ein Punkt auf M''. Beide Beziehungen, die durch den Punkt n' vermittelt werden, sind, wie leicht einzusehen, linear.

Fig. 12.

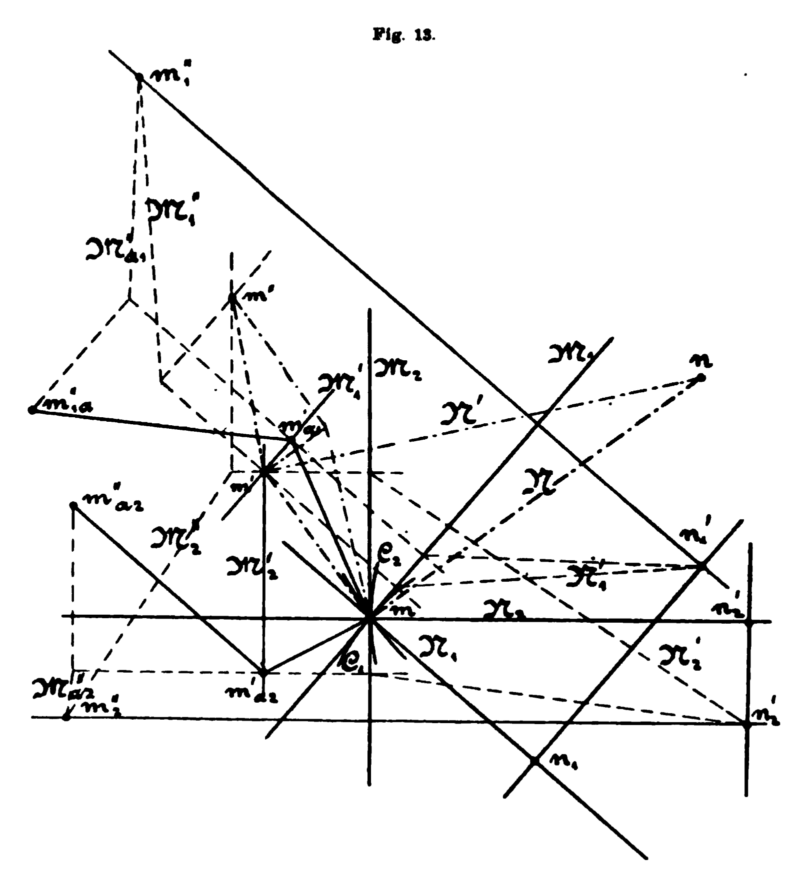


Ist etwa der Krümmungsmittelpunkt n (Fig. 13) des Ortes (m) des Schnittpunktes zweier beliebig veränderlicher Kurven C_1 und C_2 zu ermitteln, so hat man folgendermaßen vorzugehen. Die Definitionen von C_1 und C_2 ergeben zunächst Konstruktionen der beiden Tangenten M_1 und M_2 sowie der ersten Krümmungsmittelpunkte n_1 und n_2. Ferner erhält man nach dem in 5 angegebenen Verfahren für jede Kurve einen Punkt m_{a1}' und m_{a2}' der betreffenden Charakteristiken M_1' und M_2', deren Richtungen schon bekannt sind, und wendet man dieses Verfahren auch auf die ersten Evoluten (N_1) und (N_2) an, so gewinnt man deren Charakteristiken n_1' und n_2'. Die Konstruktion, die zu den Punkten m_{a1}' und m_{a2}' geführt hat, liefert auch deren Charakteristiken m_{a1}'' und m_{a2}''. Projiziert man die letzteren auf die in m_{a1}' und m_{a2}' zu M_1' und M_2' errichteten Normalen, so erhält man je einen Punkt von M_{a1}''

gesehen wird. Die Konstruktion des Krümmungszentrums benützt die für die Richtung von N versetzte Charakteristik von $n'm'$.

und M''_{a2}, d. s. Charakteristiken von M'_1 bezw. M'_2 für die Zuordnung in der Richtung mm'_{a1} bezw. mm'_{a2}. Die Richtung von M''_{a1} und M''_{a2} findet man mit Hilfe von N'_{a1} und N'_{a2}, die n'_1 und n'_2 mit den Projektionen von m'_{a1} und m'_{a2} auf M_1 und M_2 verbinden. Da n'_1 und n'_2 bekannt sind, hat man nun auch die Punkte m''_1 und m''_2, durch welche alle Charakteristiken von M'_1 und M'_2 hindurchgehen. Die

Fig. 13.



Charakteristik m' von m ist der Schnittpunkt von M'_1 und M'_2. Projiziert man m' auf die Tangenten M_1 und M_2, verbindet die Projektionen mit n'_1 bezw. n'_2, so hat man in den Verbindungsgeraden N'_1 und N'_2 Charakteristiken von N_1 und N_2 gefunden, die der Zuordnung in der Richtung mm' entsprechen. Die durch m''_1 und m''_2 gehenden Normalen zu N'_1 bezw. N'_2 sind die in Betracht kommenden Charakteristiken M''_1 und M''_2 von M'_1 und M'_2, mit deren Hilfe man sofort m'' und daraus den Krümmungsmittelpunkt n von (m) findet. Die ganze Konstruktion kann auf den dualen Fall übertragen werden, und es hat

prinzipiell keine Schwierigkeit, durch weitere „Differentiationen" zu Krümmungsmittelpunkten höherer Ordnung zu gelangen.

12. Einer Erwähnung bedarf noch die Behandlung analytischer Beziehungen in dem Falle, in dem Probleme höherer Ordnung in Frage kommen. Sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ n metrische Elemente, $x'_1, x'_2 \ldots x'_n$ ihre Charakteristiken, so folgt, wie in 4 erwähnt, aus $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x'_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x'_n.$$

Ebenso ergibt sich

$$y'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} x_1'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} x_2'^2 + \cdots + 2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} x'_1 x'_2 + \cdots\right] + \frac{\partial f}{\partial x_1} x''_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x''_2 + \cdots$$

usw.

Zu den speziellen Fällen, in denen von dieser allgemeinen Gleichung Gebrauch gemacht wird, gehören namentlich die vielfach untersuchten Konchoiden[1]), für die Funktion f die Form einer Summe von Gliedern gleicher Dimension (meist plus oder minus eins) besitzt.

Ist $n = 1$, so hat man

$$y = f(x),$$
$$y' = f'(x) \cdot x',$$
$$y'' = f''(x) \cdot x'^2 + f'(x) x'' \text{ usf.}$$

Enthält eine Kurvendefinition erster Art eine derartige Bestimmungsform eines Elementes y, so kann man durch Änderung der funktionalen Beziehung f im allgemeinen jede beliebige Kurve mit Hilfe desselben erzeugenden Systems darstellen. Man sagt dann auch, die Kurven seien durch ihre Gleichungen analytisch definiert, u. zw. bezüglich eines Koordinatensystemes, das eben durch das (zwangläufig) veränderliche erzeugende System bestimmt wird. Was unsere Untersuchung in diesem Falle leistet, ist gewissermaßen eine Ergänzung zu den unmittelbaren Resultaten der Differential-Analysis. Sie zeigt, in welcher Weise die geometrischen Charakteristiken der erzeugenden Elemente (Punkte oder Gerade) nämlich Tangente, bezw. Berührungspunkt, Krümmungszentra usf. aus den sukzessiven Ableitungen der Funktion f sich ermitteln lassen.

Wählt man x als unabhängig-veränderliches Element des Systems, so kann zur Vereinfachung $x'' = x''' = \cdots = 0$ gesetzt werden, also $x' = a = \text{const.}$, so daß

(1) $$y = f(x),$$
(2) $$y' = af'(x),$$
(3) $$y'' = a^2 f''(x) \text{ usf.}$$

1) Vgl. auch Abschnitt 16.

Betrachtet man die Gleichungen (2), (3) als Definitionsgleichungen neuer Kurven für dasselbe Koordinatensystem, für das (1) gilt, wobei die y', y'' ... an Stelle von y treten, so erhält man die sog. Differentialkurven von (1), die Sobotka[1]) mit vielem Erfolge zur Behandlung konstruktiver Infinitesimalaufgaben benutzt hat.

Enthält eine Kurvendefinition erster Art die in Nr. 7 behandelte implizite Bestimmungsform eines Elementes, so findet man auf Grund der angegebenen expliziten Bestimmung der Tangente, bezw. des Berührungspunktes den ersten Krümmungsmittelpunkt und die folgenden. Hat die Beziehung, welche die zusammengehörigen Phasen der n Kurven verknüpft, die Form einer Gleichung, so muß man die Charakteristiken der an genannter Stelle benützten Ausdrücke $\frac{1}{c_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$ ermitteln. Das c_i ist durch Konstruktion gefunden, daher seine Charakteristik auf demselben Wege bestimmbar. Die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial p_i}$ müssen total nach sämtlichen p_i differenziert werden, wobei an Stelle der p_i' die durch die Konstruktion der Tangente (bezw. des Berührungspunktes) gefundenen Werte einzusetzen sind.

III. Beispiele.

13. Die Hauptergebnisse der vorangegangenen Untersuchung sollen durch einige Beispiele erläutert werden. Zunächst seien einige konstruktive Hilfsmittel hervorgehoben, die bei Durchführung der Aufgaben Verwendung fanden.

a) *Die Charakteristik des unabhängig veränderlichen Elementes.* — Wählt man die Größen s, s', s'' ... (vgl. Abschn. 8) nicht völlig willkürlich, sondern in irgend einer Beziehung zu einem der Elemente des veränderlichen Systems, so wird die ganze durchzuführende Konstruktion oft sehr bedeutend vereinfacht.[2]) Ist z. B. (Fig. 14) der Radius r des Kreises K mit dem festen Mittelpunkte f unabhängig veränderlich, so nehmen wir $r' = -r$ an, so daß das charakteristische Tangentengebilde für K das Strahlenbüschel in f wird. Der analoge Vorgang bei analytischer Behandlung der Probleme besteht darin, daß an Stelle einer willkürlichen unabhängigen Variablen ein (metrisches) Element gesetzt wird, das für die vorliegende Aufgabe bestimmte geometrische Bedeutung hat.

---

1) J. Sobotka, Beitrag zur infinitesimalen Geometrie der Integralkurven. Sitzungsber. d. k. Akad. Wien 1898. Bd. 107, Abt. 2a.

2) Vgl. Burmester a. a. O. S. 66ff., woselbst zahlreiche namentlich mit Zirkel und Lineal konstruierbare Kurven in äußerst eleganter Weise behandelt sind.

b) Als *gedrehte Charakteristik* eines Punktes p definieren wir jenen Punkt p_1, der aus der Charakteristik p' durch eine in bestimmtem Sinne vor sich gehende Vierteldrehung um p hervorgeht.[1]) In Übereinstimmung mit den Definitionen in 1 ergibt sich demgemäß als gedrehte Charakteristik einer Kurve für einen ihrer Punkte eine zur Kurvennormale N parallele Gerade M_1 im Abstande $\overline{NM_1} = \overline{MM'}$. Es bedarf keiner besonderen Erwähnung, in welcher Weise die einfachen Konstruktionen für die Charakteristik des Schnittpunktes zweier Kurven, sowie für die der Länge einer durch ein Punktepaar gegebenen Strecke sich mit Hilfe der gedrehten Charakteristiken ausführen lassen. Wichtig ist, daß die gedrehten Charakteristiken A_1, B_1, $C_1 \ldots$ einer Geraden G für ihre Punkte a, b, $c \ldots$ ein zu a, b, $c \ldots$ ähnliches Parallelstrahlbüschel bilden und insbesondere alle in die im Drehpunkt GG' zu G errichtete Normale fallen, sobald dies für einen einzigen Punkt außer GG' selbst zutrifft. Offenbar ist dies der Fall, sobald $\operatorname{tg} \overline{GG'} = 1$, $\overline{GG'} = 45^0$ ist; dann stellen die Charakteristiken sämtlicher uneigentlicher Elemente des Systems die Ableitungen dieser Größen nach dem Winkel ϑ dar, den G mit irgend einer festen Geraden bildet. Ist z. B. die gedrehte Charakteristik eines Punktes m der Krümmungsmittelpunkt n von (m), so ist das zweite Krümmungszentrum n_1 gedrehte Charakteristik von n_1, n_2 die von $n_1 \ldots$ usf. Gleichzeitig ist $\overline{nn_1}$ die Ableitung von $\overline{mn} = \varrho$ nach dem Tangentenwinkel ϑ, $\overline{n_1 n_2}$ die von $\overline{nn_1} = \varrho_1$ usw.

c) Die konstruktive Lösung der häufig wiederkehrenden Aufgabe, aus den gedrehten Charakteristiken A_1, B_1 einer Geraden G für zwei ihrer Punkte a und b die für einen dritten Punkt c zu ermitteln, erleichtern wir durch Einführung der *versetzten Charakteristik* einer Geraden. Bringt man nämlich die Strahlen A_1, B_1, $C_1 \ldots$ mit den in a, b, $c \ldots$ zu irgend einer Richtung R gezogenen Parallelen zum Schnitte, so erhält man als Erzeugnis der beiden ähnlichen Parallelstrahlenbüschel eine *Gerade*, die durch den Drehpunkt von G geht, und die *für die Richtung von R versetzte Charakteristik von G heißen soll.*[2])

14. Als erstes Beispiel diene die gewöhnliche *Parabel*. Man gelangt zu einem ihrer Punkte m in folgender Weise. Um den festen Punkt f als Zentrum (Fig. 14) wird ein Kreis K mit beliebigem Radius $\overline{fm} = r$ beschrieben und dieser mit einer Parallelen A zur festen Geraden A_0 im Abstande $\overline{AA_0} = a$ geschnitten. Dabei ist

$$a = r. \tag{1}$$

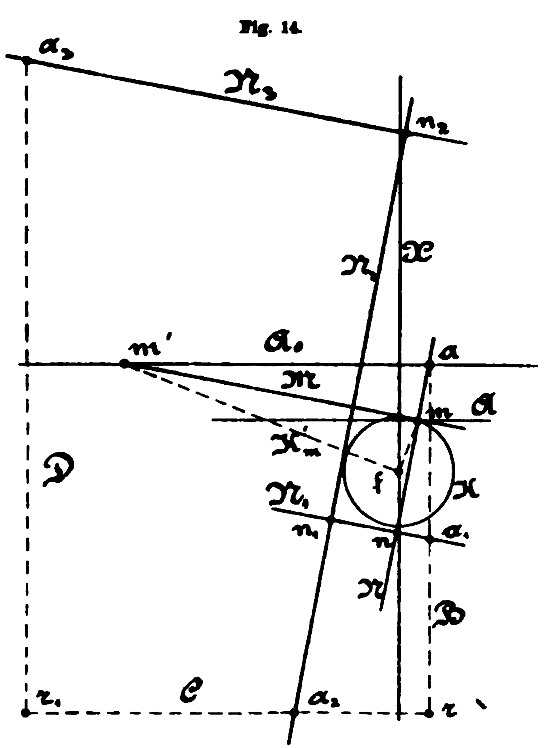
1) Die „gedrehte Geschwindigkeit" wurde von Schadwill eingeführt, a. a. O. § 13. Sie ist vielfach verwendet bei Burmester a. a. O. S. 23 ff.

2) Bei Verwendung der versetzten Charakteristiken lassen sich die meisten Mannheimschen Konstruktionen von unserem Gesichtspunkt aus deuten.

Die Charakteristik von r, dem unabhängig-veränderlichen Element, wählen wir $r' = \overline{mf}$, daher ist die Charakteristik von K für m, die durch f gehende Normale K'_m zu mf. Aus (1) folgt durch Differentiation

$$a' = r', \tag{1'}$$

daher ist A_0 Charakteristik von A für alle seine Punkte. $m' \equiv A_0 K'_m$ ist ein Punkt der Tangente, und man erkennt, daß diese den Winkel von fm mit der Achsenrichtung halbiert.


Fig. 14.

Bezeichnet R den Strahl mf, N die Kurvennormale in m, X die Achse, so haben wir zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes n die Gleichung

$$\overline{NX} = \tfrac{1}{2}\overline{RX} \tag{2}$$

als Kurvendefinition zweiter Art. Betrachtet man m' als Charakteristik von m, so ist $\sphericalangle fmm' = mam'$ gleich dem Winkel, den R mit seiner durch f gehenden Charakteristik R' einschließen muß. Nun gibt aber die Differentiation von (2) mit Rücksicht auf die Ergebnisse in Abschnitt 4

$$\operatorname{tg} \overline{NN'} = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \overline{RR'}. \tag{2'}$$

Macht man daher $\overline{mn} = 2\overline{am}$, so ist $m'n \equiv N'$ die Charakteristik von N und n der gesuchte Krümmungsmittelpunkt.

Ausgehend von der Beziehung

$$\overline{mn} = 2\overline{am} \tag{3}$$

konstruieren wir n_1, nachdem wir, die bisherige Annahme fallen lassend, n als gedrehte Charakteristik von m gewählt haben. Aus (3) folgt

$$(\overline{mn})' = 2(\overline{am})', \tag{3'}$$

und wir wissen bereits, daß $(\overline{mn})'$ nichts anderes als den zweiten Krümmungshalbmesser $\overline{nn_1}$ darstellt. Die gedrehte Charakteristik a_1 von a ergibt sich als Schnittpunkt von B, der in a zu A_0 errichteten Senkrechten, mit der zweiten Normalen N_1. $\overline{a_1 n}$ ist Charakteristik der Strecke $\overline{am}$. Wir haben in

(4) $$\overline{nn_1} = 2\overline{a_1 n}$$[1])

zugleich den Ausgangspunkt für die Konstruktion von n_2. Die gedrehte Charakteristik a_2 von a_1 ist der Schnittpunkt von N_2 mit C, der gedrehten Charakteristik von B für deren Punkt a_1. Da der Drehpunkt von B unendlich fern liegt, hat man $\overline{a_1 r} = \overline{aa_1}$ zu machen und durch r die Normale zu B zu ziehen. $\overline{a_2 n_1}$ ist die Charakteristik der Länge $\overline{a_1 n}$, und aus

(4') $$(\overline{nn_1})' = 2(\overline{a_1 n})'$$

erhalten wir

(5) $$\overline{n_1 n_2} = 2\overline{a_2 n_1}.$$

Die gedrehte Charakteristik D von C für a geht durch r_1, wenn $\overline{a_2 r_1} = 2\overline{ra_2}$ ist; denn $\overline{ra_2}$ ist die Charakteristik der Länge $\overline{aa_1}$, und C ist eben dadurch bestimmt, daß sein Abstand von der festen Geraden A_0 gleich $2\overline{aa_1}$ ist. Der Schnittpunkt von D und N_3 gibt a_3. Wieder ist $\overline{n_2 a_3}$ Charakteristik der Länge $a_2 n_1$ und mit $\overline{n_2 n_3} = 2\overline{a_3 n_2}$ erhält man den vierten Krümmungsmittelpunkt n_3 der Parabel. Eine Fortsetzung des Verfahrens bietet keine weiteren Schwierigkeiten.

15. Die höheren Krümmungsmittelpunkte der zentrischen Kegelschnitte ermitteln wir auf Grundlage der von Maclaurin herrührenden bekannten Konstruktion des zweiten Krümmungszentrums n_1. Haben m, n, n_1 ... (Fig. 15) dieselbe Bedeutung wie früher, während o den Mittelpunkt der Kurve bezeichnet, und errichtet man $np \perp mn$, so ist nach Maclaurin $\overline{nn_1} = 3\overline{pn}$.[2]) Wählt man n als gedrehte Charakteristik von m, so ist no die für die Richtung von N versetzte Charakteristik von mo. Ihr Schnittpunkt s mit der durch p gehenden Parallelen zu N ist ein Punkt der gedrehten Charakteristik von mo für den Punkt p. Fällt man daher $sp_1 \perp mo$, so ist p_1 auf N_1 die gedrehte Charakteristik von p, $\overline{n_1 p_1}$ Charakteristik der Länge $\overline{np}$. Daher gibt $\overline{n_1 n_2} = 3\overline{p_1 n_1}$ den dritten Krümmungsmittelpunkt n_2.[3])

---

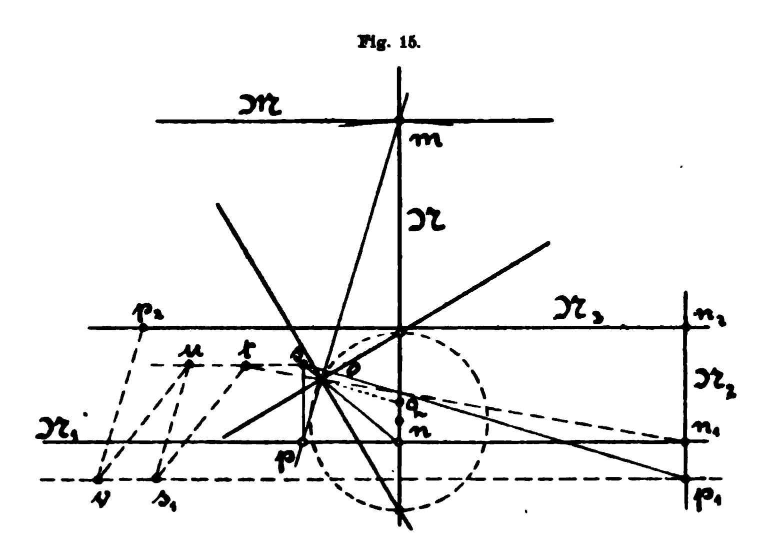
1) Bis hierher ist die Konstruktion bekannt. Man vgl. Mannheim a. a. O. Seite 22.

2) Eine kinematische Ableitung dieser Konstruktion s. Mannheim a. a. O. S. 38f. und S. 62ff.

3) Eine andere Konstruktion gibt Mannheim a. a. O. S. 51.

Die durch p_1 gezogene Normale zu N ist gedrehte Charakteristik von ps für alle Punkte dieser Geraden, also auch für s. $n_1 o$ ist die für die Richtung von N_1 versetzte Charakteristik von no und gibt in ihrem Schnittpunkte t mit der durch s zu N_1 gezogenen Parallelen einen Punkt der gedrehten Charakteristik von no für den Punkt s. Ist daher $ts_1 \perp no$ so ist s_1 auf der durch p_1 gehenden Parallelen zu N_1 gedrehte Charakteristik von s. Die Gerade sp_1 ist dadurch bestimmt, daß sie durch s geht und zu mo normal ist. Macht man $s_1 u \perp sp_1$, so ist u ein Punkt der für die Richtung von N_1 versetzten Charakteristik von sp_1; diese muß aber, wie man leicht erkennt auf on normal stehen, da on die

Fig. 15.



für die Richtung von N versetzte Charakteristik von mo ist und der Winkel zwischen mo und sp_1 beständig ein Rechter ist. Also hat man $uv \perp on$ und $vp_2 \perp sp_1$ zu errichten; dann ist p_2 gedrehte Charakteristik von p_1 und $\overline{n_2 n_3} = 3\overline{p_2 n_2}$.

Die hier gegebene Konstruktion von n_2 ist auch umkehrbar und kann in einfacher Weise zur konstruktiven Lösung der Aufgabe benützt werden, den oskulierenden Kegelschnitt für einen Punkt einer beliebigen Kurve zu finden. Gegeben sind m, n, n_1 und n_2. Man bestimmt zunächst die Punkte p_1 und p, indem $\overline{n_1 p_1} = \frac{1}{3}\overline{n_2 n_1}$ und $\overline{np} = \frac{1}{3}\overline{n_1 n}$ ist, zieht durch p die Parallele zu mn, durch p_1 die Normale zu pm und verbindet den Schnittpunkt s mit n. sn und pm schneiden einander in o.[1]) Die jetzt noch übrige Aufgabe kann auf Grund einer bekannten

1) Vgl. die analytischen Ableitungen von Godefroy (Journ. de l'école polyt. II. série, 2. cah. 1897. S. 19ff.), der zu einer andern Konstruktion gelangt.

Konstruktion von n gelöst werden.[1]) Man zieht $oq \perp mo$, und zeichnet mit dem Zentrum im Halbierungspunkt von qn einen Kreis durch o. Er bestimmt auf der Normalen N deren Schnittpunkte mit den Achsen. Diese liefern im Vereine mit m und N die übrigen Bestimmungsstücke. Man findet daher aus m, n, n_1 und n_2 auch den vierten Krümmungsmittelpunkt n_3. Der konstruktive Zusammenhang zwischen den Punkten m, n, n_1, n_2 und n_3 ist der geometrische Ausdruck für die von Cesàro eingeführte Krümmungsinvariante[2]) der Kegelschnitte.

16. Gegeben sei eine Reihe unveränderlicher Kurven (m_1), $(m_2) \ldots (m_n)$ und ein Punkt o. Auf jedem Strahl O durch o bestimmt man einen Punkt m derart, daß

$$(1) \qquad c \cdot \overline{om} = \sum_1^n c_i \cdot \overline{om_i},$$

wobei sämtliche c bekannte Konstante und die m_i Schnittpunkte von o mit (m_i) sind. Dann heißt (m) eine *allgemeine Konchoide.*[3]) Man könnte derart definierte Örter bezeichnender *Strecken-Additionskurven* nennen und ihnen dual *Winkel-Additionskurven* gegenüberstellen: Gegeben die Geradenörter (M_1), $(M_2) \ldots (M_n)$ und eine Gerade O. Durch jeden Punkt o von O bestimmt man eine Gerade M derart, daß

$$(2) \qquad c \cdot \overline{OM} = \sum_1^n c_i \cdot \overline{OM_i},$$

wenn c dieselbe Bedeutung hat wie oben und M_i die von o ausgehenden Tangenten an (M_i) sind. Beide Gleichungen geben durch Differentiation wieder Gleichungen derselben Form, und die allgemeine Aufgabe, welche der konstruktiven Geometrie der betrachteten Kurvengattung gegenüber erwächst, ist die folgende: Es sind aus der Tangente und den aufeinanderfolgenden Krümmungsmittelpunkten einer (m_i) bezw. (M_i) die sukzessiven Charakteristiken $(\overline{om})'$, $(\overline{om})'' \ldots$ von $\overline{om}$ bezw. $(\overline{OM})'$, $(\overline{OM})'' \ldots$ von $\overline{OM}$ konstruktiv abzuleiten und umgekehrt.

In Fig. 16 ist die Konstruktion für den Fall der Konchoide bis zum Krümmungsmittelpunkt zweiter Ordnung durchgeführt. Unabhängig

1) Mannheim a. a. O. S. 19 (4).

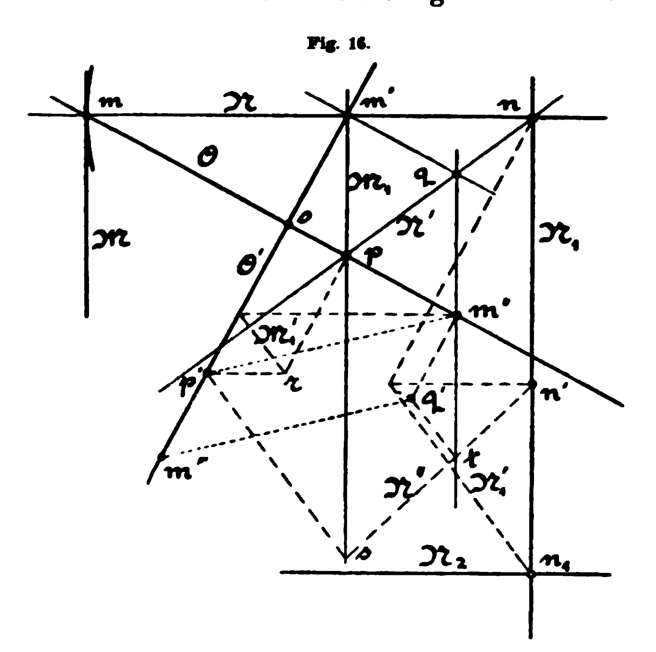
2) Cesàro, Vorles. üb. Natürliche Geometrie, deutsch von Kowalewski. Leipzig 1901. S. 75f. Vgl. auch Godefroy a. a. O.

3) Vgl. Chr. Wiener, Lehrb. d. darstell. Geom. Leipzig 1884. II. B. S. 181 ff. und 223 ff. Sobotka, Zur infinitesim. Geometrie der Plankurven. Sitzungsber. d. k. böhm. Akad. 1898 S. 18 ff. d'Ocagne a. a. O. S. 286 f. Mannheim a. a. O. S. 55 ff.

veränderliches Element ist der Strahl O, als gedrehte Charakteristik für alle seine Punkte wählen wir den zu ihm senkrechten Strahl O'. Dann fällt m' (gedr. Char. von m) in den Schnittpunkt der Normalen N mit O' und es ist $\overline{om'} = (\overline{om})'$. Die Normale M_1 zu N durch m' ist gedrehte Charakteristik von N für den Punkt m; daher geht die für die Richtung von O versetzte Charakteristik N' von N außer durch n (ersten Krümmungsmittelpunkt von (m) in m) noch durch den Schnittpunkt $p \equiv M_1 O$. $m'q \parallel O$ und $qm'' \parallel M_1$ liefern den Punkt m'' auf O, für den $\overline{om}'' = (\overline{om})''$.

Zur Bestimmnng der gedrehten Charakteristik p' von p bedient man sich der für die Richtung von O' versetzten Charakteristik M_1' von M_1; sie ist normal zu N' und schneidet O' in dem Punkte, in dem diese Gerade von der durch m'' gehenden Normalen zu M_1, der gedrehten Charakteristik von M_1 für m', getroffen wird. $pr \parallel O'$ und $rp' \parallel N$ geben den Punkt p' auf O'. Die für die Richtung von O' versetzte Charakteristik N_1' von N_1 geht durch n_1 (zweiten Krümmungsmittelpunkt von (m) in m) normal zu N'; mit ihrer Hilfe findet man die gedrehte Charakteristik n' von n, die auf N_1 liegt. Macht man $p's \perp N'$ und $ps \parallel N_1$, so geht durch n' und s die für die Richtung von N_1 versetzte Charakteristik N'' von N'. $qt \parallel M_1$, $tq' \perp N'$ geben den Punkt q', der auf der Parallelen zu O' durch m'' gelegen ist. Mit p' und q' ist aber m'' sofort gefunden; denn da $pm'qm''$ ständig die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden, so muß dies, wie man leicht erkennt, auch für die gedrehten Charakteristiken $p'm''q'm'''$ der Fall sein. Man macht also $\overline{p'm'''} = \overline{m''q'}$ und hat in m''' den Punkt, für den wieder $\overline{om'''} = (\overline{om})'''$ gilt.

Fig. 16.

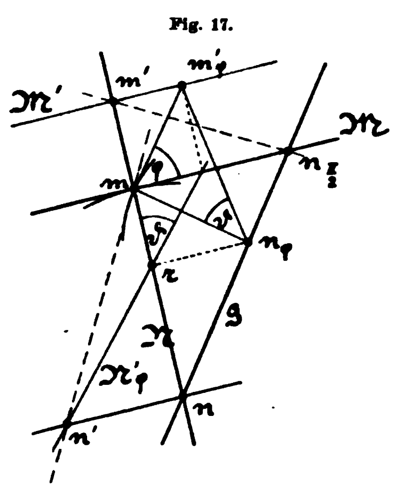


Die Konstruktion ist durchwegs umkehrbar. Man erhält, wenn m und m' gegeben ist, die Normale N; aus m, m' und m'' den ersten

Krümmungsmittelpunkt n, schließlich aus m, m', m'' und m''' den zweiten Krümmungsmittelpunkt n_1.

17. Dreht man jedes der ∞^2 Linienelemente einer einfach unendlichen Kurvenschar, indem man seinen Punkt festhält, um einen bestimmten Winkel φ, so erhält man ebensoviele neue Linienelemente, die im allgemeinen sich wieder zu ∞ viel Kurven einer Schar zusammensetzen. Man nennt die letzteren die *isogonalen Trajektorien* oder die *Loxodromen* des Winkels φ zu der ursprünglich gegebenen Kurvenschar. Sind zwei aufeinanderfolgende Phasen einer veränderlichen Kurve gegeben, so muß es möglich sein, die ersten Krümmungsmittelpunkte der entsprechenden Loxodromen für $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu finden. Es mögen (Fig. 17) mM, $m'M'$ dieselbe Bedeutung haben, wie früher, und es sei $\sphericalangle\, m'mm'_\varphi = 90 - \varphi$. Man bestimmt gemäß Abschnitt 10 die Charakteristik N'_φ der Normalen N, welche der Zuordnung mm'_φ entspricht und mit N den Winkel $\overline{NN'_\varphi} = \vartheta$ einschließt. Da die Normale mn_φ der Loxodrome mit N den *konstanten* Winkel φ bildet, so muß auch die Charakteristik von mn_φ, die durch m'_φ geht, mit dieser Geraden den Winkel ϑ einschließen. Macht man daher den Winkel $mm'_\varphi n_\varphi = 90 - \vartheta$, so erhält man in n_φ den *Krümmungsmittelpunkt der Loxodrome des Winkels* φ *für den Punkt* m. Einfacher gelangt man jedoch zu n_φ, indem man durch den Schnittpunkt $NN'_\varphi \equiv r$ die Parallele zu M zieht, wie man sich auf Grund einfacher Überlegung leicht überzeugt. Denn es ist $\overline{mn_\varphi} = \overline{mm'_\varphi} \cdot \operatorname{ctg} \vartheta = \overline{m'm'_\varphi} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{\cos \varphi}$, während $\overline{mr} = \overline{m'm'_\varphi} \operatorname{ctg} \vartheta$ ist. Aus dieser Konstruktion ersieht man, daß bei Änderung des Winkels φ der Ort der Punkte n_φ als Erzeugnis zweier perspektiver Strahlbüschel erscheint, deren Scheitel beziehlich in m und M^∞ liegen. *Die Krümmungsmittelpunkte aller Loxodromen für den Punkt m liegen daher auf einer Geraden G*, welche die Normale N in n und die Tangente M in $n_{\frac{\pi}{2}}$ schneidet.[1])

Fig. 17.

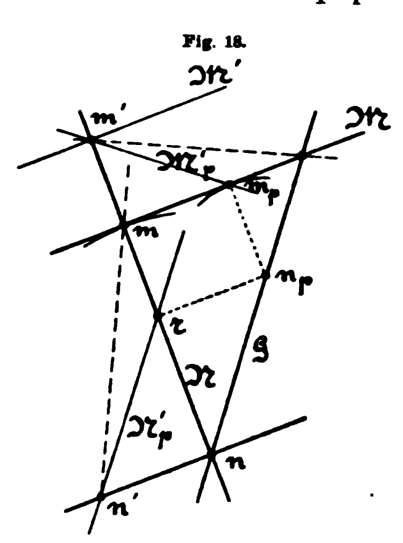


---

1) Dieser Satz ist von G. Scheffers analytisch abgeleitet worden. Siehe Leipziger Berichte, 50, 1898, S. 261 ff. Vgl. auch: Anwendung der Differentialrechnung usw. S. 96.

Es ist nun interessant, die duale Aufgabe zu behandeln. Verschiebt man nämlich die ∞^2 Linienelemente einer Kurvenschar längs ihrer Geraden um eine bestimmte Strecke p, so erhält man ∞^2 neue Linienelemente, die im allgemeinen eine neue Kurvenschar bilden. Man könnte sie etwa die *Schar der Dilatorien* nennen. Es sei (Fig. 18) $\overline{mm_p} = p$ und $M'_p \equiv m'm_p$ die Charakteristik der Geraden M für die Zuordnung im Punkte m_p, $N'_p \perp M'_p$ die zugehörige Charakteristik von N. Dann muß, weil die Normale $m_p n_p$ der Dilatorie zu N im konstanten Abstande p parallel bleibt, auch die Charakteristik von $m_p n_p$ aus N'_p durch Parallelverschiebung um die Strecke p in der Richtung von M hervorgehen. Man erhält demnach den Krümmungsmittelpunkt n_p in derselben Weise wie früher n_φ, indem man durch $NN'_p \equiv r$ die Parallele zu M zieht, und erkennt: *Die Krümmungsmittelpunkte aller Dilatorien einer gegebenen Kurvenschar für eine Tangente M liegen auf einer Geraden G.* Die Gerade G ist, wie leicht einzusehen, mit der früher gefundenen identisch. Man kann an diesen Satz ähnliche Betrachtungen anknüpfen, wie sie Scheffers für den dualen Fall angestellt hat. So z. B. bestimmt die Schar der Dilatorien eine Geradentransformation der Ebene, in der jeder Geraden M eine Gerade P zugeordnet ist, sodaß die Krümmungskreise aller Dilatorien, die M berühren, P zur gemeinsamen Tangente haben usf. Es sei noch bemerkt: Die sämtlichen Loxodromen einer Punktschar fallen mit dieser selbst zusammen, wobei jedes der ∞^2 Linienelemente ∞ fach zu zählen ist; ebenso sind die Dilatorien einer Geradenschar mit dieser identisch. Die Loxodromen eines Strahlenbüschels sind die logarithmischen Spiralen, die Dilatorien der geraden Punktreihe die Traktorien der Geraden. Für jede Schar kongruenter Kreise sind die Dilatorien zugleich Loxodromen einer ebensolchen Schar mit gleicher Mittelpunktslinie und anderem Kreisradius.

Fig. 18.



18. Es sei wieder eine Reihe fester Kurven (A_1), $(A_2) \ldots (A_n)$ gegeben. Ein Punktort (m) ist bestimmt durch eine Gleichung

$$F(l_1, l_2, \ldots l_n) = 0,$$

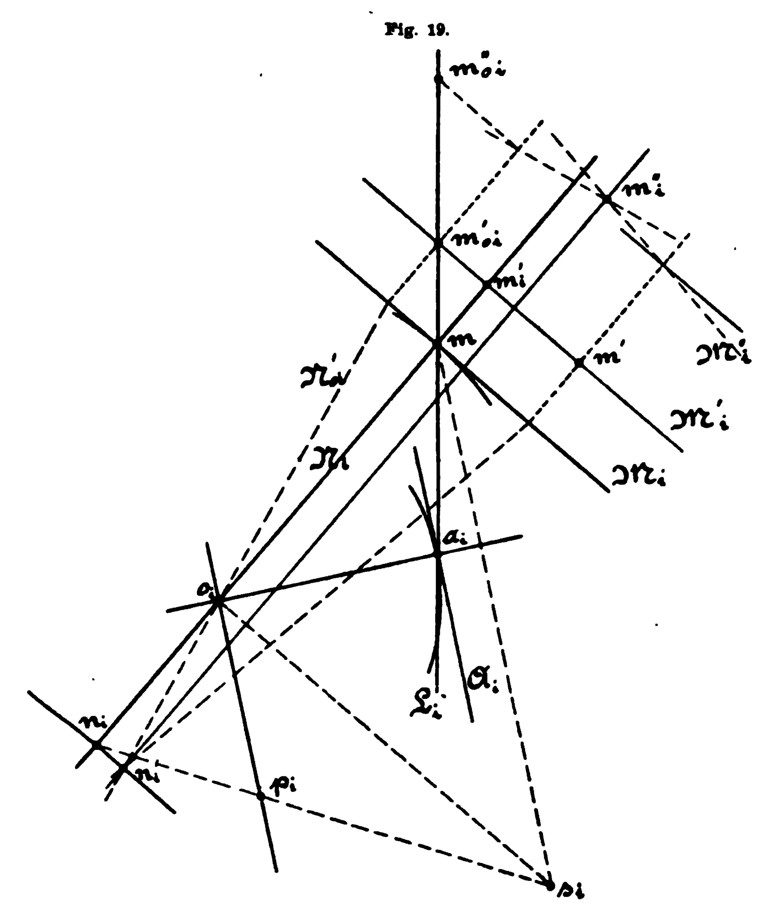
worin die l_i *die unter den Winkeln α_i gemessenen Abstände*[1]) eines

1) Diese Bezeichnung wurde von d'Ocagne eingeführt. Vgl. a. a. O. S. 268ff.

Punktes m von (A_i) bedeuten. Die α_i sind gegebene Konstante. Wir suchen zunächst die Tangente von (m).

In Fig. 19 ist A_i Erzeugende einer der gegebenen Kurven, a_i der Berührungs-, o_i der erste Krümmungsmittelpunkt, $\overline{A_i L_i} = \alpha_i$ und $\overline{a_i m} = l_i$. m erscheint als gemeinsamer Punkt von n Kurven (m_i), für die $l_i =$ const., und es handelt sich zunächst um die Ermittlung der

Fig. 19.



Tangente und der Charakteristik einer (m_i). Nehmen wir o_i als gedrehte Charakteristik von a_i an, so fällt für $l_i =$ const. wegen der Unveränderlichkeit von α_i und l_i auch die gedrehte Charakteristik von m in denselben Punkt. Daher ist $mo_i \equiv N_i$ Normale der Koordinatenlinie (m_i), und ihre Charakteristik M'_i für den Punkt m muß zu mo_i senkrecht stehen. Einen Punkt m'_{oi} der Charakteristik M'_i erhält man, indem man dem Punkte m von (m_i) den auf derselben L_i gelegenen Punkt der Nachbarphase zuordnet. Es ist dann $\overline{mm'_{oi}} = l'_i$ und

$\overline{mm'_i} = l'_i \cdot \cos \overline{L_i N_i}$. Damit ist die in Abschnitt 7 Gleichung (5) eingeführte Größe c_i für den vorliegenden Fall gleich $\cos \overline{L_i N_i}$ gefunden.[1])

Ist $n = 2$ und hat die Definitionsgleichung die Form $l_2 = f(l_1)$, so bestimmt man den Krümmungsmittelpunkt entsprechend dem in **11** angegebenen Verfahren. Man braucht hierzu den Krümmungsmittelpunkt n_i von (m_i) sowie die Charakteristik der Evolute n'_i. Ist p_i das gegebene zweite Krümmungszentrum von (A_i), so erhält man unter Beibehaltung der vorigen Annahme, wenn $o_i s_i \perp N_i$ und $m s_i \parallel A_i$ ist, in $p_i s_i$ die für die Richtung von A_i versetzte Charakteristik von N_i und in deren Schnittpunkt mit N_i den gesuchten Punkt n_i. Die Charakteristik N'_{oi} von N_i für die Zuordnung mm'_{oi} in der Richtung L_i geht jedenfalls durch o_i, und damit ist n'_i ebenfalls gefunden. Die Charakteristik m''_{oi} von m'_{oi} liegt auf L_i u. zw. ist $\overline{m'_{oi} m''_{oi}} = l'_i + l''_i$. Wenn also $l'_1 = a$, $l''_1 = 0$ gewählt wurde, hat man $\overline{m'_{o2} m''_{o2}} = \overline{mm'_{o2}} + a^2 f''(l)$. Alles Weitere findet man wie in **11**. Durch Spezialisierung der Kurven (A_i) erhält man eine große Reihe gebräuchlicher Koordinatensysteme und kann aus der angegebenen Konstruktion Ausdrücke für die Krümmungshalbmesser herleiten. Ist ein Winkel $\alpha_i = 90^0$, so fallen n_i und n'_i in o_i zusammen.

In ganz derselben Weise wird die duale Aufgabe erledigt: Gegeben n Kurven $(a_1), (a_2) \ldots (a_n)$ und eine Gleichung $F(\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n) = 0$.

Auf jeder Tangente A_i von (a_i) wird eine konstante Länge $\overline{a_i l_i} = p_i$ abgetragen, die von l_i ausgehende Tangente an die Kurve (M) schließt mit A_i den Winkel λ_i ein. Haben o_i und p_i analoge Bedeutung wie vorhin, so geht die Normale N_i der Kurve (M_i), für die $\lambda_i = \text{const.}$, durch o_i, der Krümmungsmittelpunkt n_i liegt auf der durch p_i gehenden Parallelen zu M. m'_i und n'_i findet man mit Hilfe einer Zuordnung im Punkte l_i usf. Zu beachten ist, daß $\operatorname{tg} \overline{MM'_{oi}} = \lambda'_i$, aber

$$\operatorname{tg} \overline{M'_{oi} M''_{oi}} = \lambda'_i + (\operatorname{arc\,tg} \lambda'_i)' = \lambda'_i + \frac{\lambda''_i}{1 + \lambda'^2_i}$$

zu setzen ist; also wenn $\lambda'_1 = a$, $\lambda''_1 = 0$, so ist für $\lambda_2 = f(\lambda_1)$

$$\operatorname{tg} \overline{M'_{o2} M''_{o2}} = \operatorname{tg} \overline{MM'_{o2}} + a^2 f''(\lambda_1) \cos^2 \overline{MM'_{o2}}.$$

19. Es ist der Krümmungsmittelpunkt einer durch ihre Gleichung in *trimetrischen Koordinaten* gegebenen Kurve zu ermitteln.

Es sei (Fig. 20) m ein Punkt, dessen Abstände x_1, x_2, x_3 von den drei festen Geraden A_1, A_2, A_3 durch die Beziehung

(1) $$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

---

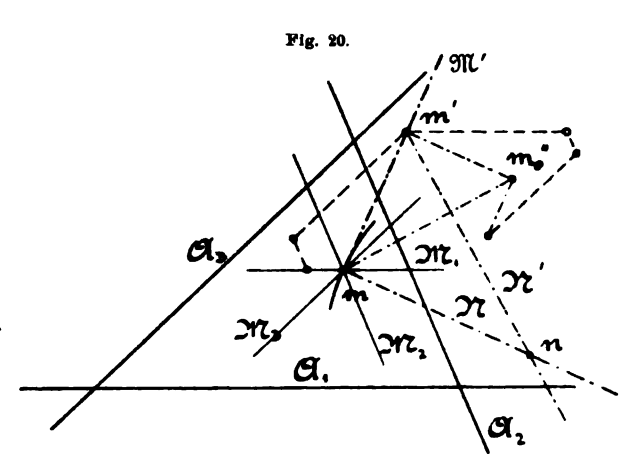
1) Zu demselben Resultate gelangt d'Ocagne auf anderem Wege a. a. O. S. 271.

verbunden sind. Die Koordinatenlinien $x_i = \text{const.}$ sind die durch m gehenden Parallelen M_i zu jenen festen Geraden. Als positive Seite der A_i sei diejenige festgesetzt, auf der die Innenfläche des Dreiecks liegt; man hat dann auf jeder Koordinatenlinie jenen Durchlaufungssinn als positiv zu betrachten, der sich aus einer bestimmten Umlegung der positiven Normalenrichtung, in der die x_i wachsen, ergibt. Durch Differentiation von (1) erhält man

$$(2) \qquad f_1 x_1' + f_2 x_2' + f_3 x_3' = 0;$$

Die Größen c_i des Abschnittes 7 sind hier sämtlich gleich 1. Wir tragen daher auf den Richtungen der M_i Strecken von der Länge εf_i auf, wobei ε ein beliebiger Proportionalitätsfaktor ist, summieren sie geometrisch und erhalten als Resultat einen Punkt m' auf der Tangente M von (m). Nun ist die Charakteristik m'' von m' aufzusuchen. Sie ergibt sich, wenn man von m' aus zuerst mm' der Größe und Richtung nach und hierauf die Charakteristiken der Strecken εf_i in den Richtungen der M_i aufträgt und addiert. Die letzteren ergeben sich durch Differentiation

Fig. 20.



$$(3) \qquad (\varepsilon f_i)' = \varepsilon [f_{i1} x_1' + f_{i2} x_2' + f_{i3} x_3'],$$

wofür man auch schreiben kann

$$(\varepsilon f_i)' = \varepsilon \cdot \overline{mm'} [f_{i1} \sin \tau_1 + f_{i2} \sin \tau_2 + f_{i3} \sin \tau_3],$$

wen τ_i den Winkel von M mit M_i bedeutet. Trägt man daher die Strecken $\varepsilon \cdot \overline{mm'} f_{i1}$, $\varepsilon \cdot \overline{mm'} f_{i2}$, $\varepsilon \cdot \overline{mm'} \cdot f_{i3}$ in den Richtungen der M_i auf, so ist die zu M senkrechte Komponente ihrer Summe gleich der Charakteristik von εf_i. Die Bestimmung von m'' und n erfolgt dann ohne Schwierigkeit. Man erkennt auch, daß das Hinzufügen des Summanden $\overline{mm'}$[1]) zur Ermittlung von m'' für das Endresultat belang-

1) In der Figur fortgelassen.

los bleibt. Aus der Konstruktion ergibt sich für den Krümmungshalbmesser der Ausdruck

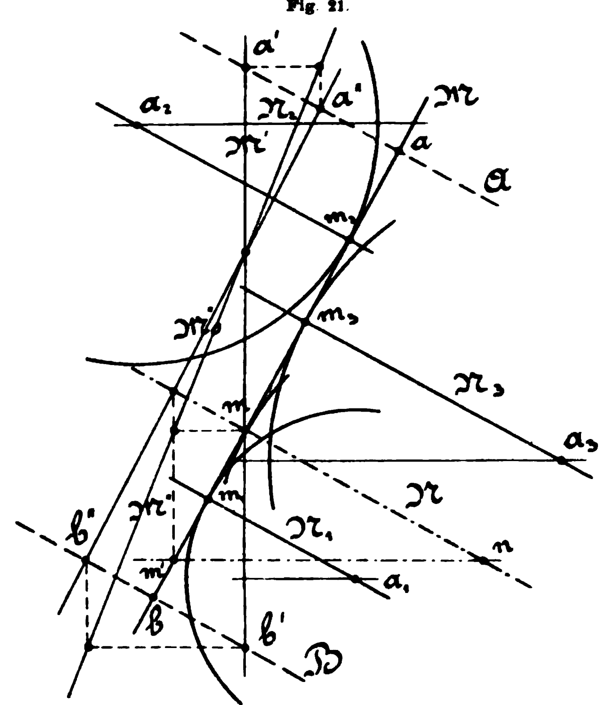
$$(4)\qquad \rho = \frac{\sum_1^3 f_i \cos\tau_i}{\sum_1^3 f_{ij} \sin\tau_i \sin\tau_j}.$$

Ähnlich geht man vor, wenn eine Gleichung in trimetrischen Linienkoordinaten

$$(5)\qquad \varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$$

vorliegt. Es sei (Fig. 21) M eine Gerade, deren Abstände von den festen Punkten a_1, a_2 und a_3 die u_i sind. Als Koordinatenlinien u_i = const. erscheinen hier Kreise mit a_i als festen Mittelpunkten, sämtliche c_i sind gleich 1. Der gesuchte Berührungspunkt m ist demnach der Schwerpunkt der in m_i vorhanden gedachten Massen $\varepsilon\varphi_i$. Die Konstruktion kann etwa in folgender Weise ausgeführt werden. Man wählt zwei beliebige zu M normale Gerade A und B, die M in a und b schneiden, und trägt auf ihnen die Strecken

Fig. 21.



$$\overline{aa'} = \varepsilon(\overline{m_1 a}\cdot\varphi_1 + \overline{m_2 a}\cdot\varphi_2 + \overline{m_3 a}\cdot\varphi_3),$$

$$\overline{bb'} = \varepsilon(\overline{m_1 b}\cdot\varphi_1 + \overline{m_2 b}\cdot\varphi_2 + \overline{m_3 b}\cdot\varphi_3)$$

auf. Dann geht die Verbindungsgerade $a'b'$ durch m und kann als Charakteristik M' von M angesehen werden. Will man jetzt den Krümmungsmittelpunkt n finden, so handelt es sich zunächst um die Charakteristik von M', also um die von a' und b', in letzter Linie um die der Längen $\overline{aa'}$ und $\overline{bb'}$. In jedem Produkte $\overline{a_i m}\cdot\varphi_i$ sind beide Faktoren veränderlich; die Charakteristik von $\overline{m_i a}$ erhält man unmittel-

bar, indem man durch a_i die Senkrechte zu M' zieht und sie mit M zum Schnitte bringt. In derselben Weise wie früher ergibt Differentiation nach sämtlichen u_i die Charakteristik von $\varepsilon \cdot \varphi_i$

$$(6) \qquad (\varepsilon\varphi_i)' = \varepsilon \operatorname{tg} \overline{MM'}[t_1\varphi_{i1} + t_2\varphi_{i2} + t_3\varphi_{i3}],$$

wenn t_i den Abstand $\overline{mm_i}$ bedeutet. Daraus gewinnt man die Charakteristik von $\overline{aa'}$ und die von $\overline{bb'}$, macht $\overline{a'a''} = \overline{aa'} + (\overline{aa'})'$, $\overline{b'b''} = \overline{bb'} + (\overline{bb'})'$, und erhält M''. Man erkennt, daß zur Ermittelung von n statt M'' auch die Gerade $a''b'' \equiv \underline{M_0''}$ selbst benützt werden kann, und daß das Hinzufügen der Strecken $\overline{aa'}$ und $\overline{bb'}$ zur Bildung der Summen $\overline{a'a''}$ und $\overline{b'b''}$ für das Endresultat belanglos bleibt. Der Ausdruck für die Länge des Krümmungsradius in trimetrischen Linienkoordinaten lautet dann

$$(7) \qquad \varrho = \frac{\sum\limits_1^3 \varphi_{ij} t_i t_j + \sum\limits_1^3 \varphi_i u_i}{\sum\limits_1^3 \varphi_i}.$$

Ist die Gleichung (1) homogen in den x_i, so kann m als der Schwerpunkt der in den Eckpunkten des Fundamentaldreiecks $A_1A_2A_3$ vorhandenen Massen x_i angesehen werden. Aus der Eulerschen Beziehung

$$(8) \qquad f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 = 0$$

erkennt man, daß dann M Richtungslinie der Resultierenden der in den A_i angreifenden Kräfte f_i ist.

Hat man eine homogene Gleichung in Linienkoordinaten, so kann die durch die u_i bestimmte Gerade M in derselben Weise durch Zusammensetzung der in den Seiten des Dreieckes $a_1a_2a_3$ liegenden Strecken u_i gewonnen werden, desgleichen der Berührungspunkt m als Schwerpunkt der in den a_i wirkenden Massen φ_i. Damit sind wir zu den bekannten Beziehungen zwischen homogenen Punkt- und Linienkoordinaten gelangt.

Hat die Gleichung (1) die besondere Form

$$(9) \qquad c_1x_1^n + c_2x_2^n + c_3x_3^n = 0,$$

so stellt sie die vielfach untersuchten symmetrischen Dreieckskurven[1]) dar. Man erhält

$$(10) \qquad f_{ij} = 0, \quad (i \neq j),$$

$$(11) \qquad f_{ii} = \frac{n-1}{x_i} f_i.$$

---

1) Vgl. Cesàro, Vorles. üb. Natürl. Geom. Deutsch v. Kowalewski. Leipzig 1901. S. 129 ff.

Daraus ergibt sich auf Grundlage unserer Konstruktion der Satz von Jamet[1]): Berühren einander zwei Kurven, deren Gleichungen die Form (9) haben, und sind ihre Exponenten n und n', so gilt für die Krümmungsradien im gemeinsamen Linienelement

$$(12) \qquad \varrho(n-1) = \varrho'(n-1).$$

Man erkennt, daß der Satz seine Gültigkeit behält, wenn in (9) an Stelle jedes x_i eine beliebige Funktion X_i von x_i tritt.[2]) Die Übertragung für Linienkoordinaten geschieht ohne Schwierigkeit.

20. Nach dem Graßmannschen Hauptsatz[3]) über die Erzeugung der ebenen algebraischen Kurven entsteht die allgemeine Plankurve $n$ter Ordnung als Ort der Schnittpunkte von n veränderlichen Geraden, deren zusammengehörige Phasen dadurch miteinander verknüpft sind, daß ein Punkt und eine Gerade, die mit Hilfe jener n Strahlen lineal konstruiert werden, ineinander liegen müssen. Wir haben es hier mit einem besonderen Fall der in Abschnitt 7 betrachteten impliziten Bestimmungsform eines Punktes zu tun und können nach den daselbst angegebenen Grundsätzen die Tangente an C^n konstruieren.

In Fig. 22 ist m der Schnittpunkt der drei um a_1, a_2, a_3 sich drehenden Geraden A_1, A_2, A_3. Die Schnittpunkte b_1 und b_3 von A_1 und A_3 bezw. mit den festen Geraden B_1 und B_3 bestimmen im Vereine mit den festen Punkten c_1 und c_3 die beiden Geraden C_1 und C_3, deren Schnittpunkt p auf A_2 liegen muß.[4]) Wir suchen die Tangente an die von m erzeugte *Kurve dritter Ordnung*. Es sei zunächst die Gerade A_2 allein als veränderlich betrachtet; wir wählen als ihre Charakteristik für das Linienelement in m (vgl. Abschn. 1) eine Strecke gleich der Entfernung $\overline{ma_2}$. Dann ist ihre Charakteristik für das in Betracht kommende Element in p gleich $\overline{pa_2}$. Faßt man den Schnittpunkt p von C_1 und C_2 als Linie erster Klasse auf, so bildet die Gerade A_2 mit p ihr Linienelement, das zugleich der Geraden A_2 angehört, und die Projektion der Charakteristik p' von p auf die in p zu A_2 errichtete Normale bestimmt die Charakteristik von p für dieses Linienelement. Nun hat man einmal A_1 und dann wieder A_3 als allein veränderlich anzusehen, in jedem Falle als Charakteristik von A_1 bezw.

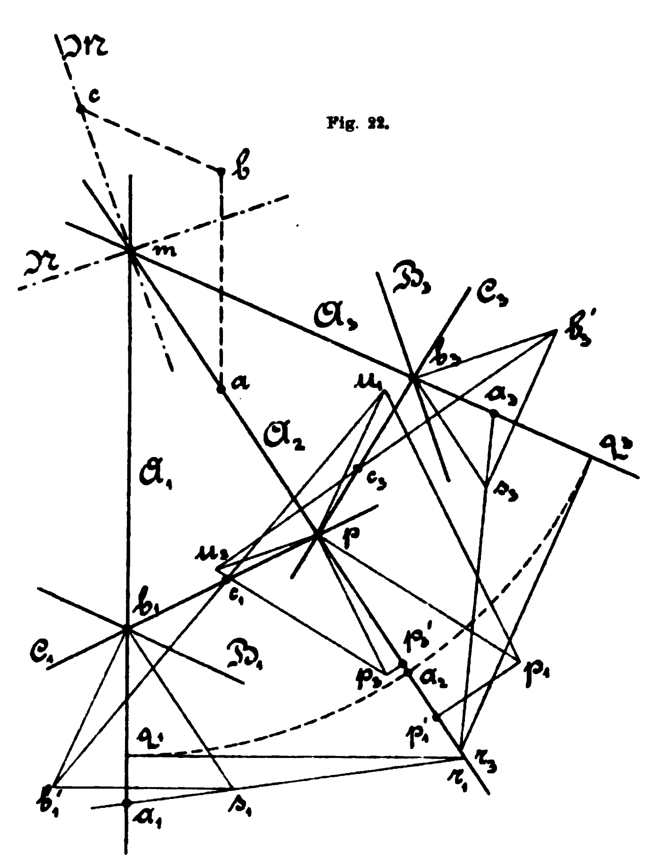
1) Annal. de l'École Norm. supér. (3) IV. 1887 Suppl.

2) Vgl. Pellet in Comptes Rendus, B. CXV. Paris 1892. S. 498.

3) Vgl. A_1 225 § 146. Ferner Crelles Journal Bd. 31. Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Kurven mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse.

4) Graßmann, Über die Erzeugung der Kurven dritter Ordnung durch gerade Linien usw. Crelles Journal Bd. 36.

A_3 für m eine Strecke gleich $\overline{ma_2}$ anzunehmen und demgemäß die Charakteristik p_1' bezw. p_3' von p zu bestimmen. In Fig. 22 ist $\overline{mq_1} = \overline{ma_2}$ gemacht, hierauf $q_1 r_1 \perp A_1$ errichtet. $a_1 r_1$ ist die für die Richtung von A_2 versetzte Charakteristik von A_1. $b_1 s_1$ parallel zu A_2, $s_1 b_1'$ normal zu A_1, $b_1 b_1'$ normal zu B_1 gibt in b_1' die gedrehte Charakteristik von b. $b_1' c_1$ ist die für die Richtung von $b_1 b_1'$ versetzte Charakteristik von C_1, $pu_1 \parallel b_1 b_1'$, $u_1 p_1 \perp C_1$ und $pp_1 \perp C_3$ gibt in p_1 die gedrehte Charakteristik von p bei allein veränderlichem A_1. In gleicher Weise erhält man in p_3 die gedrehte Charakteristik von p für partielle Änderung von A_3. Die Projektionen $\overline{pp_1'}$ und pp_3' von $\overline{pp_1}$ und pp_3 auf A_2 sind die partiellen Charakteristiken von p für A_2. Man hat daher $m\bar{a} = pa_2$, $\overline{ab} = \overline{pp_1'}$, $\overline{bc} = \overline{pp_3'}$ zu machen, wenn $ab \parallel A_2$ und $bc \parallel A_3$ ist, und erhält in c einen Punkt der Tangente M. Das Verfahren ist allgemein für Kurven beliebiger Ordnung und Klasse anwendbar.


Fig. 22.

Neue Rechenmaschine.

Von Eduard Selling in Würzburg.

Schon bei der Leibnizischen Rechenmaschine war die Multiplikation mit 2, 3, ... 9 nicht wie bei der sonst dieselben Mittel benützenden Thomas-Burckhardtischen durch 2, 3, ... 9maliges Umdrehen einer Handkurbel auszuführen, sondern durch je eine einfache nur verschieden begrenzte Bewegung (S. die Beschreibung in Jordan, Handbuch der Vermessungskunde 5. Auflage, Bd. 2, S. 142). Dasselbe war bei der in Chicago prämiierten in meiner Broschüre Eine neue Rechenmaschine (Berlin, Springer, 1887), auch in Dinglers Polyt. Journal Bd. 271, bei Jordan u. a. a. O. beschriebenen Maschine, und zwar hier ohne irgendwie lästige Reibungswiderstände erreicht. Aber die mit der durchaus stetigen Zehnerübertragung und Teilproduktenbildung dort verbundene Art der Ablesung, bei welcher am Indexfaden nicht immer der Anfang, sondern, dem rechts folgenden Teil der Zahl entsprechend, eine gegen das Ende des betreffenden Zifferintervalls zu abweichende Stelle desselben lag, wie auch z. B. bei gewöhnlichen Uhren der Stundenzeiger nicht immer bei der ganzen Stunde, sondern, der Minutenzahl entsprechend, schon bei einer späteren Stelle steht, schien vielen Reflektanten in der Hand eines weniger geübten Personals als zu gefährlich trotz der damals zuerst eingeführten automatischen Kopierung, welche allerdings auch nicht ganz nach Wunsch gelungen war, und schließlich bei sonst vorzüglicher Ausführung vom Verfertiger Max Ott † ganz weggelassen wurde. Alle diese Mißstände sind bei der nun zu beschreibenden Maschine, wie sie als Fortbildung von D. R. P. 149564 von der Firma H. Wetzer in Pfronten hergestellt wird, vermieden. Zur Herstellung der Teilprodukte benützen wir bei ihr noch immer ein Paar sogen. Nürnberger Scheren *a* in Fig. 1 und der die wirkliche pultförmige Aufstellung darstellenden Fig. 2, nur künftig in der vereinfachten in Fig. 3 dargestellten Form, welche nur 10 statt 20 Stäben nötig hat. Wird in ihr der Punkt 0 festgehalten, und entfernt sich von diesem der Punkt 1 um eine die Multiplikatorziffer darstellende Strecke, so stellen die gleichzeitigen Vergrößerungen der Strecken 02, 03, ... 09 das Produkt aus dieser Ziffer in 2, 3, ... 9 dar. Das Gleiche gilt bei entsprechender Lage zweier kongruenter solcher Scheren von den zu diesen Strecken parallelen Bewegungen der Querstäbe d^1, d^2, ... d^9; welche einander gleich und parallel, den Scheren durch Stifte an den Punkten 1 und 1, 2 und 2, ... 9 und 9 angegliedert

sind, wie die Ansicht von rechts in Fig. 1 zeigt, und a. a. O. genauer beschrieben ist. Dieselben sollen senkrecht gegen die beiderseitigen

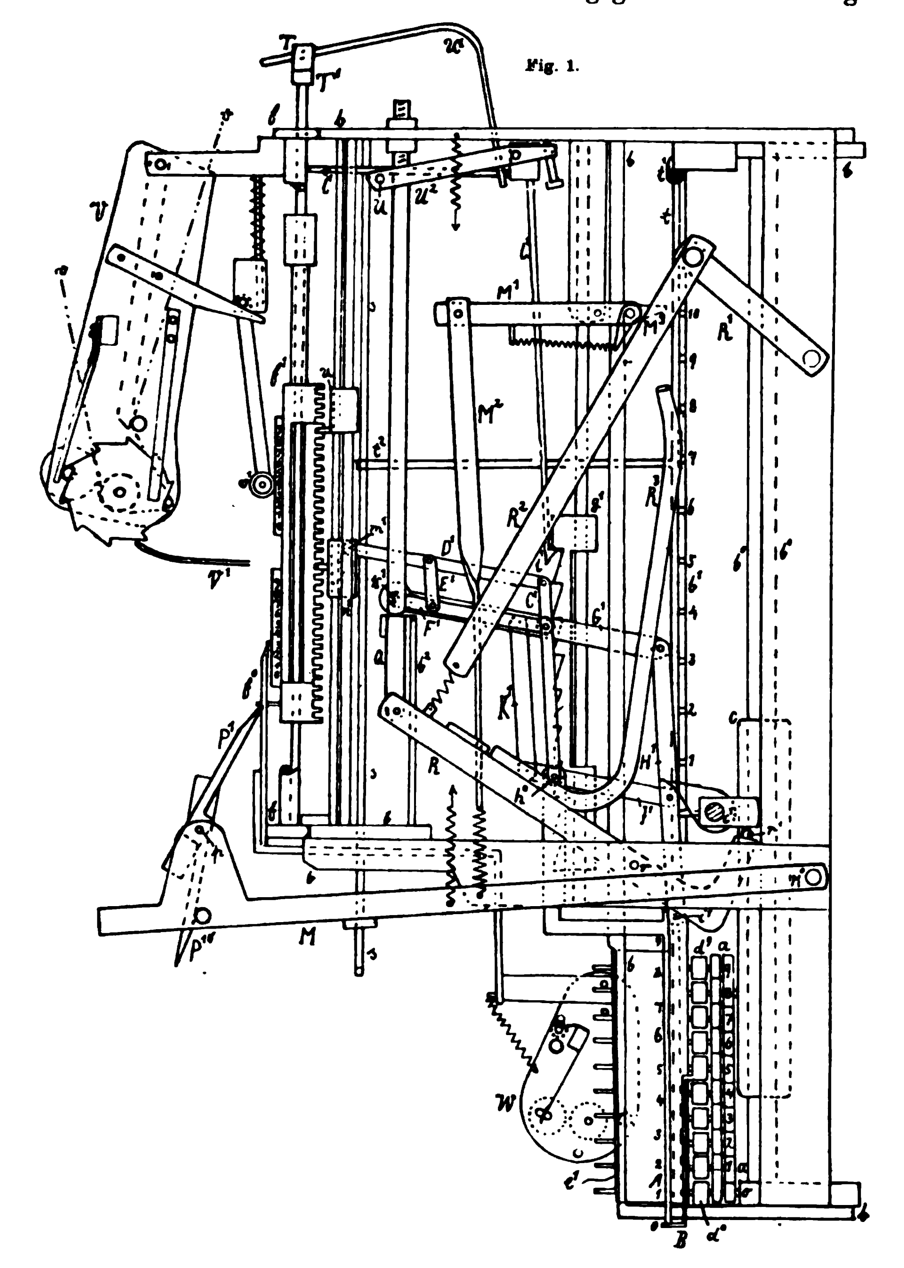
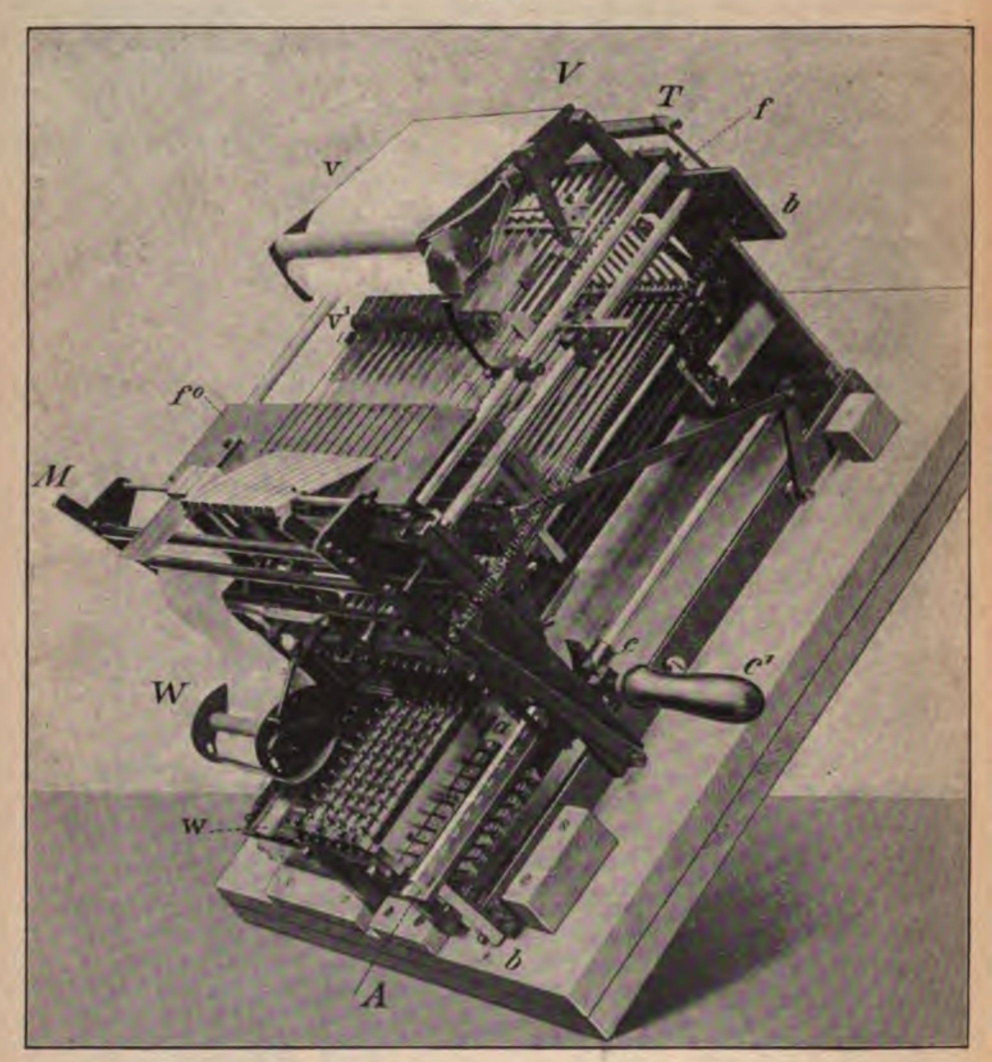


Fig. 1.

parallelen Strecken 09 liegen, in deren Richtung einer derselben, in der vorliegenden Maschine der d^8, durch einen an den festen Stäben b^0 ge-

führten Schieber c sich selbst parallel geführt wird, während der analoge Querstab d^0 mit dem unbeweglichen Gestell b fest verbunden bleibt. Zwischen unbeweglichen, auch mit b bezeichneten den Stäben b^0 parallelen Längsstäben werden der von rechts 1., 2., 3., ... Multiplikandenstelle

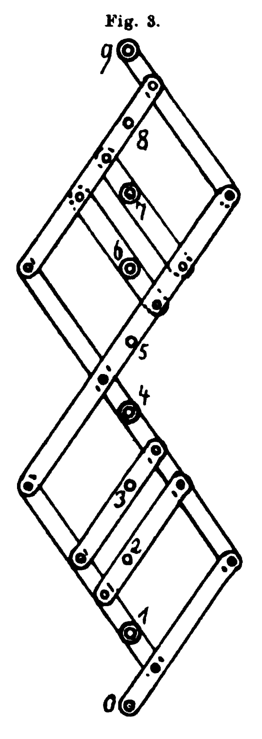
Fig. 2.



entsprechend Kapseln e^1, e^2, e^3, ... geführt, welche, je nachdem die betreffende Multiplikandenziffer 0, 1, 2, ... oder 9 ist, mit dem Querstab d^0, d^1, d^2, ... oder d^9 so verbunden werden sollen, daß sie deren Bewegungen mitmachen. Diese Kapseln haben nämlich je 10 mit 0, 1, ... 9

bezeichnete Stifte, in deren Verlängerung bei der in Fig. 1 und 2 angenommenen Nulllage je ein Spalt in den Querstäben d^0, d^1, ... d^9 liegt, sodaß, wenn einer und nur einer der 10 Stifte wie eine Taste seiner Länge nach in die Kapsel eingedrückt wird, und dann auf der anderen Seite aus ihr hinaus und in den Spalt oder das betreffende Loch des betreffenden Querstabs d^0, d^1, ... oder d^9 hineinragt, durch diesen Stift die Kapsel gezwungen wird die Bewegung des Querstabs mitzumachen, welche bei der dann folgenden Öffnung der Scheren proportional 0, 1, ... oder 9 und der gemeinsamen Multiplikatorziffer ist. Mit dem Eindrücken eines solchen Stiftes springt der vorher in derselben Kapsel eingedrückt gewesene wieder zurück, dies alles wie in meiner früheren Maschine.

Fig. 3.



Mit dem Schieber c ist ein Riegel c^1 in der Art verbunden, daß er an ihm nach rechts und links eine Strecke weit verschoben werden kann. Die rechts und links aus der Maschine herausragenden Enden dieses Riegels sind mit Handhaben versehen für die die Maschine treibende Hand, welche allein oder mit der anderen zusammen den Riegel auch ihm selbst parallel in der Richtung der Stäbe b^0 verschieben und hierdurch dem Schieber c die verlangte Bewegung mitteilen kann. Zur Abmessung dieser Bewegung dient ein vierkantiger fester den Stäben b^0 paralleler Stab b^1, in welchen 11 Nuten eingefräßt sind in gleichen Abständen (von in der vorliegenden Maschine 18 mm). Um 1, 2, ... oder 9 mal diesen Abstand hat sich der Schieber c nach hinten oben zu bewegen, wenn der durch die Kapseln eingesetzte Multiplikand mit 1, 2, ... oder 9 multipliziert werden soll. Gleichzeitig geht dann der am Querstab d^5 befestigte Zeiger B auf der rechts vorn gelegenen Skala A von dem Punkt, bei welchem in der rechten mit M (Multiplikation) bezeichneten Zifferreihe die 0 steht, auf den mit 1, 2, ... 9 bezeichneten Punkt fort.

Während die bisherigen Rechenmaschinen die irgendwie gebildeten Teilprodukte je auf einen Zifferträger übertrugen, welcher, kreisförmig, nur in sich zurücklaufend 0 bis 9 angab, und sprungweise oder stetig mit jedem Durchlaufen dieser 10 Ziffern einen Fortgang des links folgenden Zifferträgers um 1 bewirkte, zerlegt sich in der hier zu beschreibenden Maschine von selbst jedes Teilprodukt in einen durch 10

teilbaren Teil und einen positiven oder negativen einziffrigen Rest. Dieser Rest geht auf den unmittelbar zugehörigen Zifferträger über und bestimmt sich so, daß dieser Zifferträger weder 9 noch 0 zu überschreiten braucht, und der Faktor von 10 in dem anderen Teil geht unmittelbar auf den links folgenden Zifferträger über. Diese Einrichtung ermöglicht den Gebrauch von Zifferstäben statt Zifferrädern, womit unter anderem auch die Einrichtung automatischer Kopierung erleichtert wird, und leistet automatisch, was für bloße Addition und Subtraktion und mit bewußter Unterscheidung zweier Fälle der von D'Ocagne (Le calcul simplifié, 1re éd. p. 6) beschriebene Apparat von Troncet leistet.

Entsprechend einer Äußerung von Leibniz, welcher im Brief an Tschirnhaus, März 1694, eine Maschine sine rotis als wünschenswert erklärt (Werke, herausgeg. von Gerhardt) wähle ich hier für die zweierlei Maschinenelemente von doppelter Bewegung, welche zu den genannten Übertragungen für jede Stelle nötig sind, zwei Storchschnäbel wie, Fig. 1, den rechten $C^1D^1E^1F^1$ und den linken mit den nur in der Zeichnung zur Unterscheidung breiter angenommenen Stäben G^1, H^1, I^1, K^1. Die Stifte h^0, k^1, m^1, liegen immer in einer Ebene, die Mittelpunkte der in Fig. 1 sie darstellenden Kreise in einer Geraden, und das Teilungsverhältnis $\frac{h^0m^1}{k^1m^1}$, welches ich im allgemeinen mit β bezeichne, ist konstant, in Fig. 1 gleich $\frac{35}{8}$. Das Analoge gilt von den Stiften, beziehungsweise Punkten i^1, h^1, k^1 im linken Storchschnabel, dessen Stift h^1 bei der angenommenen Lage in der Verlängerung des Stiftes h^0 liegt, also in Fig. 1 verdeckt ist. Das sonst mit γ bezeichnete konstante Teilungsverhältnis $\frac{i^1k^1}{i^1h^1}$ ist hier $= \frac{16}{7}$. Mit je um 1 vergrößerten Indexen gilt das Gesagte auch je für die links folgenden Stellen, abgesehen davon, daß Stift h^0 allein am Gestell b fest ist wie auch der dem k^1 analoge Stift in dem links letzten, dem $G^1H^1I^1K^1$ analogen Storchschnabel am Gestell b fest ist. Die Stäbe und Stifte der links auf das erste folgenden Storchschnabelpaare sind bei der in Fig. 1 angenommenen Nulllage von den erstgenannten gedeckt. Die Stifte m^1, m^2, m^3, ... sind in Schiebern n^1, n^2, n^3, ... fest, welche an festen den Leitungsstäben b^0 parallelen Stäben gleiten können, ebenso sind die Stifte h^1, h^2, h^3, ... an Zackenstäben g^1, g^2, g^3, ... fest, welche ebenfalls an zu den erstgenannten parallelen, am Gestell b festen Stäben gleiten können. Durch die Stifte h^0 und m^1, h^1 und m^2 usw. sind auch den Stiften k^1, k^2, usw. ihre Wege gewiesen, ebenfalls parallel den Stäben b^0, dann durch die Stifte k^1 und h^1, k^2 und h^2 usw. den Stiften i^1, i^2 usw., durch welche die Stäbe H^1, H^2, ... den Kapseln e^1, e^2, ... angegliedert sind. Für den Fall, daß infolge kleiner Verbiegungen oder sonstiger

Ungenauigkeiten die hiermit gegebenen zweierlei Führungen der Stifte i^1, i^2, ... nicht absolut genau übereinstimmen und dadurch Klemmungen entstehen sollten, ist senkrecht auf die Führung den Stiften i^1, i^2, ... oder schon den Kapseln e^1, e^2, ... ein minimaler Spielraum frei gelassen.

Bleibt der Zackenstab g^1, also auch der Stift h^1, unbewegt, so ist in der ersten Stelle nur eine *Bewegungsart* möglich, welche ich die *erste* nenne. Mit der Bewegung der Kapsel e^1 um eine Wegeinheit ($\frac{9}{4}$ mm) verbindet sich dann die $(1-\gamma)$fache, also bei dem angenommenen Wert $\frac{16}{7}$ von γ entgegengesetzt gerichtete Bewegung des Stiftes k^1, welcher die zwei Storchschnäbel der ersten Stelle miteinander verbindet, durch dessen Bewegung um $1-\gamma$ also eine Bewegung des Stiftes m^1 und Schiebers n^1 um $\frac{(1-\gamma)\cdot\beta}{\beta-1}$, wofür ich die Bezeichnung α gebrauche, bewirkt wird. Der Schieber n^1 besitzt nun einen nach oben vorn abstehenden Zahn, der zum Eingriff in die Verzahnung an dem Zifferstab f^1, wie in Fig. 2 angenommen, oder f^2, f^3, ... bestimmt ist. Diese in einem seitlich verschiebbaren Rahmen f parallel den Stäben b^0 geführten Zifferstäbe tragen in Abständen von α Wegeinheiten, hier also von $\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{3}$ mm von vorn unten nach hinten oben fortlaufend die Ziffern 0, 1, ... 9 zur Ablesung an der hinteren Kante der Platte f^0 am Rahmen f, bei welcher in Fig. 1 die Ziffer 4 steht, und in der Verlängerung der Zifferstäbe nach hinten oben sind in gleichen Abständen nochmals die gleichen Ziffern aus weichem Kautschuk zur Kopierung angebracht. Durch Bewegungen der ersten Art, gleichzeitig analog in allen Stellen mit der Bewegung des Schiebers c verbunden, könnten also alle Teilprodukte aus demselben Multiplikator gleichzeitig je zu den vorher durch die Zifferstäbe f^1, f^2, ... dargestellten Ziffern addiert oder von ihnen subtrahiert werden, könnte also das Produkt aus dem ganzen vielziffrigen Multiplikanden in eine Multiplikatorziffer addiert oder subtrahiert werden, wenn dabei auf den Zifferstäben nicht die 9 oder die 0 überschritten werden müßte.

Wenn dagegen Schieber n^1 mit Stift m^1 unbewegt bleibt, oder doch von seiner Bewegung abgesehen wird, so verbindet sich mit der Bewegung des Stiftes i^1 die *zweite Bewegungsart*. Der Fortgang von i^1 um je eine der genannten Wegeinheiten (von $2\frac{1}{4}$ mm) bewirkt dann, da auch k^1 dann als ruhend anzunehmen ist, den Fortgang des Stiftes h^1 und Zackenstabes g^1 um $\frac{\gamma-1}{\gamma}$, (hier $2\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}$ mm), und dieser, wenn auch Stift k^2 als ruhend angenommen wird, den Fortgang des Stiftes m^2, Schiebers n^2 und des dem Obigen analog von diesem mitgenommenen Zifferstabes f^2 um $\frac{\gamma-1}{\gamma}\cdot\frac{1}{1-\beta}$, (hier um $2\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{8}{27}$ mm). Die Anpassung

an das Dezimalsystem erfordert nun, daß diese Größe $\frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1 - \beta}$ der 10. Teil der oben für f^1 gefundenen $\frac{(1 - \gamma) \cdot \beta}{\beta - 1}$, daß also $\beta \cdot \gamma = 10$ sei, sodaß α, das Verhältnis der Ziffernabstände zu der Wegeinheit der Kapseln, die Vergrößerung, $= \frac{\beta - 10}{\beta - 1}$, (hier $= -\frac{5}{3}$) wird. Die Abstände der Zacken an den Zackenstäben g^1, g^2, ... sind so gewählt, daß bei der zweiten Bewegungsart dem Fortgang eines Stiftes wie i^1 um 10 Wegeinheiten, also dem (hier entgegengesetzten) Fortgang des zugehörigen Zifferstabes wie f^2 um einen Zifferabstand der Fortgang des Zackenstabes g^1 um einen Zackenabstand entspricht. Durch solche Bewegungen zweiter Art kann der Faktor von 10 in einem durch 10 teilbaren Teil des rechts ersten Teilprodukts unmittelbar auf den rechts zweiten Zifferstab übertragen werden; und das Analoge gilt für je zwei benachbarte folgende Stellen.

Eine *dritte Bewegungsart*, bei welcher der Stift i^1, also die Kapsel e^1 unbewegt bleibt, läßt sich als zusammengesetzt ansehen aus einer Bewegung der ersten Art mit einer der zweiten, bei welcher die Kapsel e^1 mit Stift i^1 wieder um ebensoviel zurückgeht. Die Bewegung des Stiftes m^1 und des vom Schieber n^1 mitgenommenen Zifferstabes, etwa f^1, ist dann entgegengesetzt gerichtet und 10mal so groß als die des Stiftes m^2, Schiebers n^2 und des von diesem mitgenommenen Zifferstabes. Diese dritte Bewegungsart, welche natürlich nicht mit Bewußtsein eingeleitet zu werden braucht, sondern im Bedarfsfall von selbst eintreten muß, dient dazu, Bruchteile von Zifferabständen, Zehntel derselben, um welche bei der zweiten Bewegungsart der Weg des Zifferstabes f^2 von einer ganzen Zahl abweichen kann, auf einen ganzen Zifferabstand zu ergänzen oder durch Rückbewegung zu beseitigen, je nachdem nämlich in dem einen oder dem anderen Fall Stab f^1 durch die entgegengesetzte zehnfache Bewegung von einer der Ziffern 0, 1, ... 9 wieder auf eine derselben kommen kann. Da bei der zweiten wie auch der dritten Bewegungsart die ganze oder gebrochene Zahl von Zifferintervallen, um welche im angenommenen Beispiel Stab f^2 fortgeht, mit der Zahl von Zackenabständen übereinstimmt, um welche dabei in entgegengesetzter Richtung Stab g^1 fortgeht, so kann der naturgemäße Wunsch, daß schließlich alle Zifferstäbe nur um ganze Anzahlen von Zifferintervallen fortgegangen sind, dadurch erfüllt werden, daß man bewirkt, daß bei beiden Bewegungen zusammen, welche übrigens nicht nur nacheinander, sondern auch gleichzeitig stattfinden können, die Zahl der Zackenabstände, um welche Stab g^1 fortgegangen ist, eine ganze wird. Da bei der dritten Bewegungsart der Schieber c, also die Kapseln e^1, e^2, ... und

Stifte i^1, i^2, ... ruhen, und das für die erste Stelle Beschriebene ebenso für die folgenden gilt, so muß für diese Bewegungsart noch eine besondere, und zwar am besten eine jederzeit bereite Kraft mitwirken, welche automatisch im Bedarfsfall ausgelöst wird. Bei der vorliegenden Ausführung ist dazu einfach die Schwere der ohnehin nötigen Maschinenteile gewählt. Dadurch, daß man dieselben nicht senkrecht fallen, sondern in geneigten Richtungen gleiten läßt, wird die sonst zu lästigen und schädlichen Stößen führende Geschwindigkeit gemildert und die bequeme pultförmige Aufstellung ermöglicht.

Zur Vermeidung unnötigen Hin- und Hergehens der Zifferstäbe, unnötigen Ausrückens und Wiedereinfallens der die Zackenstäbe g^1, g^2, ... arretierenden Sperrhaken l^1, l^2, ..., sowie dazu, daß man nicht für Addition und Subtraktion der Teilprodukte zweierlei die Zackenstäbe g^1, g^2, ... nach entgegengesetzten Richtungen hin sperrende Sperrhaken nötig hat, dient noch eine *vierte Bewegungsart*, bei welcher die Stifte m^1, m^2, ... unbewegt bleiben, wie bei der ersten die h^1, h^2, ..., bei der zweiten die k^1, k^2, ..., bei der dritten die i^1, i^2, ... unbewegt blieben. Bei der Division könnte auf diese vierte Bewegungsart verzichtet werden, weil die eingeführten Sperrhaken l^1, l^2, ... unmittelbar die bei der Subtraktion nötigen Sperrungen ausführen, nicht aber bei der Multiplikation, wenn man nicht noch eine zweite Art von Sperrhaken einführt. Ich beschränke mich nun hier darauf, das Verfahren mit Benützung dieser vierten Bewegungsart zu beschreiben.

Bei der Multiplikation des eingesetzten Multiplikanden mit einer Ziffer, zunächst etwa der Einerziffer des Multiplikators, samt Addition des Produktes zu der durch die anfänglichen Stellungen der Zifferstäbe f^1, f^2, ... dargestellten Zahl sollen die Zähne an den Schiebern n^1, n^2, n^3, ... in die Verzahnungen an den Zifferstäben f^1, f^2, f^3, ... eingreifen und ist der Schieber c mittels des Riegels c^1, von der in Fig. 1 und 2 dargestellten Nulllage aus nach hinten oben zu verschieben, bis der am Querstab d^5 befestigte Zeiger B auf den der Multiplikatorziffer entsprechenden Punkt der Skala A deutet, worauf der Riegel c^1 in die entsprechende Nute des Stabes b^1 einschlagen kann. Durch diese Bewegung des Schiebers c ist zwar die Bewegung der Kapseln e^1, e^2, e^3, ... und Stifte i^1, i^2, i^3, ..., nicht aber die der Zifferstäbe vollständig bestimmt. Denn, da Bewegungen der Zackenstäbe g^1, g^2, g^3, ... nach oben hinten durch die Sperrhaken l^1, l^2, l^3, ... nicht gehindert werden, bleiben Bewegungen der zweiten Art neben oder anstatt Bewegungen der ersten Art noch möglich. Es ist nun am Gestell b um zwei horizontale Zapfen wie M^0 drehbar ein Rahmen M angebracht und sind auf den horizontalen runden Querstab p desselben in den gleichen Ent-

fernungen (12 mm) wie die Kapseln e^1, e^2, ... und Zifferstäbe f^1, f^2, ... entsprechend durchlochte Stäbchen P^1, P^2, ... aufgesteckt, welche nach Bedarf durch Drehung um denselben in zweierlei Lagen, eine wirksame, wie in Fig. 1, 2 die P^1 bis P^9 oder die unwirksame wie in Fig. 1, 2 die P^{10}, P^{11}, P^{12} gebracht werden können. In der wirksamen Lage gleitet ihr hinterer Rand, wenn der Rahmen M nach hinten oben gedreht wird, auf der schon genannten am Rahmen f festen Platte f^0, welche für jeden der Zifferstäbe f^1, f^2, ... je einen Spalt besitzt, durch den ein am vorderen Ende dieses Zifferstabes befestigter Stift hindurchgeht. Mittels dieses Stiftes wird dann durch das wirksame Stäbchen der betreffende Zifferstab, wie er auch vorher gestanden sein mag, in seine Nullstellung geschoben, was eine Bewegung der dritten Art in jeder Stelle ergibt. Dann wird er in dieser Stellung gehalten, bis die Bewegung des Schiebers c nach hinten oben vollendet ist, mit welcher sich Bewegungen der Stifte i^1, i^2, ..., h^1, h^2, ..., k^1, k^2, ... von der vierten Art verbinden, wie sie anfangs auch gleichzeitig mit den ebengenannten Bewegungen der dritten Art stattfanden. Bewirkt wird nämlich die Drehung des Rahmens M nach oben hinten schon mittels der Bewegung des Schiebers c um das erste Nuteninterval, während welcher der Rahmen mittels eines beim Wiedervorgehen unwirksamen Sperrkegels von einem Ansatz des Riegels mitgenommen wird. Bis zur Erreichung der beschriebenen Endlage wird dann der Rahmen M von einer Sperrfeder s festgehalten, sodaß die auf null geschobenen Zifferstäbe zunächst nicht wieder hinabsinken können.

Von den Stiften k^1, k^2, ... werden an ihnen feste, ebenso benannte kleine runde Scheibchen getragen, an welchen bei der in Fig. 1 und 2 dargestellten Anfangslage der sonst auf dem festen Stab b^2 gleitende Querstab des Rahmens Q anliegt. Dieser Rahmen Q ist an den Rahmen R angegliedert, der um zwei am Gestell b feste Zapfen wie r etwas drehbar ist. Die soeben beschriebenen Bewegungen der dritten und vierten Art konnten durch diesen Querstab nicht gehindert werden, weil bei ihnen die direkt erzwungenen Bewegungen der Stifte n^1, n^2, ... und i^1, i^2, ... nur nach hinten oben gingen und ebenso gerichtete Bewegungen der Stäbe g^1, g^2, ... nicht gehindert waren. Eben deshalb wären aber auch die beschriebenen Bewegungen dieselben geblieben, wenn während derselben der Querstab mit dem Rahmen R nach vorn unten ausgewichen wäre. Dies muß nun geschehen, wenn nach Erreichung der der Multiplikatorziffer entsprechenden Endlage des Schiebers c der Riegel c^1 nach links geschoben wird, sodaß er in die Nute eintritt, und mit einem nach oben gehenden Ansatz die Sperrfeder s ausrückt, oder, wie in Fig. 1 und 2 einen über dem Stab b^1 liegenden um einen festen

Zapfen an seinem vorderen Ende drehbaren, durch die schief laufende Feder t^1 nach rechts gedrückten Stab t nach links dreht, womit zugleich durch den auf Stab t feststehenden Pfosten t^2 die Sperrfeder s ausgerückt wird. Der Rahmen M, der Wirkung der Schwere überlassen, wird dann nach vorn unten wieder in seine ursprüngliche Lage gehen. Dann können auch die Zifferstäbe $f^1, f^2, \ldots$ mit den Schiebern $n^1, n^2, \ldots$ der Wirkung der Schwere folgen. Die auf Null geschoben gewesenen werden so weit nach vorn unten gehen, bis die zugehörigen in derselben Richtung gehenden Zackenstäbe $g^1, g^2, \ldots$ je von dem aufliegenden durch seine Schwere nach unten getriebenen Sperrhaken $l^1, l^2, \ldots$ am nächsten Zacken gehemmt werden. Nicht auf Null geschoben gewesene der Zifferstäbe können dabei auch durch die rechts vorausgehenden mit dem zehnfachen Moment sich senkenden um einen Bruchteil eines Zifferabstandes gehoben werden. Die sämtlichen Zifferstäbe stellen sich so genau auf eine der Ziffern 0, 1, ... 9, und diese Ziffern geben die gesuchte Summe der vorher eingesetzt gewesenen Zahl und des gebildeten Produkts aus dem eingesetzten Multiplikanden und der Multiplikatorziffer. Denn, wie beschrieben, lassen sich die stattgehabten Bewegungen der dritten und vierten Art als aus Bewegungen der ersten und zweiten Art zusammengesetzt ansehen. Bei der Gesamtheit der dann anzunehmenden Bewegungen der zweiten Art sind aber die Zackenstäbe $g^1, g^2, \ldots$ nur um ganze Anzahlen von Zackenabständen, also die Zifferstäbe $f^1, f^2, \ldots$ nur um ganze Anzahlen von Zifferabständen fortgegangen, entsprechend Vielfachen von 10 in dem rechts 1., 2., ... Teilprodukt, und die den positiven oder negativen Resten dieser Teilprodukte entsprechenden Bewegungen erster Art bei den Zifferstäben $f^1, f^2, \ldots$ betragen auch nur ganze Anzahlen von Zifferabständen. Die Anzahl der Zifferabstände, um welche ein Zifferstab $f^1, f^2, \ldots$ zuletzt von 0 nach vorn sinkt, kann nicht 10 erreichen, weil damit ein Vorsinken des Zackenstabes $g^1, g^2, \ldots$ um ein ganzes Zackenintervall verbunden wäre und dies als unmöglich daraus erkannt wird, daß dann der Zackenstab schon weiter oben wäre festgehalten worden.

Es ist nun noch von der Beseitigung eines Fehlers zu sprechen, welcher bei dem beschriebenen Verfahren sich einstellen könnte. Wenn z. B. bei der richtigen Endlage f^1, f^2 und f^3 auf 9 zu stehen kommen sollen, so kann man sich die Gesamtlage, bei welcher sie noch auf 0 standen, auch aus dieser Endlage durch solche Verschiebungen dieser Zifferstäbe von 9 auf 0 entstanden denken, bei welchen die Stifte i^1, i^2, i^3 unbewegt bleiben. Durch die Verschiebung des Stabes f^1 von 9 auf 0 wird nun aber nicht nur Stab g^1 um 0,9 Zackenabstände in derselben Richtung verschoben, sondern, insoweit f^2 und f^3 ruhen, auch Stab g^2

um 0,09 und Stab g^3 um 0,009 Zackenabstände. Kommt dazu darnach oder gleichzeitig noch die Verschiebung des Stabes f^2 von 9 auf 0, so gehen g^2 und g^3 um weitere 0,9, beziehungsweise 0,09 Zackenabstände in derselben Richtung fort und die Verschiebung des Stabes f^3 von 9 auf 0 bewirkt noch einen dritten Fortgang des Stabes g^3 um 0,9 Zackenabstände, sodaß also im ganzen f^1, f^2 und f^3 um beziehungsweise 0,9; 0,99 und 0,999 Zackenabstände nach hinten oben gegangen sind. So genau läßt sich aber der Mechanismus nicht herstellen, daß nicht der Erfolg so werden könnte als wenn hier 1 an Stelle von 0,999 stünde und selbst bei 0,99 bestände die gleiche Gefahr, sodaß dann also f^2 von der Stellung auf 0 nicht herabsinken könnte, weil Stab g^2 fälschlich oben zurückgehalten würde. Daß die Abweichung nicht ein volles Zehntel des Zackenabstandes betragen kann, also im angenommenen Beispiel nicht auch die Stäbe g^1 und f^1 fälschlich oben gehalten werden können, ist dagegen leicht sicher zu erreichen. Um auch in den anderen Fällen Abhilfe zu schaffen, gibt man je dem Sperrhaken l^1, l^2, ... außer dem den Stäben b^0 nahe parallelen die sperrende Kante tragenden Arm noch einen zu diesem senkrechten, nach vorn oben abstehenden und macht man die Zifferstäbe f^1, f^2, ... so lang daß, wenn sie die Stellung auf 0 nach hinten oben zu um einen kleinen Bruchteil δ eines Zifferabstandes überschreiten, sie an den genannten zweiten Arm eines Sperrhebels wie l^1, l^2, ... anstoßen, die geeignete Lage des Rahmens f vorausgesetzt, und daß sie bei einer solchen Überschreitung der 0 um einen gewissen größeren Bruchteil ε eines Zifferabstandes die Ausrückung des Sperrhebels vollenden. Wenn dann im angenommenen Beispiel Stab f^1 beim Wiedervorfallen des Rahmens M von 0 auf 9 vorgleitet, während infolge der fälschlichen Sperrung des Stabes g^2, also auch des Stiftes k^2 nicht auch Stift m^2 mit Schieber n^2 und Stab f^2 vorgleiten können, so bewirkt das Vorgleiten des Stabes g^1 mit dem Stift h^1 eine Bewegung des Schiebers n^2 mit dem Stab f^2 nach oben hinten. Diese Bewegung würde im angenommenen Beispiel bis zu 0,9 Zifferabständen reichen, wenn nicht schon bei dem kleineren Betrag von ε Zifferabständen der Sperrhaken l^2 durch den Stab f^2 ausgerückt würde, worauf auch die Stäbe g^2 und f^2 wieder vorsinken, der g^2 um den ganzen Zackenabstand, um den er fälschlicherweise anstatt um 0,99 desselben gehoben worden war. Der Stab f^2 geht nun mit dem Vorsinken des Stabes g^2 zunächst wieder in die Nulllage vor und mit dem Sinken desselben um die ferneren 0,9 Zifferabstände vollends von 0 auf 9. Mit dieser Bewegung des Stabes f^2 von 0 auf 9 verbindet sich wieder, wenn auch Stab g^3 fälschlich gesperrt war, um 1 statt 0,999 Zackenabstände nach hinten oben gegangen war, ein Fortgang des Stabes f^3 von 0 ins

Negative, und wenn dieser Fortgang auch nur ε statt 0,9 Zackenabstände betragen hat, wird auch der Sperrhebel l^3 ausgerückt, und geht Stab g^3 bis zum nächsten Zacken weiter vor, f^3 von 0 auf 9. Das Entsprechende gilt ebenso, wenn noch mehr als 3 benachbarte Stellen mit 9 besetzt sein sollen. Bei den Ziffern 8, 7, ... 1 kommt diese Schwierigkeit nicht vor. Bei 0 aber kann die entgegengesetzte Schwierigkeit vorkommen, daß ein Zacken eines Stabes g^1, g^2, ... bei seiner Verschiebung nach hinten oben von dem betreffenden Sperrhaken nicht mehr gefaßt wird, während er gefaßt werden sollte, daß er etwa nur um 0,999 oder nur um 0,99 eines Zackenabstandes anstatt um einen ganzen verschoben worden ist. Diese Gefahr kann man dadurch beseitigen, daß man die durch die Stäbchen P^1, P^2, ... auf 0 zu schiebenden Zifferstäbe zunächst noch um einen kleinen Bruchteil δ eines Zifferabstandes weiter schiebt, indem man den Rahmen M stoßweise hebt.

Nachdem in der beschriebenen Weise das Produkt addiert ist, müssen die Scheren, Kapseln und Storchschnäbel wieder in die Ausgangslage zurückgebracht werden, während die Zifferstäbe ihre Lage im Rahmen f behalten. Zu diesem Zweck zieht man den Riegel c^1 wieder nach rechts, sodaß er aus der Nute heraustritt. Mit dieser Verschiebung des Riegels c^1 nach rechts verbindet sich nun in naheliegender einfacher, in den Figuren aber nicht ersichtlich gemachter Weise eine Verschiebung des Rahmens f nach links um den halben Abstand der Zifferstäbe (um 6 mm), wodurch bewirkt wird, daß der Eingriff der Zähne an den Schiebern n^1, n^2, ... in die Zifferstäbe f^1, f^2, ... aufhört, wogegen andere seitlich zugeschärfte an einem Querstab u in den gleichen Entfernungen (12 mm) wie die Zifferstäbe angebrachte Zähne seitlich in die Verzahnung der Zifferstäbe eintreten und nicht nur eine Verstellung derselben verhindern, sondern sogar kleine einen kleinen Bruchteil eines mit dem Zifferabstand (3,75 mm) natürlich übereinstimmenden Zahnabstandes betragende Abweichungen korrigieren, sodaß sich diese nicht im Lauf der länger fortgesetzten Rechnung anhäufen können. Der Stab u ist für gewöhnlich in seiner Stelle durch eine Feder gehalten, kann jedoch mit Überwindung derselben um einen halben Stellenabstand nach links geschoben werden, sodaß seine Zähne genau hinter denen der Schieber n^1, n^2, ... liegen und die Zifferstäbe frei bewegt werden, insbesondere alle zugleich durch den Rahmen M auf 0 gestellt werden können. Damit, während die Zifferstäbe durch Stab u festgehalten werden und die Kapseln e^1, e^2, ... mit dem Schieber c wieder in die Anfangslage, wie in Fig. 1 und 2 vorgeschoben werden, auch die durch ihre eigene und die Schwere der Schieber n^1, n^2, ... getriebenen Stäbe g^1, g^2, ... ungehindert vorsinken

können, müssen die Sperrhaken l^1, l^2, ... sämtlich ausgerückt werden, was sich in einfacher Weise direkt mit der seitlichen Verschiebung des Rahmens f verbinden läßt, wie es in Fig. 1 und 2 dargestellt und auch dann möglich ist, wenn die seitliche Verschiebung des Rahmens f unabhängig vom Riegel c^1 direkt mit der Hand ausgeführt wird. Die Querstäbe T und U bilden mit zwei Paaren von Stäben wie U^1 und U^2 einen starren Körper, welcher um dieselbe Achse wie die Sperrhaken drehbar ist. An den vom Stab T nach vorn abstehenden stumpfen Keil T^1 drückt bei der geschilderten Zwischenlage des Rahmens f das abgerundete hintere Ende von je einem der Führungsstäbe der Zifferstäbe f^1, f^2, ..., und der dann mit dem Stab T nach hinten gedrückte Stab U nimmt die oberen Arme der sämtlichen Sperrhaken mit.

Während nun die Zifferstäbe außer Eingriff mit den Schiebern $n^1, n^2, \ldots$ sind, zum Beginn oder während der Wiedervorbewegung des Schiebers c muß der Querstab des Rahmens Q wieder nach hinten oben in die Lage wie in Fig. 1 und 2 gebracht werden, sodaß dann unter Mitwirkung der Schwere auch die Scheibchen und Stifte $k^1, k^2, \ldots$, also auch die Zackenstäbe $g^1, g^2, \ldots$ mit den Kapseln $e^1, e^2, \ldots$, schließlich wieder ihre ursprüngliche Lage annehmen. Dies geschieht bei der in Fig. 1 und 2 dargestellten Ausführungsform erst im letzten Teil der Vorbewegung des Schiebers c, während der Zeiger B an der Skala A von 1 auf 0 geht, dadurch daß der Riegel c^1 beiderseits an untere Fortsetzungen des Rahmens R stößt und dieselben mitnimmt. Die genaue Endlage des Rahmens R wird dabei durch Stellschrauben wie r^1 reguliert.

Das bisher speziell Beschriebene bezog sich auf die Multiplikation mit der rechts äußersten Ziffer, sagen wir der Einerziffer des Multiplikators. Bei dem in den Schulen üblichen Verfahren wird erst mit der Einer-, dann der Zehner-, dann der Hunderterziffer usw. multipliziert. Dies wäre hier ebenso möglich, es empfiehlt sich aber der Analogie mit der Division wegen und behufs sukzessiver Näherung mehr die umgekehrte Reihenfolge. War z. B. mit der Hunderterziffer zu multiplizieren, so hatte man die Schieber $n^1, n^2, \ldots$ nicht, wie bisher gesagt, mit den Zifferstäben $f^1, f^2, \ldots$, sondern mit den $f^3, f^4, \ldots$ in Eingriff zu bringen, während die f^1 und f^2 mit einer Leiste im Eingriff sind, welche eine Fortsetzung des Stabes u nach rechts bildet. Nach der beschriebenen Bewegung des Riegels c^1 nach hinten oben und nach links, mit welcher die Multiplikation mit der Hunderterziffer vollendet war, und der darauf gefolgten Bewegung nach rechts und nach vorn unten ist dann der Schieber c wieder in seiner ursprünglichen Lage, und hierauf soll wieder eine Verschiebung des Rahmens f nach links

um einen halben Stellenabstand (um 6 mm) folgen, durch welche dann die Zifferstäbe $f^2, f^3 \ldots$ mit den Schiebern $n^1, n^2, \ldots$ in Eingriff gebracht werden, deren Zähne deshalb auch seitlich zugeschärft sind, und es ist dann alles vorbereitet wie erst beschrieben, nur jetzt für die Multiplikation mit der Zehnerziffer usw. Obgleich der Schieber c bei seiner vordersten Lage auf einen festen Anschlag trifft, ist doch im Stab b^1 auch die Nute 0 angebracht und soll in diese der Riegel c^1 einschlagen. Mit seinem Wiederaustritt läßt sich dann die eben genannte zweite seitliche Verschiebung des Rahmens f ebenso mechanisch verbinden wie die oben genannte erste.

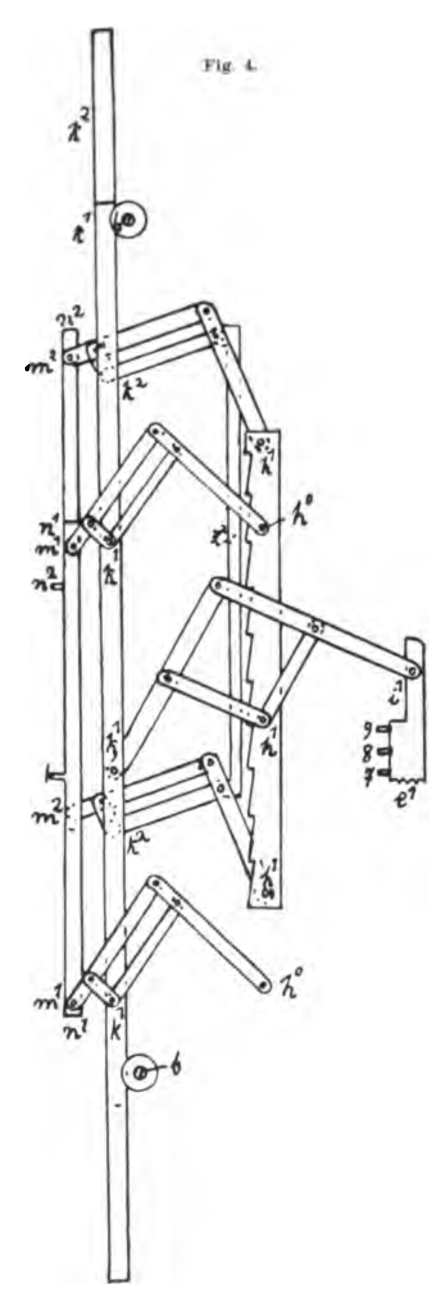
Zur *Division* ist natürlich der Dividend, wenn er sich nicht ohnehin durch unmittelbar vorausgegangene Rechnung ergeben hat, in die Zifferstäbe $f^1, f^2, \ldots$ einzuführen, entweder direkt mit der Hand oder nach vorheriger durch den Rahmen M auszuführender Nullstellung in der vorstehend beschriebenen Art nach Einsetzung in die Kapseln $e^1, e^2, \ldots$ Darnach ist in diese Kapseln der Divisor einzusetzen und ist, während die Zifferstäbe durch den Stab u gehalten, die Schieber $n^1, n^2, \ldots$ von ihnen frei sind, der Riegel c^1 von der Nute 0 zur Nute 10 zu schieben. Der Punkt der Skala A, bei welchem dann der Zeiger B steht, ist in der linken für die Division (D) bestimmten Zahlenreihe dieser Skala mit 0 bezeichnet, die in der Reihe M (Multiplikation) mit 9, 8, ..., 1 bezeichneten Punkte aber mit 1, 2, ..., 9. Nachdem der Riegel c^1 dann in die Nute 10 eingeschoben, wieder herausgezogen und dadurch analog wie bei der Nute 0 der Rahmen f in die Lage gebracht worden ist, daß die Schieber $n^1, n^2, \ldots$ mit den Zifferstäben $f^1, f^2, \ldots$ oder $f^2, f^3, \ldots$ oder $f^3, f^4, \ldots$ usw. in Eingriff sind, wenn die links erste Quotientenziffer etwa Einer oder Zehner oder Hunderter usw. bedeutet, ist der Schieber c nach vorn unten um 1, 2, ... oder 9 Nutenabstände zu schieben, wenn diese hier erst zu suchende Quotientenziffer 1, 2, ... oder 9 werden soll. Schon bei der vorbeschriebenen Schiebung des Riegels c^1 zur Nute 10 ist der Rahmen R entweder durch Druck auf seinen Seitenarm R^3 in seiner Lage erhalten oder, wie bei jeder anderen Schiebung zur Nute 10 wieder in die Lage wie in Fig. 1 und 2 gebracht worden. Der Riegel dreht nämlich beim Übergang von Nute 9 zu Nute 10 den einarmigen Hebel R^1 nach hinten, und dieser nimmt durch das Band R^2 den Rahmen R im gleichen Drehungssinn mit. Da also die Stifte $k^1, k^2, \ldots$ ihre Lage beibehalten oder wieder gewonnen haben, waren die Bewegungen nur von der zweiten Art, und, weil die von den Stiften $i^1, i^2, \ldots$ zurückgelegten Anzahlen von Wegeinheiten durch 10 teilbar waren, betrugen die Wege der Zackenstäbe nur volle Zackenabstände. Während dann der

Riegel c^1 wieder von Nute 10 bis Nute 9 vorgeht, wird der Rahmen R wieder frei und bewirkt der Riegel wieder eine Hebung des Rahmens M, durch welche, insoweit dessen Stäbchen P^1, P^2, ... in ihre wirksame Lage gebracht worden sind, die betreffenden Zifferstäbe, wie oben bei der Multiplikation beschrieben, auf Null geschoben werden. Würde z. B. der Divisor, dreiziffrig, in e^1, e^2, e^3 eingesetzt sein und der Dividend, sechsziffrig, in f^1 bis f^6, und würde man erkennen, daß der Quotient zwischen 100 und 1000 läge, so würde man, während n^1, n^2, n^3 mit f^3, f^4, f^5 in Eingriff wären, diese drei Zifferstäbe auf Null schieben und zugleich so lange den Riegel c^1 von einer Nute zur folgenden vorschieben, wie dabei nicht der Stab f^6 die Null überschreitet. Es ist dabei also kein Kopfrechnen oder sonstiges Nachdenken, sondern lediglich ein Beobachten des durch die stetig sich verändernde Stellung des Stabes f^6 dargestellten jeweiligen Restes nötig. Die genannte Hebung des Rahmens M wird hier durch den Doppelhebel M^1 bewirkt. Dieser ist nämlich unten mit einem Sperrkegel M^3 versehen, welcher dem nach hinten gehenden am Riegel c^1 festen Ansatz c^2 ausweicht, von dem nach vorn gehenden aber die geeignete Strecke weit mitgenommen wird. Der obere Arm des Doppelhebels M^1 nimmt dann durch ein Band M^2 den Rahmen M mit. Nach Ankunft bei der vorstehend bestimmten Nute wird dann der Riegel c^1 nach links in die Nute eingestoßen. Hiermit wird wie bei der Multiplikation der Rahmen M wieder frei, mit ihm sinken die auf 0 geschoben gewesenen Zifferstäbe nach vorn unten und mit ihnen die Schieber n^1, n^2, n^3 und Stäbe g^1, g^2, g^3, diese so weit, bis sie am nächsten Zacken von den Sperrhebeln l^1, l^2, l^3 gesperrt werden. Diese Zackenstäbe g^1, g^2, g^3 mußten im allgemeinen schon gleichzeitig mit dem Schieber c vorgehen, auch um mehr als nur einen Bruchteil eines Zackenabstandes. Die Sperrhebel l^1, l^2, l^3 werden jedoch dabei von selbst im Bedarfsfall durch die betreffenden Zifferstäbe, hier f^3, f^4, f^5 ausgerückt. Ist nämlich z. B. Stab g^1 gesperrt, während Stift i^1 nach vorn unten geschoben wird, so muß im gewählten Beispiel Stab f^3 von seiner Nulllage aus mit Schieber n^1 nach hinten oben ins Negative gehen, bis er dabei den Sperrhebel l^1 ausgerückt hat. Dann aber wird der Stab f^3 entweder bei langsamer Bewegung des Schiebers c durch die Schwere wieder in die Nulllage getrieben werden, sodaß der Sperrhebel l^1 wieder vorfällt und der Stab g^1, falls er so weit kommt, am nächsten Zacken wieder gesperrt wird und bei noch weiterem Vorgehen des Schiebers c das Gesagte sich wiederholt, oder es wird der Stab f^3 zunächst bei rascher Bewegung des Schiebers c jenseits der Nulllage bleiben und den Sperrhaken l^1 ausgerückt erhalten, äußersten Falls bis der Schieber c stillgehalten wird. Die Endlage wird nach Senkung des Rahmens M

immer die gleiche werden. Sollte sich zeigen, daß wider Erwarten der bleibende Rest noch größer als der Divisor ist, so hat man einfach um eine Nute weiter nach vorn mit dem Riegel c^1 zu gehen, sollte man dagegen zu weit gegangen sein, in welchem Falle die Zehnerübertragung bis an das linke Ende fortliefe, so geht man unter vorübergehender direkter Wiederhebung des Rahmens M wieder um einen Nutenabstand nach hinten. Der links letzte Zifferstab soll nie links von allen Schiebern $n^1, n^2, \ldots$ zu liegen kommen und soll nie durch ein Stäbchen wie die $P^1, P^2, \ldots$ auf 0 geschoben werden, weshalb bei ihm der Leitstift nicht über die Platte f^0 herausreicht. Bei ihm soll die Zifferreihe noch jenseits der 0 auf $-1, -2, \ldots$ fortgesetzt sein, wofür zum Ablesen und Abdrucken dieselben Zifferstängchen, nur umgedreht verwendet werden können, sodaß sie ɪ, ƨ, ... für $-1, -2, \ldots$ geben.

Auf den Zifferstäben $f^1, f^2, \ldots$ sind die Ziffern 0, 1, ..., 9 in Linkslettern aus weichem Gummi weiter hinten wiederholt zu direkt mechanischer Kopierung der Summen oder Differenzen der Produkte. Bei Senkung des dem Rahmen f angegliederten Rahmens V mit den das Papier v führenden Walzen und Querstäben gehen ersichtlich die für jeden Zifferstab einzeln vorhandenen farbgebenden Röllchen wie v^1 nach hinten und wird durch eine am Rahmen f feste Feder V^1 und das mit der treibenden Walze verbundene Zackenrad das Papier je um eine Zeile fortgeschoben. Ein ähnlicher schmälerer auch mit dem Rahmen f verbundener Apparat W, welcher immer links von den Kapseln $e^1, e^2, \ldots$ bleibt, dient hauptsächlich zur direkten Kopierung der Quotienten, deren Ziffern er einzeln bei Senkung je nach ihrer Feststellung aufnimmt. Die zugehörige Skala w mit Linkslettern aus weichem Gummi ist am Querstab d^2 befestigt. Für die Multiplikatoren, welche gegeben waren, hat diese direkte Kopierung nur den Zweck nachträglicher Kontrollierung, wozu, wenn man nicht wie auf der Skala A noch eine zweite Ziffernreihe anbringen will, auch die für die Quotienten dienen kann, wenn man 9, 8, ..., 1 statt 1, 2, ..., 9 liest. Zur Kontrolle der eingesetzten Multiplikanden oder Divisoren könnte man ähnliche Letterstreifen vorn mit den Kapseln $e^1, e^2, \ldots$ verbinden, ebenfalls mit Zifferabständen von 2 Wegeinheiten ($4\frac{1}{2}$ mm) und, wie ich schon in D.R.P. 49121 beschrieben, an der geeigneten Querlinie abdrucken, während der Riegel c^1 in die Nute 2 eingeschlagen ist. Ersatz für diese im abgebildeten Exemplar weggelassene Einrichtung kann eine besondere Übertragung in die Stäbe $f^1, f^2, \ldots$ geben.

Die mitgeteilten Prinzipien, namentlich der Zehnerübertragung, lassen sich auch bei bloßen Additions- und Subtraktionsmaschinen verwenden, auch bei denjenigen, auf welche nach der Bolléeschen Ein-



richtung die allgemeinen Rechenmaschinen zurückkommen. Die mit der Rückführung der Zifferträger f^1, f^2, ... auf Null verbundenen Bewegungen lassen sich wie bei der Burroughsschen Additionsmaschine auch wieder zur Darstellung der Summen der somit ausgelöschten Zahlen verwenden. Gleitende Bewegungen werden künftig mehrfach durch rollende ersetzt.

Will man die Verdoppelung der Storchschnäbel ersparen, so bringt man an den Stäben n^1, n^2, ... nur vorn einen Stift m^1, m^2, ... an und läßt ihren hinteren, den Zahn tragenden Teil auf Rollen aufliegen, welche einer gemeinsamen quer durchlaufenden Achse aufgesteckt sind. Durch Heben und Senken dieser Achse kommen die Zähne in und außer Eingriff mit den Zifferstäben. Gleichzeitig senkt und hebt sich eine querlaufende Leiste, welche in der Zwischenzeit, insbesondere während der seitlichen Verschiebung in die Zifferstäbe eingreift. Ebenso läßt man dann die hinteren Teile der Stäbe g^1, g^2, ... auf Stiften gleiten, welche von den Längsarmen der Hebel l^1, l^2, ... seitlich abstehen und in Längsspalte der Stäbe g^1, g^2, ... hineinreichen, deren Zacken sich nun auf ihrer Unterseite befinden, und an eine feste querlaufende scharfkantige Leiste anstoßen, solange nicht Stab g^1, g^2, ... durch Hebel l^1, l^2, ... ausgerückt wird.

Fig. 4 gibt für $y = z$ eine Einrichtung, bei welcher die Stäbe g^1, g^2, ... und n^1, n^2, ... frei durch die oberen, hier verdoppelten und paarweise durch Stängchen wie s^2 miteinander verkuppelten Storch-

schnäbel getragen werden, die Stifte $i^1, i^2, \ldots$ wie bisher und die hier je drei Stifte $k^1, k^2, \ldots$ durch ebenfalls mit $k^1, k^2, \ldots$ bezeichnete Längsstangen, welche auf je zwei Rollen liegen, die sämtlich auf zwei feste Achsen b aufgesteckt sind.

Würzburg, im Dezember 1904.

Numerische Berechnung der Hauptachsen einer Fläche zweiter Ordnung.

Von C. Runge in Hannover.

Um bei einer quadratischen Form der drei rechtwinkligen Raumkoordinaten durch bloße Drehung des Koordinatensystems die drei Produkte der Veränderlichen wegzuschaffen, sodaß nur die quadratischen Glieder übrig bleiben, kann man auf die folgende Weise verfahren.

Es sei

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + ezx + fxy$$

die gegebene quadratische Form der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z. Dreht man nun das Koordinatensystem z. B. um die z-Achse, so bleibt c ungeändert; a, b, d, e, f dagegen ändern sich. Wenn man mit d', e', f' die neuen Werte von d, e, f und mit α den Drehungswinkel bezeichnet, positiv in dem Sinne von der positiven x- zur positiven y-Achse gerechnet, so ist:

$$f' = f\cos 2\alpha - (a-b)\sin 2\alpha, \qquad \begin{array}{l} d' = d\cos\alpha - e\sin\alpha, \\ e' = d\sin\alpha + e\cos\alpha \end{array}$$

$$(\text{demnach } d'^2 + e'^2 = d^2 + e^2).$$

Wenn man nun den Drehungswinkel so bestimmt, daß f' verschwindet, so wird

$$d'^2 + e'^2 + f'^2 = d'^2 + e'^2 = d^2 + e^2.$$

Nun sei f dem absoluten Betrage nach größer oder wenigstens nicht kleiner als d und e. Dann ist $\frac{d^2+e^2}{2} \leqq f^2$ und mithin

$$d^2 + e^2 + f^2 \geqq \tfrac{3}{2}(d^2 + e^2)$$

und somit

$$d^2 + e^2 + f^2 \geqq \tfrac{3}{2}(d'^2 + e'^2 + f'^2).$$

Wäre eine der beiden Größen d oder e gleich Null, z. B. $e = 0$, so würde sogar $d'^2 + e'^2 + f'^2 = d'^2 + e'^2 = d^2$ und daher

$$d^2 + e^2 + f^2 \geqq 2d^2 \quad \text{und} \quad d^2 + e^2 + f^2 \geqq 2(d' + e'^2 + f'^2).$$

Wiederholt man die Operation, indem man das Koordinatensystem jedesmal um eine solche unter den Koordinatenachsen dreht, daß der größte von den Koeffizienten der Produkte der Veränderlichen zum Verschwinden gebracht wird, so vermindert sich fortgesetzt die Summe der Quadrate dieser Koeffizienten, und zwar, da von dem zweiten Schritt an immer einer der Koeffizienten Null ist, so vermindert sich die Summe der Quadrate bei jedem Schritt mindestens auf die Hälfte.

Auf diese Weise bringt man es in kurzer Zeit dahin, daß die Glieder, welche die Produkte der Veränderlichen enthalten, gegen die quadratischen Glieder vernachlässigt werden können. Nach einem geeigneten Schema rechnend kann man die Rechnung bequem und rasch ausführen.

Wenn um die z-Achse gedreht werden soll, so wird der Drehungswinkel α, den wir zwischen -45^0 und $+45^0$ voraussetzen können, aus der Gleichung $\frac{f}{a-b} = \operatorname{tg} 2\alpha$ gewonnen. $a > b$ vorausgesetzt, wird dann

$$a' = a + \frac{f}{2}\operatorname{tg}\alpha,\quad b' = b - \frac{f}{2}\operatorname{tg}\alpha,\quad d' = d\cos\alpha - e\sin\alpha,\quad e' = d\sin\alpha + e\cos\alpha.$$

Da $\operatorname{tg}\alpha$ dasselbe Zeichen wie f hat, so ist $\frac{f}{2}\operatorname{tg}\alpha$ immer positiv. Daraus folgt, daß bei der Transformation die Größen a und b auseinanderrücken. Vom zweiten Schritte an ist eine der beiden Größen e, d gleich Null, sodaß sich die Ausdrücke von d' und e' entsprechend vereinfachen.

Ich verfahre dabei nach dem folgenden Schema:

x^2	y^2	z^2	yz	zx	xy
a	b	c	d	e	f
$\frac{f}{2}\operatorname{tg}\alpha$	$-\frac{f}{2}\operatorname{tg}\alpha$		$d\cos\alpha$ $-e\sin\alpha$	$d\sin\alpha$ $e\cos\alpha$	
a'	b'	c	d'	e'	0

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{f}{a-b}$ $\quad \alpha = \ldots$

Wenn $b > a$ ist, so lasse ich x und y die Plätze tauschen, sodaß die Kolonne für y^2 vor die von x^2 und die Kolonne für zx vor die für yz tritt. Dann steht immer die positive Korrektur $\frac{f}{2}\operatorname{tg}\alpha$ links, die negative $-\frac{f}{2}\operatorname{tg}\alpha$ rechts. Dreht man um eine der andern Achsen, so gilt das analoge Schema, das ich nicht besonders hinzusetzen brauche.

Ein Beispiel wird zeigen, wie leicht man zum Ziele gelangt. Ich nehme dabei an, daß die Genauigkeit des Rechenschiebers ausreicht.

x^2	y^2	z^2	yz	zx	xy	
7.05	4.98	2.97	1.99	6.03	4.01	$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{6.03}{4.08}$ $\alpha = 28^0.0$
			1.76		0.93	
1.60		− 1.60	− 1.88		3.54	
8.65	4.98	1.37	− 0.12	0.00	4.47	$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4.47}{3.67}$ $\alpha = 25^0.3$
1.06	− 1.06		− 0.11	− 0.05		
9.71	3.92	1.37	− 0.11	− 0.05	0.00	

Die folgenden Schritte ändern die drei ersten Zahlen in den hingeschriebenen Ziffern nicht mehr. Denn der nächste Schritt gibt $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-0.11}{2.55}$, also $\frac{f}{2} \operatorname{tg} \alpha < 0.002$. Das Resultat der Transformation ist also, wenn man die neuen Koordinaten wieder mit x, y, z bezeichnet:

$$9.71 x^2 + 3.92 y^2 + 1.37 z^2.$$

Die Konvergenz des Verfahrens ist im allgemeinen sehr viel rascher als es die Formel $d^2 + e^2 + f^2 \geqq 2(d'^2 + e'^2 + f'^2)$ vermuten läßt. Sobald nämlich die Koeffizienten d, e, f klein gegen die Unterschiede von a, b, c werden, so wird die Korrektur $\frac{f}{2} \operatorname{tg} \alpha$ von zweiter Ordnung. Zugleich wird der Drehungswinkel klein von der ersten Ordnung, und damit wird, wenn z. B. f zum Verschwinden gebracht wird und $e = 0$ ist, der neue Wert von d sehr nahe gleich dem alten und der neue Wert von e ebenfalls von zweiter Ordnung klein. Nach einem weiteren Schritt müssen also die beiden nicht verschwindenden unter den Größen d, e, f mindestens von zweiter Ordnung klein sein.

Nachdem man die Koeffizienten der quadratischen Glieder auf diese Weise gefunden hat, werden die Richtungen der neuen Koordinatenachsen am besten aus den bekannten linearen Gleichungen gefunden:

$$\begin{aligned} ax + \frac{f}{2} y + \frac{e}{2} z &= \lambda x, \\ \frac{f}{2} x + by + \frac{d}{2} z &= \lambda y, \\ \frac{e}{2} x + \frac{d}{2} y + cz &= \lambda z, \end{aligned}$$

wo λ zur Bestimmung der Richtung der x-Achse gleich dem gefundenen Koeffizienten von x^2 zu setzen ist usw. Zur Ausführung der Rechnung sind nur zwei von den drei Gleichungen erforderlich. Die dritte kann zur Kontrolle dienen. So erhält man z. B. für den oben berechneten Fall zur Bestimmung der x-Achse

$$-2.66x + 2.00y + 3.02z = 0,$$
$$2.00x - 4.73y + 1.00z = 0,$$
$$3.02x + 1.00y - 6.74z = 0.$$

Die ersten beiden Gleichungen geben

$$x : y : z = 16.3 : 8.7 : 8.6,$$

was auch der dritten Gleichung genügt.

Mir scheint die hier vorgeschlagene Behandlung des Hauptachsenproblems der Flächen zweiter Ordnung aus zwei Gründen sich zu empfehlen. Erstens ist die Rechnung einfacher als die direkte Auflösung der Gleichung dritten Grades, von der die orthogonale Transformation auf eine Summe von Quadraten algebraisch abhängt. Zweitens ist das Verfahren aber auch theoretisch von Interesse. Denn da es die drei Wurzeln der Gleichung liefert, so enthält es zugleich einen neuen Beweis dafür, daß die Wurzeln reell sind.

Wie man ohne weiteres erkennt, ist das Verfahren auch auf quadratische Formen von beliebig vielen Veränderlichen anwendbar.

Hannover, im Mai 1904.

Neue Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie.

Von F. Ludwig in Greiz.

IV.

1. *C. C. Adams.* Variation in Jo. Proc. Amer. Assoc. for the Adv. of Sci. XLIX. 1900. 18 pp. 27 plates.

2. *P. Bachmetjew.* Über die Anzahl der Augen auf der Unterseite der Hinterflügel von Epinephele jurtina L. Allg. Zeitschr. für Entomologie VIII. 1903. p. 253—256.

3. *F. C. Baker.* Rib Variation in Cardium. Amer. Nat. 1903. XXXVII. p. 481—488.

4. *E. Ballowitz.* Über Hypomerie und Hypermerie bei Aurelia aurita. Arch. f. Entw. Mech. d. Organismen. 1899. VIII. p. 239—252.

5. *C. R. Bardeen* and *A. W. Elting.* A Statistical Study of the Variations in the Formation and Position of the Lumbo-sacral Plexus in Man. Anatom. Anz. XIX. 1901. p. 124—135, 209—238.

6. *W. Bateson, E. R. Saunders, R. C. Punnett, C. C. Hurst.* Experimental Studies in the Physiology of Heredity Experiments with Datura, Matthiola, Salvia Horminum, Ranunculus arvensis; Pisum sativum, Lathyrus odoratus and with Poultry. Report II of the Evolution Committee of the Roy. Society. London 1905. 154 pp.

7. *L. Camerano.* Lo studio quantitativo degli organismi ed il coefficiente somatico. Atti d. R. Accad. delle sci. di Torino XXXV. 1900. 22 pp.

8. *L. Camerano.* Lo studio quantitativo degli organismi e gli indici di variabilità, di variazione, di frequenza, di deviazione e di isolamento. Atti d. R. Accad. delle sci. di Torino XXXV. 1900. 19 pp.

9. *L. Camerano.* Lo studio quantitativo degli organismi e gli indici di mancanza, di correlazione e di asimmetria. Atti d. R. Accad. delle sci. di Torino XXXVI. 1901. 8 pp.

10. *L. Camerano.* Ricerche somatometriche in Zoologia Boll. dei Musei de Zool. e Anat. Comp. di Torino XVII. 18 pp.

11. *W. E. Castle.* Heredity of Coat Characters in Guinea-Pigs and Rabbits.

Published by the Carnegie Institution. Washington D. C. 1905. 78 S. u. 12 Fig. auf 6 Taf.

12. *C. Correns.* Über den Modus und den Zeitpunkt der Spaltung der Anlagen bei den Bastarden vom Erbsentypus. Bot. Zeitung. 1902. LX. p. 66—82.

13. *C. Correns.* Die Ergebnisse der neuesten Bastardforschungen für die Vererbungslehre. Ber. d. D. Bot. Ges. 1902. XIX. p. 71—94.

14. *C. Correns.* Scheinbare Ausnahmen von der Mendelschen Spaltungsregel für Bastarde. Ber. d. D. Bot. Ges. 1902. XX. p. 159—172.

15. *C. Correns.* Über Bastardierungsversuche mit Mirabilissippen. Ber. d. D. Bot. Ges. 1903. XX. p. 594—609.

16. *C. Correns.* Über die dominierenden Merkmale der Bastarde. Ber. d. D. Bot. Ges. 1903. XXI. p. 133—147.

17. *C. Correns.* Weitere Beiträge zur Kenntnis der dominierenden Merkmale und der Mosaikbildung der Bastarde Ber. d. D. Bot. Ges. 1903. XXI. p. 195—209.

18. *L. Cuénot.* Le loi de Mendel et l'hérédité de la pigmentation chez les souris. Arch. Zool. exp. et gén. 1902 p. XXVII; 1903 XXXIII—XLI.

19. *E. R. Cummings and A. V. Mauck.* A Quantitative Study of Variation in the Fossil Brachiopod, Platystrophia lynx. Amer. Jour. of Sci. XIV. Juli 1902. 9—16.

20. *C. B. Davenport.* Mendels Law ot Dichotomy in Hybrids Biol. Bulletin 1901. p. 307—310.

21. *C. B. Davenport.* The Statistical Study of Evolution. Popular Science Monthly 1901. LIX p. 447—460.

22. *C. B. Davenport.* Variability, Symmetry and Fertility in an Abnormal Species Biom. I 255—256. 1902.

23. *C. B. Davenport.* A Comparison of the Variability of Some Pectens from the East and West Coasts of the United States. Mark Anniversary Volume Article VI 1903 p. 121—136, plate IX

24. *C. B. Davenport.* Quantitative Studies in the Evolution of Pecten III Pecten opercularis from three localities of the British Isles. Proc. Amer. Accad. Arts and Sci. XXXIX, 1903, p. 123—159.

25. *Gertrudo Crotty Davenport.* Variation in the Number of Stripes on the Sea-Anemone Sagartia Luciae. Mark Anniversary Volume. 1903. Article VII p. 137—146, pl. X.

26. *C. B. Davenport.* Color Inheritance in Mice, Wonder Horses and Mendelism. Science 1904. Vol. XIX, N. 472 p. 110—114, N. 473 p. 151—153.

27. *C. B. Davenport.* Statistical Methods with special Reference to Biological Variation. Second revised Edition New York John Wiley u. Son 1904. 223 S.

28. *H. De Vries.* La loi de Mendel et les correcteurs constantes des hybrides. Compt. rend. de l'Acad. des Sci. Feb. 2 1903.

29. *L. Doncaster.* Experiments in Hybridization with special Reference to the Effect of Conditions on Dominance. Phil. Trans. B. CXCVI 1903 p. 119—173.

30. *Georg Duncker.* Symmetrie und Asymmetrie bei bilateralen Tieren. Arch. f. Entwicklgsmech. der Organismen von W. Roux. 1904, XVII. Bd. 4. H. p. 533—682.

31. *Carl Engberg.* The Degree of Accuracy of Statistical Data. University Studies, University of Nebraska 1903. III p. 87—100.

32. *Angel Gallardo.* Interpretation dinamica de la división cellular. Doktordissertation. Buenos Aires 1902. 103 p. 6 Fig.

33. *I. W. Harshberger.* The Limits of Variation in Plants. Proc. Acad. Nat. Sci. Philadelphia 1901, LIII p. 303—319.

34. *W. A. Kellermann.* Variation in Syndesmon thalictroides. Ohio Naturalist. 1901, p. 101—111, Pl 9.

35. *F. Ludwig.* Zur Biometrie von Chrysanthemum segetum. Aus der Festschrift zu P. Aschersons siebzigstem Geburtstage. Berlin. Gebr. Bornträger. 1904, XXV p. 296—301.

36. *F. Ludwig.* Die Mathematik im Walde. Greizer Zeitung 1904.

37. *F. Ludwig.* Der Aufbau des Waldes nach statischen Gesetzen. Weitere Abschnitte aus der Biometrie IX. Zeitschr. f. Math. u. naturw. Unterr. 1905, Heft 2—4. (p. 105 ff.)

38. *D. F. Macdougal.* Mutants and Hybrids of the Oenotheras. Carnegie Institution. Washington D. C. 1905. 57 S. u. 13 Fig.

39. *Metzger.* Der Wind als maßgebender Faktor für das Wachstum der Bäume. Mündener Forstliche Hefte III 1893, p. 35—86 mit 21 Fig.

40. *Metzger.* Studien über den Aufbau der Waldbäume und Bestände nach statischen Gesetzen. Mündener Forstliche Hefte. Heft 5 p. 61—74, Heft 6 p. 94—119, 1894; Heft 7, 1895, p. 45—97 mit 13 Fig.

41. *Metzger.* Form und Wachstum der Waldbäume im Lichte der Darwinschen Lehre. Allgem. Forst- und Jagdzeitung, herausgeg. von Prof. Dr. Tuisko Lorey, Frankfurt a. M., Juli 1896 p. 224—233.

42. *J. J. Prins.* De fluctuierende Variabiliteit van mikroskopische Structuren bij Plantem Grooningen 1904 (J. B. Wolters) Dr.-Dissert. 51 S.

43. *L. Rhumbler.* Mechanische Erklärungen der Ähnlichkeit zwischen magnetischen Kraftliniensystemen und Zellteilungsfiguren. Archiv für Entwicklungsmechanik 1903, Bd. XVI, p. 475—535.

44. *L. Rhumbler.* Zellenmechanik und Zellenleben. Vortrag geh. auf der Vers. d. Naturf. u. Ärzte zu Breslau 1904. (Umschau VIII 1904 N. 39, p. 764—770 mit 8 Figuren.)

45. *H. Rodewald.* Untersuchungen über die Fehler der Samenprüfungen. Arbeiten der Deutschen Landwirtschaftsgesellschaft Heft 101.

46. *Franz Schwarz.* Physiologische Untersuchungen über Dickenwachstum und Holzqualität von Pinus silvestris. Berlin 1899, Parey, 37? S., 9 Taf. u. 5 Textfig.

47. *George Harrison Shull.* Place Constants for Aster prenanthoides Contrib. from the Hyll Bot. Lab. XIV. Bol. Gag. 38. Nov. 1904. 333—375.

48. *P. Sonntag.* Die Pflanze als Baumeister. Prometheus N. 766, 1904, p. 593 ff.

49. *Sonntag.* Die Pflanze als Baumeister. Schriften der Naturforsch. Gesellsch. in Danzig. N. F. XI. Heft 1—2. 1904. p. LXV—LXVI.

50. — Mechanische Zweckmäßigkeiten im Bau der Äste unserer Nadelhölzer l. c. p. 126—133.

51. *R. M. Strong.* A Quantitative Study of Variation in the Smaller North-American Shrikes. Amer. Nat. 1901, XXXV, p. 271—298.

52. *Tine Tammes.* Ein Beitrag zur Kenntnis von Trifolium pratense quinquefolium de Vries. Bot. Ztg. 1904. Abt. I, S. 212—225. Über die Periodizität morphologischer Erscheinungen. Naturw. Rundschau 1903. S. 413.

53. *C. E. Wasteels.* Over de ligging der Maxima in Variatiecurve en het voorkomen der Fibonaccigetallen. Handlinger van het Vlaamsch Natuur en Geneeskundig Congres gehouden te Gent, 27. Sept. 1903.

54. *R. Weber.* Lehrbuch der Forsteinrichtung mit besonderer Berücksichtigung der Zuwachsgesetze der Waldbäume. 1891.

55. *S. R. Williams.* Variation in Lithobius forficatus. Amer. Nat. 1903, XXXVII, p. 299—312.

56. *H. C. Williamson.* On the Mackerel of the East and West Coasts of Scotland. Rep. Scottish Fisheries Board XVIII, 1900, p. 325—329.

Das kleine handliche Werkchen von Davenport (26) *„über die statistischen Methoden“* mit besonderer Berücksichtigung der biologischen Variation sollte nach einem Begleitschreiben zur ersten Auflage (1899) als Handbuch und Leitfaden zunächst für Anthropologen, Botaniker, Zoologen, Vertreter der Anatomie, Physiologie, Psychologie dienen, die sich mit *quantitativen* Untersuchungen der Spezies und der organischen Variation beschäftigen wollen; es sollte weiter ein Hilfsmittel sein für Landwirte, Soziologen, Meteorologen und andere statistische Praktiker. Es hat sich als solches vorzüglich bewährt, wie die nunmehr vorliegende um 75 Seiten vermehrte *zweite Auflage* beweist. In einfacher Sprache und ohne zu hohe mathematische Anforderungen werden in den ersten Kapiteln die statistischen Methoden Galtons und Pearsons mit Benutzung der zahlreichen neueren Abhandlungen des letztgenannten Forschers erörtert, die Formeln zur Berechnung der Frequenzkurven abgeleitet und die Ermittelung der Zugehörigkeit der Variationspolygone zu den verschiedenen Typen derselben an Beispielen gelehrt. Das IV. Kapitel behandelt die korrelative Variabilität und ein V. Kapitel in nahezu vollständiger Übersicht die bisherigen Ergebnisse auf den verschiedensten Gebieten der Biometrie bis auf die jüngeren Zweige der Homotypose, der Telegonie und des Mendelismus etc. Die zahlreichen Hilfstabellen bis zu den Logarithmen, trigonometrischen und Potenztafeln herab machen alle weiteren Hilfsmittel überflüssig. Selbst einige Blätter leeren Papieres und Koordinatenpapieres zur direkten Eintragung von Resultaten sind beigegeben. Bei dem niederen Preis ($ 1,50) wird das

zierliche mit dauerhaftem Einband in Goldschnitt versehene Taschenbuch bald Besitztum aller Biometer werden.

Ein neues eigenartiges Gebiet behandelt die umfang- und inhaltreiche Arbeit Dunckers *über Symmetrie und Asymmetrie* beim Menschen und den Tieren (30). Die bisher allein übliche stereometrische Betrachtungsweise der Symmetrieverhältnisse mit ihren Gleichungen aus der Kristallographie hat sich — wie dies bei den variabeln organischen Formen leicht verständlich ist — als unzureichend erwiesen. Nur Massenuntersuchungen mit Hilfe biostatistischer Methoden führen zum Ziel. Die nächste Aufgabe, die sich Duncker stellte, bestand darin, für die bunte Mannigfaltigkeit des Untersuchungsmaterials eine einheitliche Beschreibungsform zu finden, die übersichtlicher und kürzer ist als die Nebeneinanderstellung etwa von Kombinationsschematen und doch die in Betracht kommenden Eigenschaften auszudrücken vermag, wie bekanntlich für die typischen Variationspolygone nur wenige Bestimmungswerte ausreichen, auch ihre feineren Eigentümlichkeiten zum Ausdruck zu bringen. Es genügen schon je 4 Bestimmungswerte zur Kennzeichnung der beiden Variationsreihen, der Einzelmerkmale und der Differenzreihe des Merkmalpaares, nämlich das arithm. Mittel A, der Variabilitätsindex E, der dritte (β_3) und vierte (β_4) Momentquotient der betr. Reihe. Außer ihnen verwendet Duncker noch die prozentuale Differenzfläche (δ) der Variationspolygone der Einzelmerkmale als Maß der Verschiedenheit ihrer Variationsreihen, den Korrelationskoeffizienten (ϱ), sowie den Asymmetrieindex (α) des Merkmalpaares (da der statistische Begriff bilateraler Übereinstimmung zweier homologer Merkmale alle Übergangsstufen von vollkommener Symmetrie zur vollkommen rechts- oder linksseitigen Asymmetrie zuläßt). Duncker erörtert nach Ableitung der entsprechenden Ausdrücke die Praxis der vorkommenden Rechnungen und die Deutung der gefundenen Werte. Das Untersuchungsmaterial selbst erstreckt sich über 32 Paare verschiedenartiger bilateral-homologer Merkmale:

Die beidseitige Länge der proximalen Glieder von Zeigefinger, Mittelfinger, Ring- und Kleinfinger bei 551 Engländerinnen (nach Pearson und Whiteley). — Aus dem Tierreich: Zahl der Müllerschen Drüsen bei 2000 weibl. Schweinen (nach Davenport und Bullard). Acerina cornua L., Zahl der Brustflossenstrahlen, Länge der Kopfseiten, Länge der Mandibeläste. Zeus faber L., Zahl der Basalplatten der weichstrahligen Rücken- und Afterflossen (nach Bryne). Cottus gobio L., Zahl der Brustflossenstrahlen. Pleuronectus flesus L., (5 Merkmalpaare). Pimephales notatus Rafin., Schuppenzahl der Seitenlinien (Voris); ferner verschiedene Merkmale bei den Krebsen: Gelasimus pugilator Latr., Eriphia spimifrons Herbst und Portunus depurator L. und noch die Zahlen der Kieferzähne des Ringelwurmes Nereïs limbata.

Wir wollen nur an dem ersten Beispiel, der Länge der entsprechenden Fingerglieder an den 4 Außenfingern der beiden Hände, zeigen, wie sich bei der Untersuchung der Asymmetrieverhältnisse überall interessante Gesetzmäßigkeiten ergeben. Die Variationsreihen der paarweise zusammengehörigen Fingergliedlängen unterscheiden sich bei allen 4 Fingern durch die Lage ihrer Hauptgipfel. Von den proximalen Gliedern der bilateral homologen Finger ist das rechte durchschnittlich um eine halbe Varianteneinheit ($= {}^1/_8$ mm) länger als das linke und zwar differieren die Kleinfinger am

meisten, die Mittelfinger am wenigsten. Die größte prozentuale Differenzfläche ergibt sich für die Variationspolygone der Kleinfinger, die kleinste für die Mittelfinger. Die in allen Beispielen sehr intensive Korrelation der paarweise zusammengehörigen Merkmale erreicht bei den Mittelfingern den höchsten Grad, bei den Kleinfingern ist sie ein wenig niedriger als bei den anderen. Symmetrische Individuen machen in jedem Fall nur 42,7—46,0% der Gesamtheit aus und sind bezügl. der Mittelfinger am zahlreichsten, bezügl. der Zeigefinger am wenigsten zahlreich. Die Asymmetrieindices sind ziemlich beträchtlich. Am niedrigsten ist der der Mittelfinger, ihm folgt der Ringfinger, und die höchsten, die der Klein- und Zeigefinger, sind einander fast gleich. Die rechte Hand ist die kräftigere; dies zeigt auch die Prozentzahl der asymmetr. Individuen:

Prozentsatz.	Zeigef.	Mittelf.	Ringf.	Kleinf.	
linksseitig asymmetr. Individuen	9,66	9,48	8,80	9,07	%
rechtseitig „ „	47,64	44,56	45,92	47,25	%

In einem weiteren Kapitel gibt Duncker einige Gesammtresultate und allgemeine Folgerungen; er legt die Ursache der Kollektivsymmetrie und Kollektivasymmetrie, wie die der individuellen Symmetrie und Asymmetrie dar und erörtert sodann die Beziehungen zwischen bilateral-homologen und serial-homöotischen Merkmalen.

Teils *über die bisherigen biostatistischen Methoden*, teils *über neue Beiträge zur Theorie der Variationspolygone* handeln ferner die Arbeiten von Davenport (20, 21), Engberg (31), Camerano (7—10) — meines Wissens die ersten biostatistischen Arbeiten aus Italien — und Wasteels (53).

Die Arbeit von Wasteels (Gent) handelt über die Lage der Maxima in polymorphen Variationskurven und das Vorkommen der Fibonaccizahlen. Verf. schließt sich meinem Erklärungsversuch für die Fibonaccipolygone und verwandte Variationspolygone (Zeitschr. für math. u. naturw. Unterr. XIX, p. 321—338) an und gibt noch weitere Fälle der von mir angedeuteten möglichen Reihen an, die er jedoch, ohne meine Arbeit damals gekannt zu haben, selbständig entwickelt hat. Es sind darunter auch die Reihen, die die Hauptgipfel der Voglerschen Variationspolygone, die Zahl der Blütenstände vom Cornus mas, Cardamine pratensis etc. darstellen. Wir machen besonders die Fachkollegen, welche mathematischen Unterricht an höheren Schulen erteilen, auf die interessante Arbeit aufmerksam.

Von den weiter aufgeführten Abhandlungen, welche *wichtige Ergebnisse der statistischen Methoden auf biologischem Gebiet* zu Tage gefördert haben, beziehen sich auf Anthropologie die von Bardeen (5), auf Zoologie die von Camerano (10); insbesondere auf Meerschweinchen und Kaninchen (11), auf Fische (56), auf Schmetterlinge (1) und (2), auf andere Arthropoden (51), (55), auf Conchylien (3), (23), (24), Brachiopoden (19), Quallen (4), (25), auf Pflanzen (33), (34), (36), (42), (45), (47), (52). Auf die Mendelsche Lehre von den Bastarden und verwandte Gebiete beziehen sich die Arbeiten (11), (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18), (20), (26), (28), (29), (38).

Ein hochinteressantes Gebiet, dessen Bearbeitung bisher in der forstwissenschaftlichen Literatur versteckt blieb, das aber verdient zum mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht nach jeder Richtung hin herangezogen zu werden, ist der *Aufbau des Waldes und der Bäume nach*

mathematisch-statischen Prinzipien. Schon Schwendener hatte erkannt, daß „schön gewachsene große Fichtenstämme" völlig den Bau eines Trägers von gleichem Widerstand haben. Es ist aber das Verdienst von Metzger und nach ihm von Frank Schwarz, gezeigt zu haben, daß der Wind der maßgebende Faktor für das Wachstum der Bäume ist und daß der Aufbau des Waldes sich bis ins kleinste nach den Prinzipien der Statik verstehen und erklären läßt. Die diesbezüglichen Arbeiten sind in den Abhandlungen (37—41) und (46), (48—50), (54) niedergelegt. Ihnen schließen sich von weiteren Anwendungen physikalischer Gebiete zur Erklärung pflanzlicher und tierischer Formgestaltungen die Arbeiten von Rhumbler (43) und (44) an. Aus der letztzitierten Abhandlung dieses Verfassers sei nur als Beispiel hervorgehoben, daß der konstante Randwinkel von 125° der Kammerschalen des Wurzelfüßlers *Nodosaria soluta* Reuß ein prächtiges Beispiel für das „*zweite Kapillaritätsgesetz*" darstellt, nach dem die wandbildende flüssige Sarkode von der vorausgehenden Kammerwand festgehalten wird.

Bücherschau.

G. A. Maggi, Principii di stereodinamica, corso sulla formazione, l'interpretazione e l'integrazione delle equazioni del movimento dei solidi. Milano, Ulrico Hoepli, 1903. 263 S.

Im Jahre 1896 hatte Herr G. A. Maggi eine Grundlegung der Mechanik: *Principii della teoria matematica del movimento dei corpi* veröffentlicht, die sich sowohl durch die mathematische Strenge der Untersuchungen als auch durch die einheitliche Behandlung der festen, flüssigen und elastischen Körper auszeichnete. Während er sich dort auf die Darlegung der allgemeinen Theorie beschränkte, gibt er in dem vorliegenden Werke Einzelausführungen für *Systeme von starren Körpern.*

Die Verbindungen, in denen die Teile eines Systemes starrer Körper stehen, oder die *Fesselungen* des Systemes, wie der Verfasser sagt, sind entweder so beschaffen, daß zu ihrer Charakterisierung die Angabe der möglichen *Lagen* der Körper ausreicht, wie zum Beispiel bei einem festen Körper, der sich um einen festen Punkt dreht, sodaß jeder seiner Punkte von dem festen Punkte konstanten Abstand hat, oder daß sie sich auf die Bewegung selbst beziehen, wie zum Beispiel bei einem festen Körper, der auf einer festen Ebene rollt, sodaß die *Geschwindigkeit* des Berührungspunktes mit der Ebene stets Null ist. Die Fesselungen können ferner von der Zeit unabhängig sein oder sich mit der Zeit ändern; zum Beispiel kann jene feste Ebene eine gegebene Bewegung besitzen. Eine Fesselung der ersten Art wird analytisch dargestellt durch eine endliche Gleichung zwischen den je 6 Lagrangeschen Positionskoordinaten jedes der Körper des Systems und der Zeit. Bestehen daher nur Fesselungen der ersten Art, so läßt sich die Lage des Systems selbst durch die Angabe der Werte gewisser Lagrangescher Positionskoordinaten bestimmen, zwischen denen keine Bedingunggleichungen bestehen und die der Verfasser *freie* Koordinaten nennt. Es ist bekannt, wie man die Differentialgleichungen, denen die freien Koordinaten genügen, sofort herstellen kann. Ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn Fes-

selungen der zweiten Art bestehen, auch wenn man, wie es üblich ist und wie es Herr Maggi tut, die Einschränkung macht, daß diese Fesselungen sich durch lineare, homogene Gleichungen zwischen den Differentialen der Positionskoordinaten und den Differentialen der Zeit ausdrücken lassen sollen, denn die Differentialgleichungen, zu denen man hier gelangt, enthalten die noch unbekannten, von den Fesselungen herrührenden Drucke. In dem *ersten* Abschnitte stellt und löst Herr Maggi die Aufgabe, daß *reine* Gleichungen der Bewegung hergeleitet werden sollen, Gleichungen also, in denen jene Drucke nicht auftreten und die zur Bestimmung der sämtlichen Positionskoordinaten als Funktionen der Zeit geeignet sind. Soviel dem Referenten bekannt ist, sind diese Gleichungen zum ersten Male von Herrn Heun (*Die Bedeutung des d'Alembertschen Prinzipes für starre Systeme und Gelenkmechanismen, Archiv d. Math. und Phys.* (3), 2 (1901/02), S. 57—77, 298—327) aufgestellt worden.

In dem *zweiten* Abschnitte werden die Umformungen untersucht, die sich für die Differentialgleichungen der Bewegung aus den Prinzipien von Hamilton, Maupertuis und Gauß ergeben und die es ermöglichen, deren geometrisch-mechanische Bedeutung genauer zu erforschen. Der *dritte* Abschnitt betrifft die Integration dieser Gleichungen vermöge der Methoden von Hamilton und Jacobi. In diesen beiden Abschnitten werden die betreffenden allgemeinen Theorien in sehr geistreicher Weise von neuem entwickelt und auf eine Reihe gut gewählter Beispiele angewandt.

Alles in allem ist das Werk von Herrn Maggi eine wertvolle Bereicherung der Literatur über die Mechanik der Systeme starrer Körper, das den deutschen Mathematikern durch eine Übersetzung leichter zugänglich gemacht zu werden verdiente.

Hannover. PAUL STÄCKEL.

Schloemilchs Handbuch der Mathematik. 2. Aufl. Herausgegeben von Prof. Dr. R. Henke, Konrektor des Annen-Realgymnasiums in Dresden und Dr. R. Heger, Hon.-Professor an der K. S. Technischen Hochschule und Gymnasial-Oberlehrer in Dresden. Leipzig 1904, J. A. Barth. — Erster Band: Elementar-Mathematik. Mit 321 Figuren. XII u. 611 S. Pr. 20 M., geb. 22,50. M. — Zweiter Band: Höhere Mathematik. I. Teil. Mit 281 Figuren und 12 Tafeln. 765 S. Pr. 20 M. geb. 22,50 M.

Am 5. Febr. 1901 starb Schloemilch: es war ihm nicht mehr vergönnt, sein Handbuch der Mathematik, das als ein Teil der Encyclopädie der Naturwissenschaften in zwei Bänden 1879 bezw. 1881 erschienen war, in der veränderten Gestalt zu sehen, in der es jetzt, durch Hinzufügung neuer Abschnitte auf drei Bände erweitert, vorliegt. An Stelle des ebenfalls verstorbenen Dr. Fr. Reidt in Hamm übernahm Professor Dr. Henke in Dresden die Elementar-Mathematik, während die höhere Mathematik wie früher von Professor Dr. Heger bearbeitet wurde. Jeder der beiden Bände zerfällt in vier Bücher, und es enthält dem entsprechend der erste Band: Arithmetik und Algebra, Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie; der zweite Band: Darstellende Geometrie, Analytische Geometrie der Ebene, Analytische Geometrie des Raumes, Differential-Rechnung.

Wir müssen uns hier auf die Besprechung des Abschnittes über darstellende Geometrie beschränken. Zuerst wird in zum Teil origineller, zum Teil etwas umständlicher Weise die Darstellung der Grundgebilde, sowie ebener Figuren und des Kreises in senkrechter Projektion erledigt. Daran schließen sich die dreiseitige Ecke, die regelmäßigen Körper, Prisma, Pyramide, der Umdrehungs-Zylinder, die Kugel, der Umdrehungs-Kegel und Kugelberührungs-Aufgaben, welch letztere in eingehender und übersichtlicher Weise erörtert werden. Ein kurzer Abschnitt über Axonometrie, Perspektive, sowie über Schatten und Helligkeit bildet den Schluß des 105 Seiten füllenden Abschnittes. Die Rechnung wird ziemlich ausgiebig zur Ableitung von Resultaten herangezogen z. B. zur Konstruktion der Doppelpunkts-Tangenten, Aufg. 5, S. 58 und Aufg. 21, S. 76, wobei bemerkt sei, daß sich diese Aufgaben in einen geometrischen Zusammenhang bringen ließen. Daß ein eigener Abschnitt über die Fundamental-Aufgaben fehlt, dürfte kaum ein Vorteil sein, denn auf diese und nicht lediglich auf die Dreikants-Konstruktionen führen alle Aufgaben der Stereometrie zurück. Die Figuren sind zum Teil auf Tafeln zusammengestellt, zum Teil, etwas skizzenhaft, dem Text eingefügt. Folgende neue Bezeichnungen wendet der Verfasser an: Mittenbild = Zentralprojektion, Abbildungs-Mitte = Projektions-Zentrum, Leitbild = Parallelprojektion, Richtbild = Orthogonal-Projektion. Referent ist der Anschauung, daß die Anwendung neuer Namen für so fundamentale Begriffe nicht von einem Einzelnen ausgehen kann, sondern im Zusammenschluß mit weiteren Kreisen erfolgen mußte. Den Ausdruck isometrische Projektion auch für die Kavalierperspective zu verwenden (S. 94), ist aber jedenfalls unzweckmäßig und auch nicht gebräuchlich. Literatur-Nachweise irgend welcher Art sind in dem besprochenen Abschnitt nicht gegeben, wie überhaupt in beiden Bänden sich nur sehr wenig Angaben über wichtige Original-Arbeiten oder andere Werke finden.

München, März 1905. KARL DOEHLEMANN.

Neue Bücher.[1]

Analysis.

1. APPELL, P., Eléments d'analyse mathématique à l'usage des ingénieurs et physiciens. 2e éd. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 24.
2. KRÜGER, L., Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen. (Veröffentlichung K. preuß. geodät. Institut, neue Folge Nr. 18.) Potsdam. (Leipzig, Teubner).

Astronomie und Geodäsie.

3. BRUHN, ALB. v., Die Säkularbeschleunigung des Mondes. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 3.20.
4. Jahresbericht, astronomischer. Mit Unterstüzung der astronom. Gesellschaft hrsg. v. Walt. F. Wislicenus. 6. Bd., enth. die Literatur des J. 1904. Berlin, Reimer. M. 19.
5. PIZZETTI, PAOLO, Trattato di geodesia teoretica. Bologna. L. 12.

1) Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1905.

6. Poincaré, H., Leçons de Mécanique céleste professées à la Sorbonne. T. I. Théorie générale des perturbations planétaires. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 12.
s. auch Nr. 2.

Biologie.

7. Pearson, K., On the general theory of skew correlation and non-linear regressions. (Drapers Co. research memoirs, biometric series. Mathematical contributions to the Theory of Evolution.) London, Dulau. 5 s.

Darstellende Geometrie.

8. Moyer, I. A., Descriptive geometry for students of engineering. 2d edition, New-York, Wiley. Cloth. $ 2.

Geschichte.

9. Solmi, Edmondo, Nuovi studî sulla filosofia naturale di Leonardo da Vinci. Il metodo sperimentale. L'astronomia. La teoria della visione. Modena. L. 3.

Mechanik.

10. Alexander, T. and Thomson, A. W., Graphic Statics. A graduated series of problems and practical examples, with numerous diagrams all drawn to scale. London, Macmillan. 2 s.
11. Aschberley, L. W. and Pearson, Karl, On the Graphics of metal arches. With special reference to the relative strength of two-pivoted, three-pivoted, and built-in-metal arches. London, Dulau. 5 s.
12. Brauer, Ernst A., Festigkeitslehre. Kurz gefaßtes Lehrbuch nebst Sammlung technischer Aufgaben. Leipzig, Hirzel. M. 8; geb. M. 9.
13. Burr, W. H. and Falk, M. S., The graphic method by influence lines for bridge and roof computations. New-York, Wiley. Cloth. $ 3.
14. James, G. O., Elements of the Kinematics of a point and the rational Mechanics of a particle. New-York, Wiley & Sons. Cloth. $ 2.
15. Koenen, M., Grundzüge f. die statische Berechnung der Beton- und Eisenbetonbauten. 2. durchgesehene Aufl. Berlin, Ernst & Sohn. M. 1.20.
16. Marcolongo, R., Meccanica razionale. I. Cinematica. Statica. (Manuali Hoepli.) Milano, Hoepli. L. 3.
17. — —, II. Dinamica. Principi di Idromeccanica. L. 3.
18. Müller-Breslau, Heinr., Die graphische Statik der Baukonstruktionen. 1. Bd. 4., vermehrte Aufl. Stuttgart, Kröner. M. 18; geb. in Halbfr. M. 20.
19. Wilkens, Alex., Untersuchungen über Poincarésche periodische Lösungen des Problems der drei Körper. (Astronom. Abh. Nr. 8.) Hamburg, Mauke Söhne. M. 2.
s. auch Nr. 29.

Physik.

20. Aufsess, Otto Freiherr von und zu, Die physikalischen Eigenschaften der Seen. („Die Wissenschaft", Heft 4.) Braunschweig, Vieweg & Sohn.
21. Bertels, Kurt, Die Denkmittel der Physik. Eine Studie. Berlin, Mayer & Müller. M. 1.60.
22. Birven, Heinrich, Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. Stuttgart u. Berlin, Grub. geb. M. 2.80.
23. Börnstein, R. u. Marckwald, W., Sichtbare u. unsichtbare Strahlen, gemeinverständlich dargestellt. (Aus Natur u. Geisteswelt, Bändchen 64.) Leipzig, Teubner. M. 1; geb. in Leinw. M. 1.25.
24. Boltzmann, L., Leçons sur la théorie des gaz. Traduites par A. Gallotti et H. Bénard, avec une introduction et des notes de M. Brillouin. II[e] partie. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 10.

25. Curry, Ch. E., Electro-magnetic theory of Light. part 1. London, Macmillan. 12 s.
26. Frölich, O., Die Entwicklung der elektrischen Messungen. („Die Wissenschaft“ Heft 5.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 6; geb. in Leinw. M. 6.80.
27. Gans, Richard, Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 2.80.
28. Grassi, Ugo, Notizie sulla teoria degli ioni nelle soluzioni acquose, con una prefazione di Angelo Battelli. Pisa. L. 8.
29. Grimsehl, E., Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung. I. Bd. (Sammlung Schubert Bd. 38.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 6.
30. Grünbaum, F. u. Lindt, R., Das physikalische Praktikum des Nichtphysikers. Theorie und Praxis der vorkommenden Aufgaben f. alle, denen Physik Hilfswissenschaft ist. Zum Gebrauch in den Übungen der Hochschule und in der Praxis. Leipzig, Thieme. Geb. M. 6.
31. Hertz, Heinr., Über die Beziehungen zwischen Licht u. Elektrizität. Vortrag. 12. Aufl. Stuttgart, Kröner. M. 1.
32. Jäger, Gust., Theoretische Physik. II. Licht u. Wärme. (Sammlung Göschen 77.) 3., verb. Aufl. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.
33. — —, Dasselbe. III. Elektrizität u. Magnetismus. (Sammlung Göschen 78.) 3., verb. Aufl. Ebenda. geb. in Leinw. M. —.80.
34. Kayser, H., Handbuch d. Spectroscopie. 3. Bd. Leipzig, Hirzel. M. 38; geb. M. 42.
35. Mahler, G., Physikalische Aufgabensammlung. Mit den Resultaten. Sammlung Göschen Nr. 243.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.
36. Premoli, Palmiro, Nuovo dizionario illustrato di elettricità et magnetismo. Vol. II. Miland. L. 10.
37. Shearer, I. S., Notes and questions in Physics. London, Macmillan. 7 s 6 d.
38. Schenck, Rud., Kristallinische Flüssigkeiten und flüssige Kristalle. Leipzig, Engelmann. M. 3.60.
39. Thomson, I. I., Elettricità e materia. Traduzione con aggiunte di G. Faè. (Manuali Hoepli.) Milano, Hoepli. L. 2.
40. Walther, K. und Röttinger, M., Technische Wärmelehre (Thermodynamik). (Sammlung Göschen Nr. 242.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. —.80.
41. Warburg, Emil, Lehrbuch der Experimentalphysik f. Studierende. 8., verb. u. verm. Aufl. Tübingen, Mohr. M. 7; geb. M. 8.
42. Weinstein, B., Thermodynamik u. Kinetik der Körper. III. Bd. 1. Halbband. Die verdünnten Lösungen. Die Dissoziation. Thermodynamik der Elektrizität u. des Magnetismus (Erster Teil). Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 12.
43. Wind, C. H., Electronen en materie. Rede bij de aanvaarding van het hoogleeraarsambt aan de rijksuniversiteit de Utrecht, den 20. Februari 1905 uitgesproken. Leiden, Sijthoff. F. —.50.
44. Zenneck, I., Elektromagnetische Schwingungen u. drahtlose Telegraphie. Stuttgart, Enke. M. 28; geb. in Leinw. M. 30.

Tafeln.

45. Clarke, John B., Mathematical and physical Tables. Edinburgh, Oliver & Boyd. 6 s.
46. Küster, F. W., Logarithmische Rechentafeln f. Chemiker. Im Einverständnis mit der Atomgewichtskommission der deutschen chem. Gesellsch. für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium u. in der Praxis berechnet u. mit Erläuterungen versehen. 5. Aufl. Leipzig, Veit & Co. geb. in Leinw. M. 2.

Verschiedenes.

47. Habenicht, Bodo, Beiträge zur mathematischen Begründung einer Morphologie der Blätter. Berlin, Salle. M. 1.60.
48. Wislicenus, F., Der Kalender. (Aus Natur u. Geisteswelt 69.) Leipzig und Berlin, Teubner. M. 1; geb. in Leinw. M. 1.25.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Aufsess, O. von, Die physikalischen Eigenschaften der Seen, s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 20.

Bieven, H., Mechanische Wärmetheorie, s. N. B. 22.

Boltzmann, L., Leçons sur la théorie des gaz, s. N. B. 24.

Brauer, E. A., Festigkeitslehre, s. N. B. 12.

Dedekind, Richard, Stetigkeit u. irrationale Zahlen. 3. Aufl. Braunschweig, Vieweg & Sohn.

Frölich, O., Die Entwicklung der elektrischen Messungen, s. N. B. 26.

Grimsehl, E., Angewandte Potentialtheorie. I. s. N. B. 29.

Hudson, R. W. H. T., Kummer's Quartic surface. Cambridge, University Press. Cloth. 8 s.

James, G. O., Elements of the Kinematics of a point . . ., s. N. B. 14.

Krüger, L., Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen, s. N. B. 2.

Laguerre, Oeuvres de, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par M. M. Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché. T. II. Géometrie. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 22.

Mahler, G., Physikalische Aufgabensammlung, s. N. B. 35.

Marcolongo, R., Meccanica razionale, I e II, s. N. B. 16, 17.

Müller, Franz Johann, Theorie der Knickung in ihrer historischen Entwicklung. München, Druck von Carl Gerber.

Neubauten, die, der königlich sächsischen Hochschule zu Dresden. Teil A. Baubeschreibung (Auszug aus der Deutschen Bauzeitung). Teil B. Innere Einrichtung (Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure). Anhang: Versuchsanstalt in Uebigau (Zentralblatt der Bauverwaltung).

Newest, Th., Die Gravitationslehre ein Irrtum. Einige Weltprobleme. Populärwissenschafftliche Abhandlung. Wien, Konegen. M. 1.25

Poincaré, H., Leçons de Mécanique céleste, T. 1, s. N. B. 6.

Thomson, I. I., Elettricità e materia, s. N. B. 39.

hlen, K. Th., Abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrie. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 12.

Wagenmann, Adolf. Das System der Welt. Grundzüge einer Physik des organischen Lebens. I. Band: Der Ursprung von Energie und Materie. Cannstatt, Selbstverlag. M. 6.

Walther, K. und Röttinger, M., Technische Wärmelehre, s. N. B. 40.

Weinstein, B., Thermodynamik u. Kinetik der Körper, s. N. B. 42.

Wislicenus, F., Der Kalender, s. N. B. 48.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1898) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND **C. RUNGE** IN GÖTTINGEN.

---

52. BAND. 2. HEFT.

MIT 1 TAFEL UND 31 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 22. August 1905.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

F. Bernstein, F. Biske, E. Czuber, N. Delaunay, K. Doehlemann, P. Ernst, A. Grünwald, W. Herglotz, G. Holtsmark, F. Ludwig, K. Mack, R. Mehmke, K. Nitz, B. J. W. Reuser, C. Runge, R. Schimmack, J. Schnöckel, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, A. Timpe, E. Weinnoldt, Th. Weitbrecht, C. W. Wirtz, A. Wlassow, K. Wölffing.

Über die Zerlegung einer empirischen Funktion in Sinuswellen.

Von C. Runge in Hannover.

Ich habe früher[1]) eine Anordnung angegeben, wie man eine empirische periodische Funktion auf zweckmäßige Weise in Sinuswellen zerlegen kann. Wenn 12 gleichmäßig über die Periode verteilte Ordinaten die Funktion mit hinreichender Genauigkeit wiedergeben, so gestaltet sich die Rechnung besonders einfach. Es kommt aber nicht selten der Fall vor, daß 12 Ordinaten nicht ausreichen. Dann wird die Rechnung entsprechend verwickelter. Ich habe nun gefunden, daß sich die Rechnung mit 24 Ordinaten auf eine wiederholte Anwendung der Rechnung mit 12 Ordinaten zurückführen läßt. Es wird damit eine nicht unerhebliche Vereinfachung erzielt.

Es sei

$$\begin{aligned} y = a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \cdots + a_{11} \cos 11\varphi + a_{12} \cos 12\varphi \\ + b_1 \sin\varphi + b_2 \sin 2\varphi + \cdots + b_{11} \sin 11\varphi \end{aligned}$$

die gesuchte Zerlegung, wo die 24 Konstanten $a_0 a_1 \cdots a_{12}$; $b_1 b_2 \cdots b_{11}$ so bestimmt werden sollen, daß an den 24 Stellen der Periode $\varphi = 0^0$, 15^0, 30^0, 45^0, $\cdots$ 345^0 die verschiedenen Werte $y_0 y_1 y_2 \cdots y_{23}$ angenommen werden.

Wie früher gezeigt, hat man dann die Summen zu berechnen

$$y_0 + y_1 \cos(\alpha 15)^0 + y_2 \cos(2\alpha 15)^0 + \cdots + y_{23} \cos(23\alpha 15)^0,$$

und

$$y_1 \sin(\alpha 15)^0 + y_2 \sin(2\alpha 15)^0 + \cdots + y_{23} \sin(23\alpha 15)^0,$$

oder wie wir kurz schreiben wollen

$$[y_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0] \text{ und } [y_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0] \quad \lambda = 0, 1, 2 \cdots 23.$$

Die erste Summe liefert für $\alpha = 0$ und $\alpha = 12$ die Werte $24a_0$ und $24a_{12}$ und für $\alpha = 1, 2, \cdots 11$ die Werte von $12a_\alpha$, die zweite Summe die Werte von $12b_\alpha$. Um die Summen zweckmäßig zu berechnen, wird die Reihe der y, wie früher gezeigt, zusammengefaltet,

1) Diese Zeitschrift Bd. 48 S. 443, vgl. auch Runge, Theorie und Praxis der Reihen S. 147 u. f.

und es werden die Summen und Differenzen der untereinander stehenden Ordinaten gebildet:

$$\begin{array}{ll} & y_0\, y_1\, y_2\, y_3 \cdots\cdots y_{10}\, y_{11}\, y_{12} \\ & y_{23}\, y_{22}\, y_{21} \cdots\cdots y_{14}\, y_{13} \\ \hline \text{Summen:} & u_0\, u_1\, u_2\, u_3 \cdots\cdots u_{10}\, u_{11}\, u_{12} \qquad (u_0 = y_0,\ u_{12} = y_{12}) \\ \text{Differenzen:} & v_1\, v_2\, v_3 \cdots\cdots v_{10}\, v_{11} \end{array}$$

Diese beiden Reihen werden jede wieder zusammengefaltet, und wieder werden die Summen und Differenzen gebildet:

$$\begin{array}{ll} & u_0\, u_1\, u_2\, u_3 u_4 u_5 u_6 \\ & u_{12} u_{11}\, u_{10} u_9 u_8 u_7 \\ \hline \text{Summen:} & \mathfrak{u}_0\, \mathfrak{u}_1\, \mathfrak{u}_2\, \mathfrak{u}_3 \mathfrak{u}_4 \mathfrak{u}_5 \mathfrak{u}_6 \\ \text{Differenzen:} & \mathfrak{u}_0'\, \mathfrak{u}_1'\, \mathfrak{u}_2'\, \mathfrak{u}_3' \mathfrak{u}_4' \mathfrak{u}_5' \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & v_1\, v_2\, v_3 v_4 v_5 v_6 \\ & v_{11} v_{10} v_9 v_8 v_7 \\ \hline \text{Summen:} & \mathfrak{v}_1\, \mathfrak{v}_2\, \mathfrak{v}_3 \mathfrak{v}_4 \mathfrak{v}_5 \\ \text{Differenzen:} & \mathfrak{v}_1'\, \mathfrak{v}_2'\, \mathfrak{v}_3' \mathfrak{v}_4' \mathfrak{v}_5' \end{array}$$

Dann ist für grade Werte von α

$$[y_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{u}_\mu \cos(\mu\alpha 15)^0], \quad [y_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{v}_\mu \sin(\mu\alpha 15)^0]$$

für ungrade Werte von α

$$[y_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{u}_\mu' \cos(\mu\alpha 15)^0], \quad [y_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{v}_\mu' \sin(\mu\alpha 15)^0].$$

Der Vorteil dieser Zusammenlegung liegt darin, daß die Zahl der Glieder vermindert ist. Der Index μ durchläuft nur die Werte $0, 1, 2, \cdots 6$.

Man kann nun noch einen Schritt weiter gehen. Was zunächst die graden Werte von α betrifft, so werde $\alpha = 2\beta$ gesetzt. Dann wird

$$[y_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{u}_\mu \cos(\mu\beta 30)^0] \text{ und } [y_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{v}_\mu' \sin(\mu\beta 30)^0].$$

Man hat es also nicht mehr mit Vielfachen des Winkels von 15^0 sondern mit Vielfachen des Winkels von 30^0 zu tun, oder mit andern Worten, man hat es zu tun mit Summen derselben Form, wie sie bei der Einteilung der Periode in 12 Teile vorkommen. Man kann daher das Schema anwenden, das ich für die Rechnung mit 12 Ordinaten angegeben habe.

Zu dem Ende werden die Reihen der Größen $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_6$ und $\mathfrak{v}_1', \mathfrak{v}_2' \cdots \mathfrak{v}_5'$ noch einmal zusammengefaltet:

$$\begin{array}{ll} & \mathfrak{u}_0 \mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_3 \\ & \mathfrak{u}_6 \mathfrak{u}_5 \mathfrak{u}_4 \\ \hline \text{Summen:} & \mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_3 \\ \text{Differenzen:} & \mathfrak{U}_0' \mathfrak{U}_1' \mathfrak{U}_2' \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & \mathfrak{v}_1'\, \mathfrak{v}_2'\, \mathfrak{v}_3' \\ & \mathfrak{v}_5'\, \mathfrak{v}_4' \\ \hline \text{Summen:} & \mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 \mathfrak{V}_3 \\ \text{Differenzen:} & \mathfrak{V}_1' \mathfrak{V}_2' \end{array}$$

und mit den so gewonnenen Zahlen geht man in das von mir aufgestellte Schema ein:

	$\mathfrak{U}_2'/2$		$-\mathfrak{U}_2/2$	$\mathfrak{U}_1\sqrt{2}$		$\mathfrak{B}_1/2$				
		$m\mathfrak{U}_1'$					$m\mathfrak{B}_2$	$m\mathfrak{B}_1'$	$m\mathfrak{B}_2'$	
$\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{U}_1$ $\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_3$	$\mathfrak{U}_0'$		$\mathfrak{U}_0$	$-\mathfrak{U}_3$	$\mathfrak{U}_0'$ $-\mathfrak{U}_2'$	$\mathfrak{B}_3$				$\mathfrak{B}_1$ $-\mathfrak{B}_3$
Summen: $P_0\,P_6$	P_1	P_5	P_1	P_4	P_3	Q_1	Q_5	Q_2	Q_4	Q_3

(m bedeutet sin 60^0)

	P_0	P_1	P_2	P_3		Q_1	Q_2	Q_3
	P_6	P_5	P_4			Q_5	Q_4	
Summen:	$24a_0$	$12a_2$	$12a_4$	$12a_6$	Summen:	$12b_2$	$12b_4$	$12b_6$
Differenzen:	$24a_{12}$	$12a_{10}$	$12a_8$		Differenzen:	$12b_{10}$	$12b_8$	

Für die ungraden Werte von α setze ich $\alpha = 2\beta + 3$, dann ist:

I $\qquad [y_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{u}_\mu' \cos((2\beta + 3)\mu 15)^0]$

$= [\mathfrak{u}_\mu' \cos(\mu 45)^0 \cos(\beta\mu 30)^0] - [\mathfrak{u}_\mu' \sin(\mu 45)^0 \sin(\beta\mu 30)^0]$

II $\qquad [y_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{v}_\mu \sin((2\beta + 3)\mu 15)^0]$

$= [\mathfrak{v}_\mu \sin(\mu 45)^0 \cos(\beta\mu 30)^0] + [\mathfrak{v}_\mu \cos(\mu 45)^0 \sin(\beta\mu 30)^0]$.

Auf der rechten Seite haben wir nun wieder Summen von derselben Form, wie sie bei der Einteilung der Periode in 12 Teile vorkommen. Um sie auszurechnen, sind zunächst die Multiplikationen mit $\cos(\mu 45)^0$ und $\sin(\mu 45)^0$ auszuführen:

I	$\mathfrak{u}_\mu' \cos(\mu 45)^0$:	$\mathfrak{u}_0'$	$\mathfrak{u}_1'/\sqrt{2}$	0	$-\mathfrak{u}_3'/\sqrt{2}$	$-\mathfrak{u}_4'$	$-\mathfrak{u}_5'/\sqrt{2}$	0
	$\mathfrak{u}_\mu' \sin(\mu 45)^0$:		$\mathfrak{u}_1'/\sqrt{2}$	$\mathfrak{u}_2'$	$\mathfrak{u}_3'/\sqrt{2}$	0	$-\mathfrak{u}_5'/\sqrt{2}$	
II	$\mathfrak{v}_\mu \sin(\mu 45)^0$:	0	$\mathfrak{v}_1/\sqrt{2}$	$\mathfrak{v}_2$	$\mathfrak{v}_3/\sqrt{2}$	0	$-\mathfrak{v}_5/\sqrt{2}$	$-\mathfrak{v}_6$
	$\mathfrak{v}_\mu \cos(\mu 45)^0$:		$\mathfrak{v}_1/\sqrt{2}$	0	$-\mathfrak{v}_3/\sqrt{2}$	$-\mathfrak{v}_4$	$-\mathfrak{v}_5\,\sqrt{2}$	

Auf jeden dieser beiden Sätze I und II wird jetzt das Schema für 12 Ordinaten angewendet, z. B. auf I

	$\mathfrak{u}_0'$	$\mathfrak{u}_1'/\sqrt{2}$	0	$-\mathfrak{u}_3'/\sqrt{2}$		$\mathfrak{u}_1'/\sqrt{2}$	$\mathfrak{u}_2'$	$\mathfrak{u}_3'/\sqrt{2}$
	0	$-\mathfrak{u}_5'/\sqrt{2}$	$-\mathfrak{u}_4'$			$-\mathfrak{u}_5'/\sqrt{2}$	0	
Summen:	$\mathfrak{U}_0$	$\mathfrak{U}_1$	$\mathfrak{U}_2$	$\mathfrak{U}_3$	Summen:	$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{B}_2$	$\mathfrak{B}_3$
Differenzen:	$\mathfrak{U}_0'$	$\mathfrak{U}_1'$	$\mathfrak{U}_2'$		Differenzen:	$\mathfrak{B}_1'$	$\mathfrak{B}_2'$	

und mit den Zahlen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ wird grade so gerechnet, wie mit den ebenso bezeichneten Größen bei den graden Werten von α. Aus den Größen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ erhalten wir wie oben die Größen $P_0 P_1 \cdot\cdot P_6$ und $Q_1 Q_2 \cdot\cdot Q_5$. Diese werden wie oben zusammen gelegt und liefern durch ihre Summen und Differenzen:

	$P_0 P_1 P_2 P_3$		$Q_1 Q_2 Q_3$
	$P_6 P_5 P_4$		$Q_5 Q_4$
Summen:	$p_0 p_1 p_2 p_3$	Summen:	$q_1 q_2 q_3$
Differenzen:	$p_6 p_5 p_4$	Differenzen:	$q_5 q_4$

Dann ist im Falle I:

$$[u'_\mu \cos(\mu 45)^0 \cos(\mu\beta 30)^0] = p_\beta$$
$$[u'_\mu \sin(\mu 45)^0 \sin(\mu\beta 30)^0] = q_\beta.$$

Setzt man statt β die Ergänzung $12 - \beta$ ein, so bleibt $\cos(\mu\beta 30)^0$ ungeändert, während $\sin(\mu\beta 30)^0$ ins Entgegengesetzte übergeht. Daher hat man $p_{12-\beta} = p_\beta$ und $q_{12-\beta} = -q_\beta$. Statt $p_1 + q_1$ kann man also auch $p_{11} - q_{11}$ schreiben, statt $p_2 + q_2$ auch $p_{10} - q_{10}$ usw.

Wir schreiben nun die Größen p und die Größen q je in eine Reihe untereinander und bilden die Summen und Differenzen der untereinander stehenden Größen. Damit erhalten wir:

I	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	
Summen:	$12a_3$	$12a_1$	$12a_1$	$12a_3$	$12a_5$	$12a_7$	$12a_9$
Differenzen:		$12a_5$	$12a_7$	$12a_9$	$12a_{11}$	$12a_{11}$	

Denn es ist $p_\beta - q_\beta = [y_\lambda \cos(\lambda(2\beta + 3)15)^0] = 12a_{2\beta+3}$; statt $2\beta + 3$ kann man aber auch $24 - (2\beta + 3)$ oder $2\beta + 3 - 24$ setzen, da $\cos(\lambda(2\beta + 3)15)^0$ dabei ungeändert bleibt.

Für den Satz II verfährt man analog mit dem einzigen Unterschiede, daß dann $p_\beta + q_\beta = [y_\lambda \sin(\lambda(2\beta + 3)15)^0] = 12b_{2\beta+3}$ ist und daß $b_{2\beta+3} = b_{2\beta+3-24} = -b_{24-2\beta-3}$ ist.

Wir erhalten somit für den Satz II:

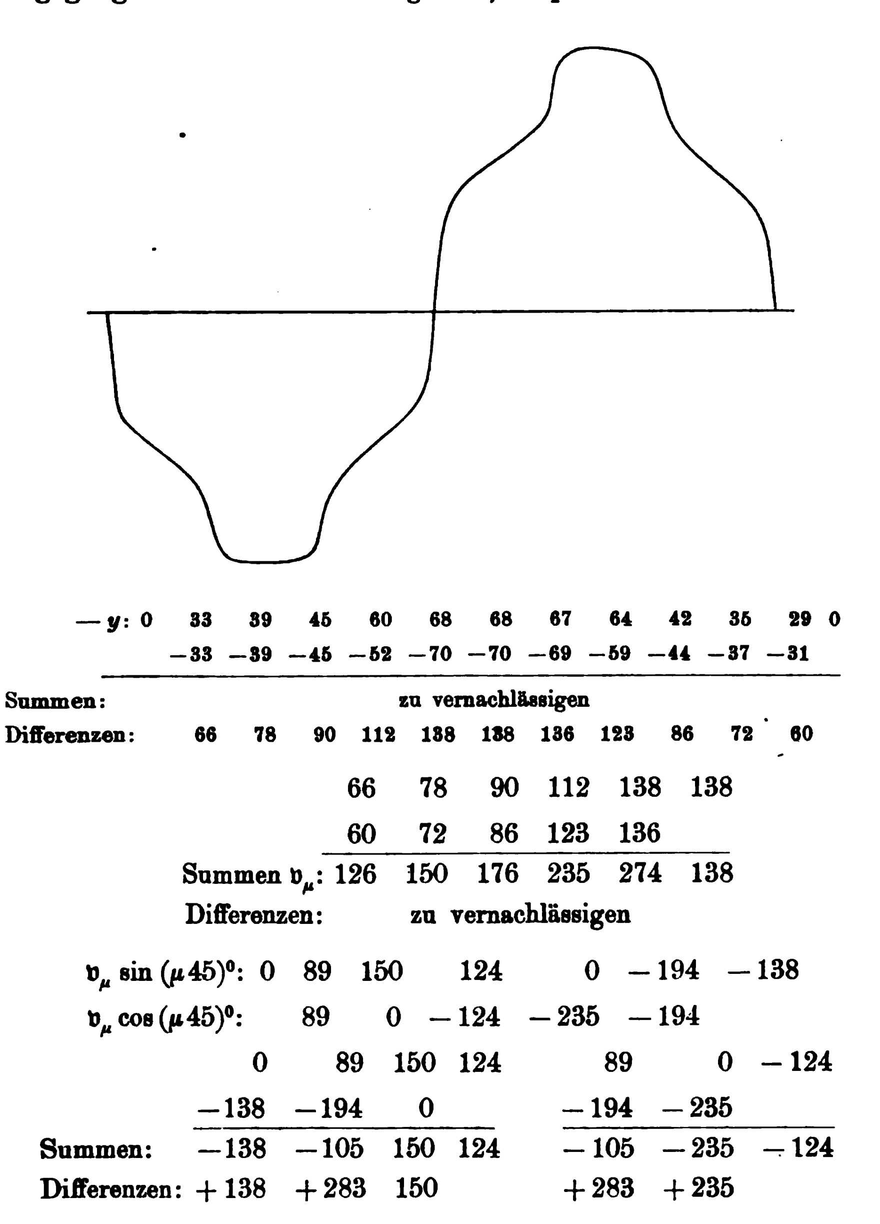
	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	
II Summen:	$12b_3$	$12b_5$	$12b_7$	$12b_9$	$12b_{11}$	$-12b_{11}$	$-12b_9$
Differenzen:		$12b_1$	$-12b_1$	$-12b_3$	$-12b_5$	$-12b_7$	

Die Größen a, b ergeben sich demnach für ungrade Werte von α jede auf doppelte Weise. Man kann sich natürlich darauf beschränken, jede nur einmal auszurechnen; aber es wird so wenig Mühe damit gespart, daß man es vorziehen wird, sie doppelt zu berechnen und damit eine Kontrolle auszuüben.

Bei den Zerlegungen, mit denen wir es bei elektrotechnischen Untersuchungen zu tun haben, fallen die Glieder grader Ordnung in

der Regel fort. Auch können unter Umständen alle Kosinusglieder wegfallen. Dann reduziert sich die Rechnung auf die nicht verschwindenden Glieder.

Das folgende Beispiel gibt die Zerlegung der Spannungskurve eines Generators bei Leerlauf. Die Ordinaten habe ich in der Rechnung mit entgegengesetztem Vorzeichen eingeführt, um positive Zahlen zu erhalten.



$-y$:	0	33	39	45	60	68	68	67	64	42	35	29	0
		−33	−39	−45	−52	−70	−70	−69	−59	−44	−37	−31	
Summen:	zu vernachlässigen												
Differenzen:		66	78	90	112	138	138	136	123	86	72	60	

	66	78	90	112	138	138
	60	72	86	123	136	
Summen $\mathfrak{v}_\mu$:	126	150	176	235	274	138
Differenzen:	zu vernachlässigen					

$\mathfrak{v}_\mu \sin(\mu 45)^0$:	0	89	150	124	0	−194	−138
$\mathfrak{v}_\mu \cos(\mu 45)^0$:		89	0	−124	−235	−194	

	0	89	150	124	89	0	−124
	−138	−194	0		−194	−235	
Summen:	−138	−105	150	124	−105	−235	−124
Differenzen:	+138	+283	150		+283	+235	

	75	−75 −52.5		−52.5		
	245			−204	245 204	
−138 −105 +150 +124	138	−138 −124	138 −150	−124		−105 +124
12 19	213 245	−213 −176.5	−12	−176.5 −204	245 204	+19

	12	213	−213	−12		−176.5	245	19
	19	245	−176.5			−204	204	
p:	31	458	−389.5	−12	q:	−380.5	449	19
	−7	−32	−36.5			27.5	41	

p:	31	458	−389.5	−12	−36.5	−32	−7
q:		−380.5	449	19	41	27.5	
	31	77.5	59.5	7	+4.5	−4.5	−7
		+838.5	−838.5	−31	−77.5	−59.5	

Resultat: $-y = \frac{838.5}{12}\sin\varphi + \frac{31}{12}\sin 3\varphi + \frac{77.5}{12}\sin 5\varphi + \frac{59.5}{12}\sin 7\varphi$
$+ \frac{7}{12}\sin 9\varphi + \frac{4.5}{12}\sin 11\varphi.$

Auch die umgekehrte Rechnung kann man in analoger Weise auf das Schema mit 12 Ordinaten zurückführen.

Es seien $a_0 a_1 a_2 \cdots a_{12}$, $b_1 b_2 b_3 \cdots b_{11}$ gegeben. Dann sind die Summen:

$$[a_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0] \text{ und } [b_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0] \qquad \lambda = 0, 1, 2 \cdots 12$$

zu berechnen, wobei α je einen der Werte von 0, 1, $\cdots$ 23 hat. Setzt man $24 - \alpha$ an Stelle von α ein, so bleibt $\cos(\lambda\alpha 15)^0$ ungeändert, während $\sin(\lambda\alpha 15)^0$ ins Entgegengesetzte übergeht. Man hat also nur nötig die beiden Ausdrücke für $\alpha = 0, 1, 2 \cdots 12$ zu berechnen. Ihre Summe gibt dann y_α, ihre Differenz $y_{24-\alpha}$. Man faltet zu dem Ende wieder die Reihen der Größen a und b zusammen und bildet die Summen und Differenzen der untereinander stehenden Größen:

	$a_0\ a_1\ a_2\ a_3 a_4 a_5 a_6$	$b_1\ b_2\ b_3 b_4 b_5 b_6$
	$a_{12} a_{11} a_{10} a_9 a_8 a_7$	$b_{11} b_{10} b_9 b_8 b_7$
Summen:	$\mathfrak{a}_0\ \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4 \mathfrak{a}_5 \mathfrak{a}_6$	$\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{b}_2\ \mathfrak{b}_3 \mathfrak{b}_4 \mathfrak{b}_5 \mathfrak{b}_6$
Differenzen:	$\mathfrak{a}'_0\ \mathfrak{a}'_1\ \mathfrak{a}'_2\ \mathfrak{a}'_3 \mathfrak{a}'_4 \mathfrak{a}'_5$	$\mathfrak{b}'_1\ \mathfrak{b}'_2\ \mathfrak{b}'_3 \mathfrak{b}'_4 \mathfrak{b}'_5$

Für grade Werte von α hat man dann $(\alpha = 2\beta)$

$$[a_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{a}_\mu \cos(\mu\beta 30)^0] \text{ und } [b_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{b}'_\mu \sin(\mu\beta 30)^0]$$

für ungrade Werte ($\alpha = 2\beta + 3$)

$$[a_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{a}'_\mu \cos(\mu(2\beta + 3)15)^0] = [\mathfrak{a}'_\mu \cos(\mu 45)^0 \cos(\mu\beta 30)^0] - [\mathfrak{a}'_\mu \sin(\mu 45)^0 \sin(\mu\beta 30)^0]$$

$$[b_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{b}_\mu \sin(\mu(2\beta + 3)15)^0] = [\mathfrak{b}_\mu \sin(\mu 45)^0 \cos(\mu\beta 30)^0] + [\mathfrak{b}_\mu \cos(\mu 45)^0 \sin(\mu\beta 30)^0],$$

und nun ist die Rechnung dieselbe wie oben. Man findet die Werte $A_\alpha = [a_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0]$, $B_\alpha = [b_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0]$ genau so, wie oben die Werte von $[y_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0]$ und $[y_\lambda \sin(\alpha\lambda 15)^0]$ gefunden wurden. Man schreibt diese Größen wieder in zwei Reihen untereinander. Die Summen und Differenzen der untereinander stehenden Größen liefern dann die zusammengefaltete Reihe der y:

	A_0	A_1	A_2	$\cdots$	A_{11}	A_{12}
		B_1	B_2	$\cdots$	B_{11}	
Summen:	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_{11}	y_{12}
Differenzen:		y_{23}	y_{22}		y_{13}.	

The Lubrication of Plane Surfaces.

By A. G. M. MICHELL, Melbourne.

The improvements made by Sommerfeld[1]) in the mathematical treatment of Reynolds' Hydrodynamical Theory of Lubrication have laid open the path to its practical application.

In the case of cylindrical bearings, however, certain corrections and approximations still require to be investigated, before a quite satisfactory camparison with experiment can be made. The most important of these is perhaps that which arises from the fact that actual bearings are necessarily of limited length, whereas in the mathematical theory of Reynolds and Sommerfeld the length is supposed to be so great that the motion can be treated as two-dimensional.

A further obstacle which presents itself to the experimental verification of the theory of the cylindrical bearing is the difficulty of determining, even approximately, the very small difference between the radii of the journal and the bearing.

The present Paper discusses an application of the theory to a case for which the complete solution in three dimensions can be obtained.

This is the case of a plane slide-block of finite length and width,

1) Zeitschrift für Mathematik u. Physik. Band 50, pp. 97—155.

such as the crosshead slide-blocks of steam-engines. It will appear that when such a plane plate, of finite dimensions, slides over a fixed plane surface freely supplied with oil, a pressure may be developed in the oil tending to keep the planes apart. The general features of the case are the same as in the two-dimensional problem already treated by Reynolds.[1]) It is a necessary condition of the action that the external load applied to the moving plate shall act at a point behind its centre of figure. The plate will then set itself so that the oil-film is thicker on its leading than on its rearward edge.

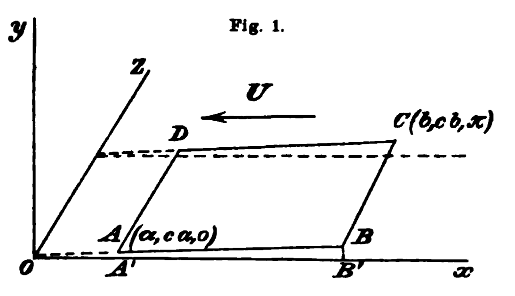
Under the influence of the fluid pressure, the oil will flow out of the interspace between the planes partly at the rear and partly at the sides. Unless the finite plate is of great width, the amount which flows out of the sides will be very considerable, and the pressure which is developed in the oil, will, other things being equal, be notably less than in the case of the plate of infinite width.

Not only is the case of the rectangular plane slide-block of much practical importance, but the possibility of forming accurate plane surfaces greatly facilitates the experimental verification of the theory of this case.

At the end of the paper a short account is given of a preliminary experimental verification, not made however directly, with fluid lubricants, but by the help of a physical analogy hereafter explained. This experimental method is of general applicability, and in the absence of a mathematical theory of cylindrical bearings of finite length, may be worthy of systematic use for the investigation of that (practically the most important) case.

Slide-Block of Finite Width.

Let the plane rectangle $ABCD$ (Fig. 1) represent the lower surface of a rectangular slide-block moving with velocity U over the plane xOz, the space between the planes being filled with a liquid of viscosity λ.



To preserve Sommerfeld's notation U is taken as positive in the direction xO, and to simplify the expressions the planes AC, xOz are assumed to intersect in the line Oz, and the planes AC, xOy in the line AB. The width, $AD = BC$, of the block is taken as x.

1) Osborne Reynolds. Scientific Papers, Vol. II, p. 245.

Let h be the distance between the planes at the point xy; $\theta = xOB$ the angle between the planes, and put

$$c = \sin\theta, \qquad OA = a, \qquad OB = b.$$

Then, h being assumed small compared to OA,

$$h = x\sin\theta = cx.$$
$$OA' = OA = a, \quad \text{and} \quad OB' = OB = b.$$

Now, if p be the pressure of the liquid at the point xy, the boundary conditions will be

$$p = 0, \text{ when } x = a, \text{ or } x = b, \text{ for all values of } z,$$
$$\text{and } p = 0, \text{ when } z = 0, \text{ or } z = \pi, \text{ for all values of } x.$$

Between the two planes, AC and xOz, p, given as a function of x and z, must satisfy the differential equation[1])

$$U\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{6\lambda}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{6\lambda}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

or since $h = cx$

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{6\lambda U}{c^2 x^3} = 0.$$

It is assumed that there is a solution of this equation of the form

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_m + \cdots$$

where

$$p_m = \frac{w_m \sin mz}{mx},$$

and w_m is a function of x only.

The integer m can have odd values only, since the value of p is symmetrical about $z = \pi/2$.

Thus

$$(2) \qquad p = \sum \cdot \frac{w_m \sin mz}{mx}$$

where m is any odd integer.

It is convenient to write equation (1) as

$$(3) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial^2 x} + \frac{3}{x}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{6\lambda U}{c^2 x^3}\cdot\frac{4}{\pi}\left(\sin z + \frac{\sin 3z}{3} + \cdots + \frac{\sin mz}{m} + \cdots\right) = 0,$$

the sum of the series of sines being $\frac{\pi}{4}$ for all values of z between 0 and π.

1) Osborne Reynolds. loc. cit. p. 261.

Writing also $mx = \xi$, and $\frac{24\lambda U}{\pi c^2} = k$,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = m\frac{\partial p}{\partial \xi} = m\Sigma\cdot\left\{\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial w_m}{\partial \xi} - \frac{w_m}{\xi^2}\right\}\sin mz,$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = m^2\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} = m^2\Sigma\cdot\left\{\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial^2 w_m}{\partial \xi^2} - \frac{2}{\xi^2}\cdot\frac{\partial w_m}{\partial \xi} + \frac{2w_m}{\xi^3}\right\}\sin mz,$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\Sigma\cdot\frac{m^2 w_m}{\xi}\cdot\sin mz,$$

the differentiation of the series term by term with respect to z being permissible because $p = 0$, when $z = 0$, and $z = \pi$.

The coefficient of sin mz in equation (3) now becomes

$$\frac{m^2}{\xi}\left\{\frac{\partial^2 w_m}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial w_m}{\partial \xi} - \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right)w_m - \frac{k}{\xi^2}\right\}$$

but every such coefficient must vanish, therefore

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial^2 w_m}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial w_m}{\partial \xi} - \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right)w_m - \frac{k}{\xi^2} = 0.$$

The particular integrals of

$$\frac{\partial^2 w_m}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial w_m}{\partial \xi} - \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right)w_m = 0$$

are the Bessel's Functions $I_1(\xi)$ and $K_1(\xi)$. The complete solution of the equation (4) may therefore be sought in the forms

$$\text{(5a)} \qquad w_m = A_m I_1(\xi) + B_m K_1(\xi) + (C + D\xi + E\xi^2 + \cdots)$$

and

$$\text{(5b)} \qquad w_m = A'_m I_1(\xi) + B'_m K_1(\xi) + (C' + D'\xi^{-1} + E'\xi^{-2} + \cdots).$$

Determining the coefficients C, D, E etc. in the usual way, equations (5a) and (5b) become

$$w_m = A_m I_1(\xi) + B_m K_1(\xi) - k\left(1 + \frac{\xi^2}{3} + \frac{\xi^4}{5\cdot 3^2} + \frac{\xi^6}{7\cdot 5^2\cdot 3^2} + \cdots\right)$$

and

$$w_m = A'_m I_1(\xi) + B'_m K_1(\xi) - k(\xi^{-2} + 3\cdot\xi^{-4} + 5\cdot 3^2\cdot\xi^{-6} + 7\cdot 5^2\cdot 3^2\cdot\xi^{-8} + \cdots),$$

the last series being semiconvergent for large values of ξ.

Hence, finally, restoring the values of ξ and k,

$$\text{(6)} \qquad p = p_1 + p_3 + \cdots + p_m + \cdots$$

where

$$\text{(6a)} \quad p_m = \frac{\sin mz}{mx}\left\{A_m I_1(mx) + B_m K_1(mx) - \frac{24\lambda U}{\pi c^2}\left(1 + \frac{\overline{mx}^2}{3} + \frac{\overline{mx}^4}{5\cdot 3^2} + \cdots\right)\right\}$$

or

(6b) $$p_m = \frac{\sin mz}{mx}\left\{A'_m I_1(mx) + B'_m K_1(mx) - \frac{24\lambda U}{\pi c^2 (mx)^2}(1 + 3\overline{mx}^{-2} + 5\cdot 3^2\overline{mx}^{-4} + \cdots)\right\}$$

or, writing for convenience

$$L_1(mx) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{mx}\left(1 + \frac{\overline{mx}^2}{3} + \frac{\overline{mx}^4}{5\cdot 3^2} + \cdots\right)$$

$$L_2(mx) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{(mx)^3}(1 + 3\overline{mx}^{-2} + 5\cdot 3^2\overline{mx}^{-4} + \cdots)$$

$$C = \frac{6\lambda U}{c^2}$$

(7a) $$p_m = \sin mz\left\{A_m\frac{I_1(mx)}{mx} + B_m\frac{K_1(mx)}{mx} - C\cdot L_1(mx)\right\}$$

or

(7b) $$= \sin mz\left\{A'_m\frac{I_1(mx)}{mx} + B'_m\frac{K_1(mx)}{mx} - C\cdot L_2(mx)\right\},$$

the first form being suited for calculation when mx is small, the second when mx is large. The coefficients

$$\begin{array}{l} A_1,\ A_3,\ \ldots A_m,\ \ldots \\ B_1,\ B_3,\ \ldots B_m,\ \ldots \\ \text{etc.} \end{array}$$

in these equations must be assigned so as to make p_m vanish when $x = a$, or $x = b$ for all values of z. They will, of course, like C, be multiples of $\frac{\lambda U}{c^2}$, which will therefore be a factor in the final expression for p. The numerical calculations will show that the sign of p is opposite to that of U, so that, to obtain a positive pressure in the oil, the slide-block must move in the opposite direction to that shown in Fig. 1.

The intensity, p, of the pressure at xy having been determined, the total pressure

$$P = \int_0^\pi\int_a^b p\,dx\,dz$$

may be found by arithmetical or graphical summation.

The viscous resistance, or friction, on unit area at the point x, o, z is given by

(8) $$q = -\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \lambda\frac{U}{h} - \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{h}{2}$$

where u is the velocity of the fluid in the direction of x at the point x, y, z.

The total resistance for the whole block is therefore

(9) $$F=\int_0^\pi\int_a^b\left(\lambda\frac{U}{h}-\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{h}{2}\right)dx\,dz$$

$$=\pi\int_a^b\lambda\frac{U}{cx}dx-\int_0^\pi\int_a^b\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{cx}{2}dx\,dz$$

$$=\pi\int_a^b\frac{\lambda U}{cx}dx-\frac{c}{2}\int_0^\pi\left\{[p]_{x=a}^{x=b}-\int_a^b p\,dx\right\}dz^{1)}$$

$$=\pi\int_a^b\frac{\lambda U}{cx}dx+\frac{c}{2}\int_0^\pi\int_a^b p\,dx\,dz$$

(10) $$=\frac{\pi\lambda U}{c}\log\frac{b}{a}+\frac{cP}{2}.$$

Special Cases.

The width of the slide-block having been taken as π, its form and position will be completely defined when, in addition, the three constants a, b, c are given.

Since, however, c appears as a factor throughout the expression for p, the peculiarities of any special case depend upon the values of the two parameters a and b only.

The arithmetical work is simplified by taking a and b simple multiples or submultiples of π.

The principal numerical results will be given for four cases, viz:

I. Square block, $a=\pi$, $b=2\pi$.

II. Block of length three times its width, $a=3\pi$, $b=6\pi$.

III. The limiting case in which the length of the block is infinite compared to its width.

IV. The other extreme case in which the width is infinite. The general theory of this case has been given by Reynolds.

In all these cases, except (III), the ratio $\frac{b}{a}$ is taken as 2, as the nearest whole number to the ratio $2\cdot 2\cdots$, which Reynolds has shown to give the greatest mean pressure for a given mutual inclination, c, of the surfaces, in case IV.

Case I. Square Block.

If $a=\frac{b}{2}=\pi$, mx in equations (7a) and (7b) will take for the two ends of the block the series of values

π, 3π, 5π, ... at the rear end,

and 2π, 6π, 10π, ... at the front end.

1) The last term is omitted by Reynolds. loc. cit. p. 265.

Since p_m must vanish at the ends, the constants A_m, B_m, etc. are determined when the values of the functions I, K and L are known for these series of values.

The function L_1 will be used when $mx <$ or $= 2\pi$, L_2 when $mx > 2\pi$.

The values of the ratios $\frac{A_m}{C}$, $\frac{B_m}{C}$, $\frac{A'_m}{C}$ and $\frac{B'_m}{C}$, thus found, are given in the following table.

Table I.

	A_m/C	B_m/C
$m = 1$	2.0004	-4.2883
	A'_m/C	B'_m/C
$m = 3$	2.6157×10^{-10}	-4.3687×10^{2}
5	4.1788×10^{-16}	-1.0718×10^{5}
7	8.7540×10^{-22}	-3.4647×10^{7}
9	2.0885×10^{-27}	-1.2742×10^{10}
11	5.3817×10^{-33}	-5.0543×10^{12}

The constants A, B, etc. having been determined, the pressure at any point, xz, is obtained from equations (6) and (7) by inserting in them the values of $I_1(mx)$, $K_1(mx)$, and $L_1(mx)$ or $L_2(mx)$ for the given value of x, and the values of $\sin mz$ for the given value of z.

In this way the pressure has been calculated for all points of intersection of the lines

$$x = \pi \times 1.1, \quad x = \pi \times 1.2, \quad \ldots, \quad x = \pi \times 1.9,$$

with the lines

$$z = \pi \times 0.1, \quad z = \pi \times 0.2, \quad \ldots, \quad z = \pi \times 0.9.$$

As the first step in this calculation the values of the functions I, K and L, are required for odd multiples of $\pi \times 1.1$, $\pi \times 1.2, \ldots$, $\pi \times 1.9$. The following Table II gives the Briggian logarithms of these functions for such multiples up to the eleventh.

The values of the Bessel's Functions in this Table have been calculated partly by interpolation in existing Tables[1]), but chiefly from the semiconvergent series.

$$I_1(\xi) = \frac{e^{\xi}}{\sqrt{2\pi\xi}}\left\{1 - \frac{3}{8\xi} - \frac{3\cdot 5}{\underline{|2}\,(8\xi)^2} - \cdots - \frac{3\cdot 5\cdot 21\cdots\{(2n-1)^2-4\}}{\underline{|n}\,(8\xi)^n} - \cdots\right\},$$

$$K_1(\xi) = \frac{-\sqrt{\pi}e^{-\xi}}{\sqrt{2\xi}}\left\{1 + \frac{3}{8\xi} - \frac{3\cdot 5}{\underline{|2}\,(8\xi)^2} + \cdots \pm \frac{3\cdot 5\cdot 21\cdots\{(2n-1)^2-4\}}{\underline{|n}\,(8\xi)^n} \mp \cdots\right\}.$$

1) Report of British Association, 1893. — Aldis. Proceedings Royal Society, 1898.

Table II.

x/π	$\log_{10} I_1(mx)$					
	$m = 1$	$m = 3$	$m = 5$	$m = 7$	$m = 9$	$m = 11$
1.0	.65239	3.18862	5.81404	8.47287	11.14877	13.83502
1.1	.77545	3.5790	6.4764	9.407	12.357	15.316
1.2	.89850	3.9708	7.1406	10.345	13.566	16.797
1.3	1.02260	4.3639	7.8060	11.283	14.776	18.281
1.4	1.14686	4.7582	8.4728	12.223	15.989	19.767
1.5	1.27161	5.1534	9.1410	13.158	17.202	21.253
1.6	1.39684	5.5494	9.809	14.104	18.416	22.740
1.7	1.5226	5.9458	10.479	15.047	19.632	24.227
1.8	1.6486	6.3437	11.148	15.989	20.847	22.715
1.9	1.7753	6.7419	11.818	16.932	22.063	27.205
2.0	1.90223	7.14066	12.49087	17.87684	23.28063	28.69511

x/π	$\log_{10}(-K_1(mx))$					
	$m = 1$	$m = 3$	$m = 5$	$m = 7$	$m = 9$	$m = 11$
1.0	$\bar{2}.58037$	$\bar{5}.53422$	$\bar{8}.68816$	$\overline{11}.88352$	$\overline{13}.09860$	$\overline{16}$ 32525
1.1	$\bar{2}$ 36949	$\bar{5}.1028$	$\bar{9}.9843$	$\overline{12}.906$	$\overline{15}.850$	$\overline{18}.803$
1.2	$\bar{2}.21109$	$\bar{6}.6734$	$\bar{9}.2826$	$\overline{13}.932$	$\overline{16}.603$	$\overline{19}.284$
1.3	$\bar{2}.05454$	$\bar{6}.2457$	$\overline{10}.5835$	$\overline{14}.960$	$\overline{17}.356$	$\overline{21}.767$
1.4	$\bar{3}.89979$	$\bar{7}.8194$	$\overline{11}.8836$	$\overline{15}.988$	$\overline{18}.112$	$\overline{22}.248$
1.5	$\bar{3}.74630$	$\bar{7}.3942$	$\overline{11}.186$	$\overline{15}.013$	$\overline{20}.869$	$\overline{24}.732$
1.6	$\bar{3}.59399$	$\bar{8}.9704$	$\overline{12}.489$	$\overline{16}.049$	$\overline{21}.624$	$\overline{25}.217$
1.7	$\bar{3}.44281$	$\bar{8}.5467$	$\overline{13}.794$	$\overline{17}.080$	$\overline{22}.385$	$\overline{27}.702$
1.8	$\bar{3}.29250$	$\bar{8}.1251$	$\overline{13}.099$	$\overline{18}.112$	$\overline{23}.146$	$\overline{29}.190$
1.9	$\bar{3}.14305$	$\bar{9}.7036$	$\overline{14}.405$	$\overline{19}.145$	$\overline{25}.906$	$\overline{30}.676$
2.0	$\bar{4}.99429$	$\bar{9}.28255$	$\overline{15}.71079$	$\overline{20}.17876$	$\overline{26}.66590$	$\overline{31}.16427$

x/π	$\log_{10} L_1(mx)$	$\log_{10} L_2(mx)$				
	$m = 1$	$m = 3$	$m = 5$	$m = 7$	$m = 9$	$m = 11$
1.0	.46333	$\bar{3}.20038$	$\bar{4}.52216$	$\bar{4}.08093$	$\bar{5}.75243$	$\bar{5}.49037$
1.1	.54241	$\bar{3}.07266$	$\bar{4}.39692$	$\bar{5}.95624$	$\bar{5}.62791$	$\bar{5}.36603$
1.2	.62636	$\bar{4}.95647$	$\bar{4}.28282$	$\bar{5}.84248$	$\bar{5}.51433$	$\bar{5}.25253$
1.3	.71437	$\bar{4}.85011$	$\bar{4}.17798$	$\bar{5}.73794$	$\bar{5}.40987$	$\bar{5}.14812$
1.4	.80579	$\bar{4}.75193$	$\bar{4}.08097$	$\bar{5}.64116$	$\bar{5}.31317$	$\bar{5}.05146$
1.5	.90017	$\bar{4}.66085$	$\bar{5}.99066$	$\bar{5}.52110$	$\bar{5}.22321$	$\bar{6}.96150$
1.6	.99711	$\bar{4}.57586$	$\bar{5}.90627$	$\bar{5}.46684$	$\bar{5}.13903$	$\bar{6}.87736$
1.7	1.09631	$\bar{4}.49315$	$\bar{5}.82702$	$\bar{5}.38772$	$\bar{5}.05995$	$\bar{6}.79833$
1.8	1.19752	$\bar{4}.42100$	$\bar{5}.75239$	$\bar{5}.31317$	$\bar{6}.98545$	$\bar{6}.72383$
1.9	1.30053	$\bar{4}.35009$	$\bar{5}.68177$	$\bar{5}.24265$	$\bar{6}.91492$	$\bar{6}.65334$
2.0	1.40516	$\bar{4}.28282$	$\bar{5}.61477$	$\bar{5}.17576$	$\bar{6}.84804$	$\bar{6}.58646$

Inserting the values of I, K and L from Table II, together with the values of $\frac{A}{C}$ and $\frac{B}{C}$ from Table I, in equations 6, 7a and 7b, the following Table III of the ratio of p/C is obtained.

The values are, of course, symmetrical about the line $z = \frac{\pi}{2}$, so that only values for $z \ngtr \frac{\pi}{2}$ need be given.

Table III.

Distribution of Pressure over Square Slide-block.

z/π	x/π								
	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
.1	—.00265	—.00342	—.00347	—.00321	—.00279	—.00231	—.00178	—.00126	—.00066
.2	405	553	577	541	474	394	301	212	110
.3	493	689	728	688	606	505	384	269	135
.4	535	757	809	768	680	567	430	299	149
.5	551	781	836	796	706	587	446	309	154

The series of lines of equal pressure is shown in Fig. 2, which was plotted from Table III.

The mean pressure is found by arithmetical summation to be

$$p_a = \frac{P}{\pi^2} = -.00356 \times C = -.0213 \times \frac{\lambda U}{c^2}.$$

By another approximate integration the position of the resultant pressure is found to be .420 of the length of the block from its rear end.

The coefficient of friction, found from equation (10), is

$$\mu = -\frac{F}{P} = \frac{c \times .693}{\pi \times .0212} + \frac{c}{2} = c \times 10.83 \cdots.$$

Case II. Slide-block of width one-third of its length.

The general solution is of course precisely the same as that of Case I, and equations (6), (7a) and (7b) apply without alteration.

The boundary conditions are now however

$$p = 0, \text{ when } z = 0, \text{ and } z = \pi,$$
$$\text{and } p = 0, \text{ when } x = 3\pi, \text{ and } x = 6\pi.$$

The following table, corresponding to Table III for the square block, gives the values of the ratio p/C for the points of intersection of the lines

$$z = \pi \times 0.1, \quad z = \pi \times 0.2, \quad \ldots, \quad z = \pi \times 0.5,$$

with the lines

$$x = \pi \times 3.3, \quad x = \pi \times 3.6, \quad \ldots, \quad x = \pi \times 5.7.$$

Fig. 2.

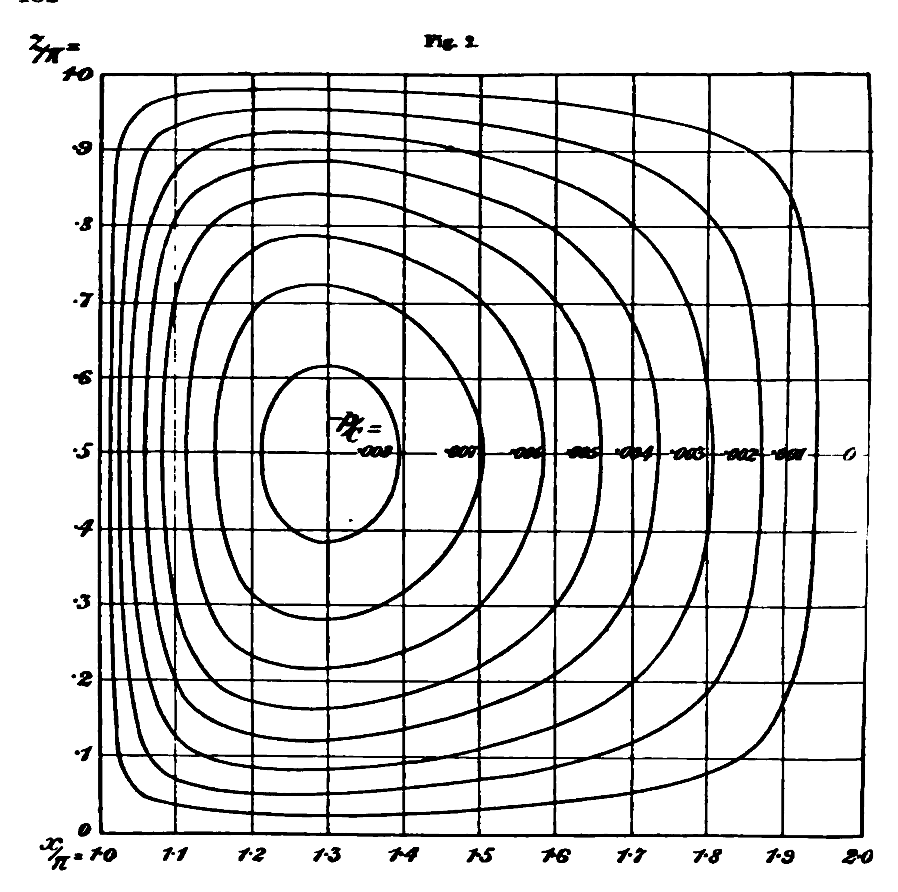


Table IV.

Distribution of Pressure over Slide-block, Case II.

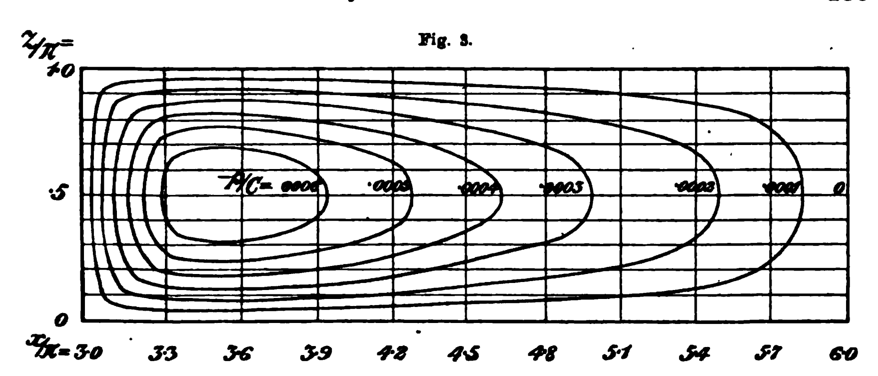
z/π	x/π								
	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8	5.1	5.4	5.7
.1	—.00023	—.00026	—.00022	—.00019	—.00015	—.00012	—.00010	—.00008	—.00004
.2	42	45	40	34	28	23	18	14	08
.3	53	59	53	45	37	30	24	18	12
.4	60	67	59	51	41	34	27	21	14
.5	61	69	61	52	43	36	29	22	14

Fig. 3, corresponding to Fig. 2 for the square block, shows the lines of equal pressure.

Approximate integration gives the mean pressure as

$$p_a = -.00155 \frac{lU}{c^2}.$$

Fig. 3.



The resultant pressure acts at .39 of the length of the block from the rear end, and the "coefficient of friction" is

$$\mu = c \times 143,$$

about thirteen times greater than in the case of the square block.

Case III. Slide-block of infinite length.

In Fig. 4 let the plane ADC represent the lower surface of a slide-block of infinite length in the direction of x, moving in the direction xO over the infinite plane xOz. As before let the planes ADC and xOz be inclined at an angle $\theta = \sin^{-1} c$. Let $AD = \pi$.

Fig. 4.

The boundary conditions become

$$p = 0, \text{ when } x = b = \infty,$$

and also

$$\text{when } z = 0, \ z = \pi.$$

In the general equation (1) $\frac{\partial p}{\partial x}$ and $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ can be assumed small in comparison with $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$, except near the end AD.

Therefore, except near AD,

(11) $$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{6 \lambda U}{c^2 x^3}$$

and consequently, observing the boundary conditions,

(12) $$p = \frac{3 \lambda U}{c^2 x^3} z \cdot (z - \pi).$$

From equation (12) the mean pressure over a section of the slide extending from $x = a$ to $x = b$ is

(13) $$p_a = \frac{3 \lambda U}{c^2 \pi (b - a)} \int_0^\pi \int_a^b \frac{z (z - \pi)}{x^3} \, dx \, dz$$

from which, putting $a = 3\pi$, $b = 6\pi$, we find for the mean pressure over an area corresponding to the slide-block of Case II

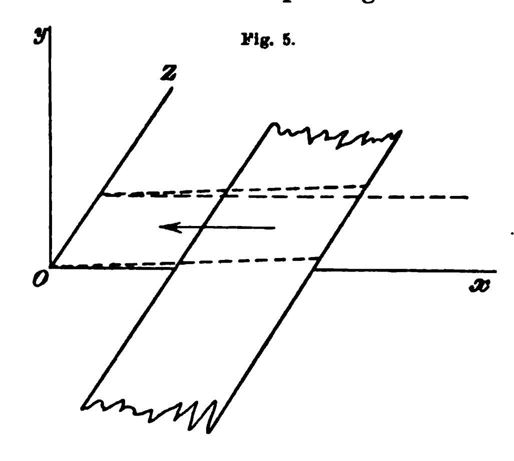


Fig. 5.

$$p_d = -.00258 \frac{\lambda U}{c^2}$$

as compared with $-.00155 \frac{\lambda U}{c^2}$ obtained from the exact expression.

This result indicates that the simple expressions (12) and (13) may used as approximations for slide-blocks whose length is several times greater than their width.

Case IV. Slide-block of infinite width.

The mathematics of this case has been given by Reynolds, (loc. cit.). For the purpose of comparison with the foregoing cases, some numerical results are here given for the same condition,

$$b = 2a.$$

The mean pressure is

$$p_d = -.0506 \frac{\lambda U}{c^2}$$

and is therefore greater than in the case of the square-block (I) in the ratio 1 : .422, showing the influence of the transverse flow of the fluid in the latter case.

The pressure at a series of points along the block is shown by the following table which gives the values of p/C.

Table V.

Distribution of Pressure in Slide-block of Infinite Width.

x/π	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$-p/C$	.00793	.01180	.01320	.01305	.01185	.00996	.00770	.00532	.00264

The resultant acts at $\bar{x} = \pi \times 1.433$.

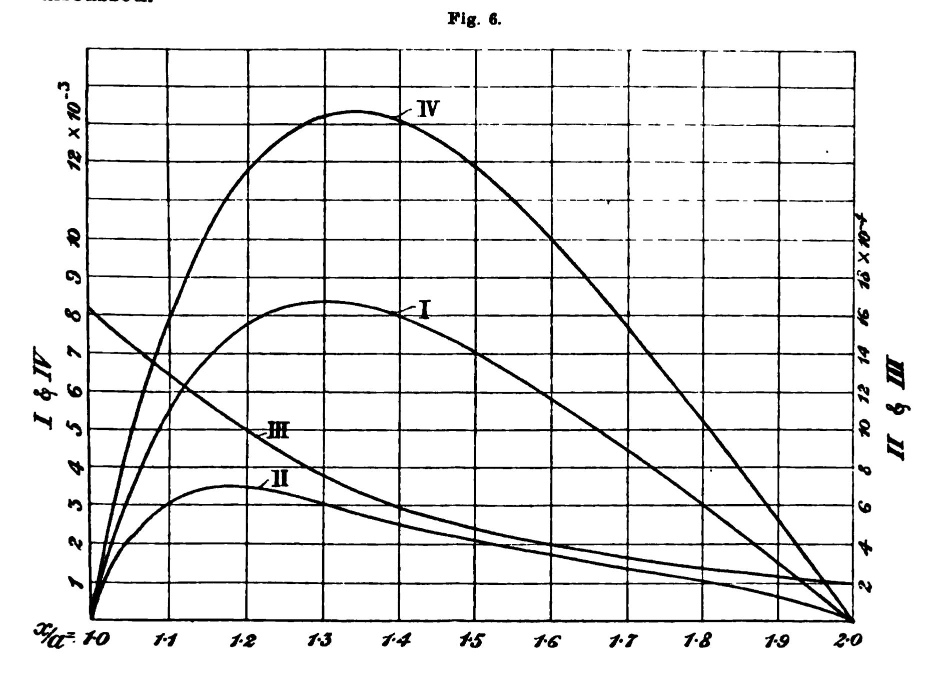
The "coefficient of friction" is $\mu = c \times 4.86 \cdots$ and is therefore less than half the coefficient for the square block, viz. $c \times 10.83 \cdots$.

The distribution of the pressure in the direction of motion in each of the above four cases is clearly shown to the eye by Fig. 6.

The ordinates of the curves I, II, III, IV, referred to the scales

written at the sides of the figure, give the magnitudes of the ratio p/C at all points along the middle lines ($z = \pi/2$) of the four blocks above discussed.

Fig. 6.



Experimental Verification by means of an Elastic Analogy.

The fundamental equations

$$q_{xx} = -p + 2\lambda\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \text{etc.}$$

and

$$q_{xy} = q_{yx} = \lambda\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad \text{etc.}$$

for the stresses on the faces of the element $dx\ dy\ dz$, are, as is well-known, equally applicable to the motion of an incompressible viscous fluid, and to the deformations of an incompressible elastic solid.

In the former case u, v, w are the velocities in the directions of x, y, z, and λ is the viscosity-constant; in the latter case u, v, w are the component displacements and λ the shear-modulus.

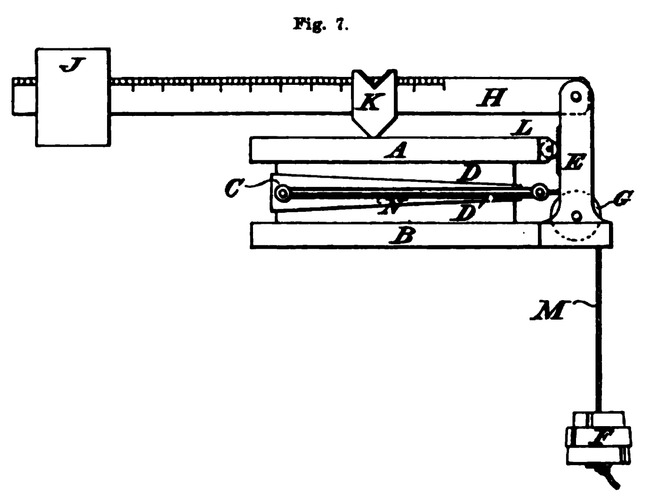
The whole of the foregoing investigation is therefore valid for the determination of the stresses in an incompressible elastic solid, in the form of a rectangular wedge, enclosed between two rigid, nearly

parallel, plane surfaces, one of which is displaced parallel to the plane of the other and in the direction of greatest mutual inclination.

Conversely, the results of experiment upon such an elastic solid give at the same time information upon a corresponding case of viscous-fluid motion.

Now there exists a large class of elastic substances, which admit of considerable (and therefore easily-observed) deformations approximately obeying Hooke's Law, and for which the assumption of incompressibility is nearly correct. India-rubber is a solid of this class, but still more convenient for the purpose is gelatine, which may, by solution in a suitable proportion of water, be prepared of almost any desired rigidity and may easily be moulded to any desired shape.

Fig. 7.



An apparatus for experiments of this kind is shown in Fig. 7.

A and *B* are two planed square plates of cast iron, *C* is a third square plate of varying thickness, the inclination of the sides being about 5 degrees. *D* and *D'* are two similar rectangular slabs of gelatine, each having half the taper of the plate *C*, so that when *D* and *D'* are in position between *A* and *C*, and *C* and *B* respectively, the plates *A* and *B* are parallel.

The plate *B* is formed with a pillar *E*, which supports the pivots of a pulley *G*, and of the lever *H*. This lever carries a movable weight, *J*, and has a movable fulcrum, *K*, which rests on the plate *A*. A roller, *L*, carried by the plate *A*, bears against a smooth vertical surface formed on the pillar, *E*.

A cord *M*, attached to the yoke *N*, which is freely hinged to the plate, *C*, near its rear end, passes over the pulley *G* and supports the weights *F*.

The purpose of the yoke, *N*, is to ensure that the tension of the cord is applied nearly horizontally to the plate, *C*, even if the latter is slightly displaced in a vertical direction.

The apparatus is used in the following manner.

The weights F and the lever H are first removed. Any suitable small weights are then placed on the plate A and adjusted until A and B are parallel, which may be determined with accuracy by applying a gauge at the four corners.

The lever, H, with the weight J, and the weights F are then applied, and the positions of J and of the fulcrum K adjusted until the plates A and B are again parallel, and the same distance apart as before. In this operation the plate C is displaced horizontally through a distance U.

The duplication of the gelatine slabs D and D' insures, from the symmetry, that the displacement U is parallel to A and B, and avoids the necessity of guides for this purpose and the uncertainty in the determination of the horizontal force on C which such guides would entail.

The displacement, U, corresponds to the velocity; the force applied by the fulcrum, K, to the load; and the tension of the cord to double the frictional resistance of a slide-block (represented by C) working on a fluid film corresponding to one of the gelatine slabs.

The point of contact of K and A corresponds with the position of the resultant pressure in the fluid film. The horizontal distance of this point from the vertical line through the centres of the slabs D and D' may be denoted by e.

The following short table gives the results of measurements on gelatine blocks, 12.7 cm. square, and of thickness varying from 6.0 mm. at the thin to 12.0 mm. at the thick ends, (the value of c being consequently .047), as compared with the results of the theory, Case I.

Table VI.

No.	P	$F/2$	e		$F/2P$.	
	gm.	gm.	observed	calculated	observed	calculated
1	1499	646	.97 cm.	$12.7 \times .080$	.43	.51
2	1040	476	1.06	$= 1.02$ cm.	.46	.51
3	1827	873	.75	"	.47	.51

It would not be difficult to design an analogous apparatus for the investigation of cylindrical bearings of finite width, and of other cases for which mathematical solutions are not available.

For use in the laboratory the method presents obvious advantages, and avoids the well-known difficulties of direct experiment on the lubrication of bearings.

Mathematische Theorie der Spiegelung in abwickelbaren Flächen.

Von Ludwig Matthiessen in Rostock.

Problem: Gegeben sei ein Kreiskegel SM_1M_2, senkrecht stehend auf einer Ebene. Außerhalb der Achse SM_0 über der Kegelspitze S befinde sich der feste Augenpunkt A (Fig. 1) des Beobachters, mit den Koordinaten $SB = a$ und $AB = b$, der spiegelnde Punkt P_0 auf der Leitlinie SW der Kegelfläche. Ferner sei δ das Azimut der Leitlinie SW gegen die Leitlinie SV der Ebene ABM_0. Der halbe Spitzenwinkel M_0SV gleich M_0SW des Kegels sei γ, der Winkel ASB gleich $\lambda\,(\lambda > \gamma)$, der Abstand des Augenpunktes A vom Kegelscheitel AS gleich d, die Entfernung des Punktes A vom Spiegelpunkte P_0 (Gesichtslinie) gleich x, weiter der Abstand des Spiegels P_0 von der Kegelspitze gleich z, die Seite des Kegels s, seine Höhe h, der Radius der Basis r und die Objektdistanz des gespiegelten Punktes P der Basisebene vom Spiegel P_0 gleich x_0.

Um zu den Gleichungen zwischen den Elementen der Neumannschen dioptrisch-katoptrischen Formeln[1]), enthaltend den Einfallswinkel e_2 des Strahles AP_0, das Azimut ε der Einfallsebene PP_0S gegen die Tangentialebene des Spiegels SP_0, seine beiden Krümmungsradien ϱ' und ϱ'', die Bilddistanzen x_1 und x_2 der astigmatischen Spiegelung, sowie die Azimute ϑ_2 und $90^0 + \vartheta_2$ der Brennlinien, zu gelangen, muß man von dem aus der Erfahrung gefolgerten Satze ausgehen, daß bei allen Fällen der Brechung oder Spiegelung in gekrümmten Flächen es im allgemeinen sehr schwierig, ja oft unmöglich erscheint

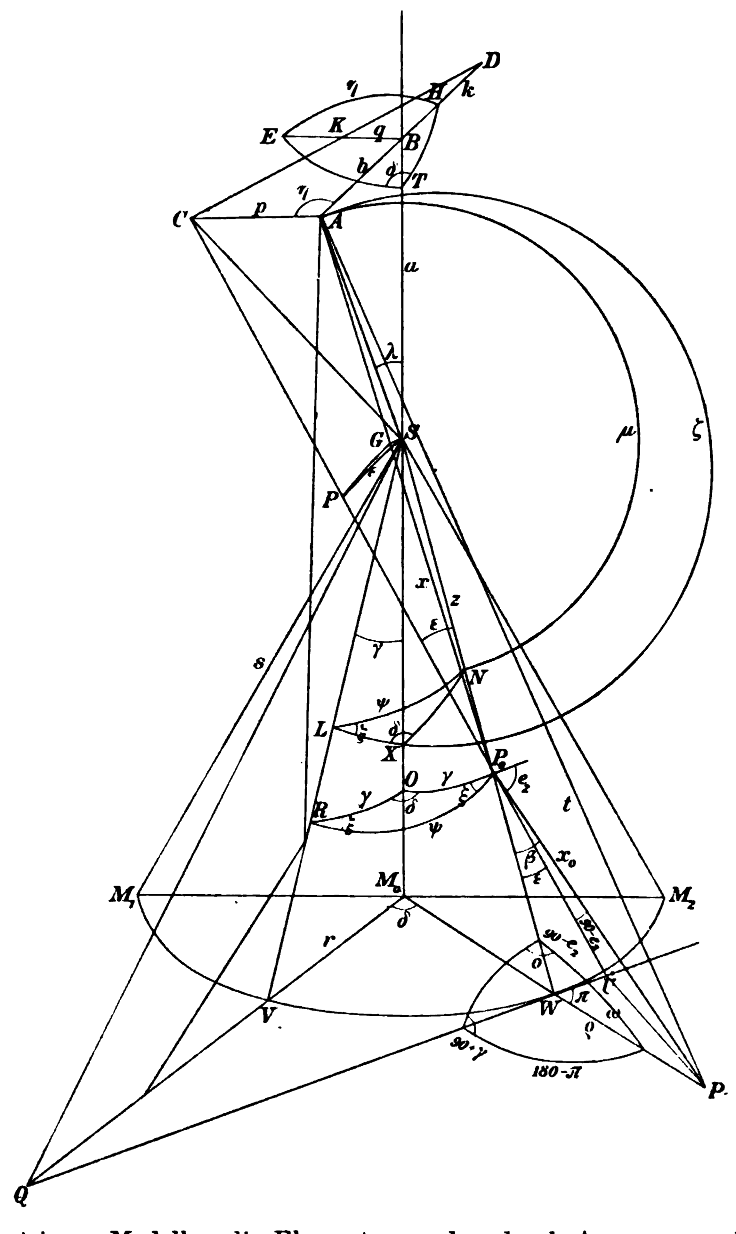
> *für einen gegebenen leuchtenden Punkt P die Richtung desjenigen Strahles x_0 zu finden, welcher in einem noch unbekannten Spiegel P_0 nach einem festen Augenpunkte gebrochen oder gespiegelt wird,*

wogegen es meistens gelingt, in entgegengesetzter Richtung, also direkter Richtung der Lichtbewegung, für einen z. B. von einem gegebenen Spiegel P_0 nach dem Augenpunkte A gespiegelten Strahl x den zugeordneten Objektpunkt P zu erhalten. Wir werden weiter unten zeigen, daß das erstere Verfahren für den Kreiskegel und Kreiszylinder möglich, für die übrigen abwickelbaren Flächen unmöglich erscheint.

1) L. Matthießen, Ann. d. Phys. 9. S. 691. 1902.

In schwierigen konkreten Fällen kann man auch, um weitläufige mathematische Entwicklungen zu umgehen, mit Hilfe der deskriptiven

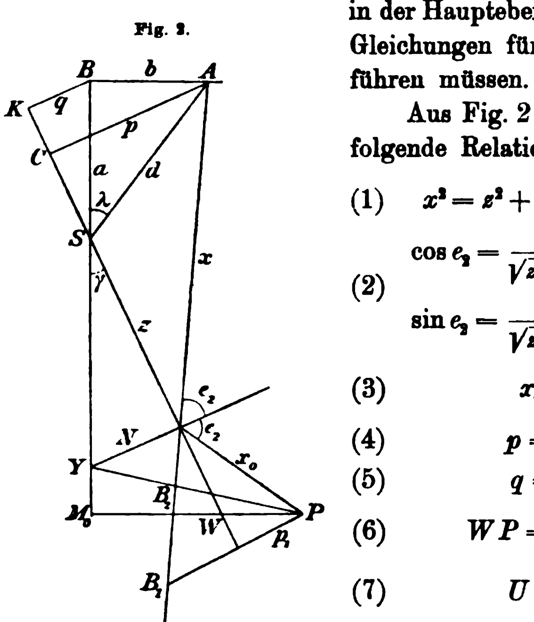
Fig. 1.



Geometrie an Modellen die Elemente ε und e_2 durch Ausmessung dieser Winkel suchen. Um dennoch eine allgemeine Lösung des Problems

zu bewerkstelligen, kann man in entgegengesetzter Richtung der Lichtbewegung für einen gegebenen Spiegel, z. B. die Leitlinie SP_0, die Gleichungen als Funktionen des Abstandes $SP_0 = z$ und der Elemente des Kegels suchen und auf diesem Wege alle zugehörigen Objektpunkte P einer gegebenen Fläche oder ihre Polargleichung $(\varrho, \varkappa) = 0$ erhalten, wie im folgenden versucht werden soll.

§ 1. Wir wollen zunächst in Berücksichtigung der Schwierigkeiten des allgemeinen Problems den speziellen einfacheren Fall betrachten, wo das Azimut δ zwischen dem Hauptschnitte, d. h. der durch den Augenpunkt A und die Achse gelegten Ebene, und der Reflexionsebene, also auch das Azimut ε gleich Null ist, folglich sämtliche Dimensionen in der Hauptebene liegen, weil die allgemeinen Gleichungen für $\delta = 0$ hierauf stets zurückführen müssen.



Aus Fig. 2 ergeben sich mit Leichtigkeit folgende Relationen:

(1) $$x^2 = z^2 + 2dz\cos(\lambda + \gamma) + d^2;$$

(2) $$\cos e_2 = \frac{d \sin(\lambda + \gamma)}{\sqrt{z^2 + 2dz\cos(\lambda+\gamma) + d^2}}, \quad \sin e_2 = \frac{z + d\cos(\lambda + \gamma)}{\sqrt{z^2 + 2dz\cos(\lambda+\gamma) + d^2}};$$

(3) $$x_0 = \frac{(s - z)\cos\gamma}{\sin(e_2 - \gamma)};$$

(4) $$p = d\sin(\lambda + \gamma);$$

(5) $$q = d\cos\lambda\sin\gamma;$$

(6) $$WP = \varrho = \frac{(s - z)\cos e_2}{\sin(e_2 - \gamma)};$$

(7) $$\widehat{UWP} = \varkappa = 90^0.$$

Aus (3) und (6) folgt, daß die Grenze des sichtbaren Objektfeldes in dieser Richtung bestimmt wird durch die Ungleichung $e_2 \geqq \gamma$. Ist $e_2 = \gamma$, so liegt P im Unendlichen. Der nächstliegende Objektpunkt liegt stets an der Peripherie der Kegelbasis in W; hier ist also $x_0 = 0$. Für die äußerste Grenze des Sehfeldes ist nach (2)

$$\cos e_2 = \cos\gamma = \frac{d\sin(\lambda + \gamma)}{\sqrt{z^2 + 2dz\cos(\lambda+\gamma) + d^2}}.$$

Daraus ergibt sich der Ort des konjugierten Spiegelelementes P_0

$$z_0 = -d\frac{\cos(\lambda + 2\gamma)}{\cos\gamma}.$$

Höher gelegene Spiegelpunkte geben keine Bilder. Die Konstruktion der beiden astigmatischen Bilder von P, nämlich B_1 und B_2, erfolgt am Ende.

§ 2. Der Spiegel SW sei nun allgemein um das Azimut δ gegen die Hauptebene geneigt; dann werden sämtliche Dimensionen räumlich. Wir suchen zunächst *die Gesichtslinie* $AP_0 = x$ *zu bestimmen.* Wir denken uns an den Spiegel SW die Tangentialebene gelegt, auf welcher die Einfalls- und Reflexionsebene senkrecht steht und in welcher das Azimut ε der letzteren liegt. Die Tangentialebene ist SWQ (Fig. 1), also $M_0 WQ = 90^0$. Um x zu finden, suchen wir den Winkel $ASN = \mu$ in dem sphärischen Dreiecke ANL (N liegt im Spiegel SW, L auf der Hauptleitlinie SV). An diesem sphärischen Dreiecke der Ecke $SAWV'$ liegt die gleichschenklige Ecke SM_0WV; das gleichwertige sphärische Dreieck dieser Ecke sei P_0OR (Fig. 3).

Fig. 3.

Für seine Winkel und Seiten gelten folgende Beziehungen:

$$\cos\psi = \cos\gamma^2 + \sin\gamma^2 \cos\delta = 1 - 2\sin\gamma^2 \sin\tfrac{1}{2}\delta^2,$$

$$\sin\psi = 2\sin\gamma \sin\tfrac{1}{2}\delta \sqrt{1 - \sin\gamma^2 \sin\tfrac{1}{2}\delta^2},$$

$$\tan\xi = \frac{\cot\frac{1}{2}\delta}{\cos\gamma}, \quad \cos\xi = \frac{\cos\gamma \sin\frac{1}{2}\delta}{\sqrt{1 - \sin\gamma^2 \sin\frac{1}{2}\delta^2}}.$$

Hieraus ergeben sich die Winkel des sphärischen Dreiecks ANL (Fig. 4)

$$\zeta = 180^0 + (\lambda + \gamma),$$

$$\cos\mu = \cos\zeta \cos\psi - \sin\zeta \sin\psi \cos\xi.$$

Fig. 4.

Setzt man die gefundenen Werte ein, so kommt

$$\cos\mu = -\cos\lambda \cos\gamma + \sin\lambda \sin\gamma \cos\delta = -\cos\varDelta.$$

Demgemäß ist nun

$$x^2 = z^2 - 2dz\cos\mu + d^2 = z^2 + 2dz\cos\varDelta + d^2. \tag{8}$$

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man von x in § 1 ausgeht und b um δ um die Achse dreht In Rückbeziehung auf die Formeln in § 1 geht die Gleichung (8) für $\delta = 0$ in (1) über.

§ 3. Es möge weiter eine *Relation für den Einfallswinkel* e_2 gesucht werden. Zu dem Zwecke projizieren wir den Augenpunkt A auf die Tangentialebene SQW; die Projizierende AC sei p. Ebenso

projizieren wir B auf diese Ebene; die Projizierende BK sei q. Ferner verlängern wir $AB = b$ rückwärts bis zum Durchschnittspunkte D mit derselben Ebene; die Rückwärtsverlängerung sei k. Das zugehörige rechtwinklige Dreieck ist dann ACD mit der Hypotenuse $AD = i = b + k$. Alsdann ist

(9) $$p = x \cos e_2.$$

Die Projizierende p läßt aber noch eine zweite Bestimmung zu, welche sich aus dem Dreiecke ACD ergibt (Fig. 1). Zunächst ist q für alle Werte von δ eine konstante Größe, nämlich

(10) $$q = a \sin \gamma = d \cos \lambda \sin \gamma.$$

Bezeichnen wir den Neigungswinkel von p gegen b, also CAB mit η, so ist der Winkel bei D gleich $90^0 - \eta$. Leicht ergeben sich folgende Beziehungen:

$$p = (b + k) \cos \eta = \left(b + d \frac{\cos \lambda \sin \gamma}{\cos \eta}\right) \cos \eta,$$

also

(11) $$p = d(\sin \lambda \cos \eta + \cos \lambda \sin \gamma).$$

Dabei wird $\eta = 90^0$ für $\delta = 90^0$, also $p = q = d \cos \lambda \sin \gamma$. Ist δ von Null verschieden, so ist weiter η zu bestimmen. Eine Beziehung dafür ergibt sich aus dem Quadrantendreiecke HET (Fig. 5) der Ecke $BDKS$, mit den Seiten η, $90^0 - \gamma$ und dem der ersteren gegenüberstehenden Winkel δ. Es ist

Fig. 5.

$$\cos \eta = \cos \gamma \cos \delta.$$

Daraus findet man nun

(12) $$p = d(\cos \lambda \sin \gamma + \sin \lambda \cos \gamma \cos \delta) = d \cos \Omega.$$

Ω ist demnach der Winkel, welchen die Projizierende p mit der Linie $AS = d$ bildet. Man erhält also den Wert von e_2 aus

Fig. 6.

(13) $$\cos e_2 = \frac{d \cos \Omega}{\sqrt{z^2 + 2dz \cos \Delta + d^2}}.$$

Es ist demnach e_2 desto größer, je größer z ist. In Rückbeziehung auf § 1 geht die Gleichung für $\delta = 0$ in (2) über.

§ 4. Wir haben ferner eine *Relation für das Azimut* ε aufzustellen. Eine solche ergibt sich aus der Betrachtung des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks SFG der Ecke P_0SFG oder P_0WUT (Fig. 6).

Man findet

(14) $\cos\varepsilon \cdot \sin e_2 = \cos\beta, \quad \sin o = \frac{\cos e_2}{\sin\beta}, \quad \tan o = \frac{\cot e_2}{\sin\varepsilon}$.

Nun ist β ein Winkel des ebenen Dreiecks ASP_0, welcher der Seite $AS = d$ gegenüber liegt, also ist

$$\sin\beta : \sin\mu = d : x, \quad 1 - \cos\beta^2 = (1 - \cos\mu^2)\frac{d^2}{x^2}.$$

Daraus folgt nunmehr

(15) $$\cos\varepsilon \cdot \sin e_2 = \cos\beta = \frac{z + d\cos\Delta}{\sqrt{z^2 + 2dz\cos\Delta + d^2}}.$$

Der Wert von $\sin e_2$ ergibt sich aus (13), nämlich

(16) $$\sin e_2 = \frac{\sqrt{z^2 + 2dz\cos\Delta + d^2\sin\Omega^2}}{\sqrt{z^2 + 2dz\cos\Delta + d^2}}.$$

In Verbindung mit (15) erhält man daraus

(17) $$\cos\varepsilon = \frac{z + d\cos\Delta}{\sqrt{z^2 + 2dz\cos\Delta + d^2\sin\Omega^2}}$$

(18) $$\sin\varepsilon = \frac{d\sin\lambda\sin\delta}{\sqrt{z^2 + 2dz\cos\Delta + d^2\sin\Omega^2}}$$

Aus den Gleichungen (13), (16), (18) folgt

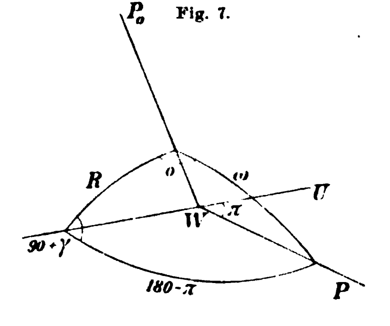
(19) $$\sin\varepsilon \cdot \tan e_2 = \frac{\sin\lambda\sin\delta}{\cos\lambda\sin\gamma + \sin\lambda\cos\gamma\cos\delta} = \text{const.}$$

Daraus ergibt sich weiter, daß nach (14) auch o ein konstanter Winkel ist, also

$$\cot o = \sin\varepsilon\tan e_2.$$

Das Azimut ε erreicht ein Maximum für $z = 0$, der Winkel e_2 ein Minimum. In Rückbeziehung auf § 1 wird $\varepsilon = 0$ für $\delta = 0$.

§ 5. Wir haben weiter eine *Relation für die Objektabszisse* $P_0P = x_0$ zu suchen. Diese erhält man aus dem ebenen Dreiecke P_0PW, wofür folgende Gleichung gilt:



(20) $$x_0 = \frac{(s - z)\sin\omega}{\sin(\omega + \beta)} = \frac{s - z}{\cos\beta + \cot\omega\sin\beta}.$$

Um ω zu finden, betrachten wir das sphärische Dreieck der Ecke WP_0PU (Fig. 7), welches ein Quadrantendreieck ist. Man findet daraus

(21) $\cot\omega = -\tan\gamma\sin o, \quad \cot\pi = \cot\gamma\cot o = \sin\varepsilon \cdot \tan e_2 \cos\gamma.$

Daneben ist nach (14)

$$\cos\beta = \cos\varepsilon \cdot \sin e_2, \quad \sin\beta = \sqrt{1 - \cos\varepsilon^2 \sin e_2^2}, \quad \sin o = \cos e_2 : \sin\beta .$$

Daraus folgt nunmehr

$$(22) \qquad x_0 = \frac{s - z}{\cos\varepsilon \sin e_2 - \tan\gamma \cos e_2} .$$

In Rückbeziehung auf § 1 wird $\varepsilon = 0$ für $\delta = 0$, also nach (3)

$$x_0 = \frac{s - z}{\sin e_2 - \tan\gamma \cos e_2} = \frac{(s - z)\cos\gamma}{\sin(e_2 - \gamma)} .$$

§ 6. Es läßt sich nun auch noch der *Ort des Objektpunktes P* in bezug auf die Tangente WQ bestimmen. Seine Polarkoordinaten in der Basisebene sind $WP = \varrho$ und π. Es ist im ebenen Dreieck WP_0P

$$\varrho : x_0 = \sin\beta : \sin\omega .$$

Nach (21) ist

$$\cot\omega = -\tan\gamma \cdot \sin o = -\frac{\tan\gamma \cos e_2}{\sin\beta}, \quad \sin\omega = \frac{\sin\beta}{\sqrt{\sin\beta^2 + \tan\gamma^2 \cos e_2^2}} .$$

Daraus folgt

$$(23) \quad \varrho = x_0\sqrt{1 - \cos\varepsilon^2 \sin e_2^2 + \tan\gamma^2 \cos e_2^2} = \frac{(s - z)d\sqrt{\sin\Delta^2 + \tan\gamma^2 \cos\Omega^2}}{z + d(\cos\Delta - \tan\gamma \cos\Omega)} .$$

In Rückbeziehung auf § 1 wird $\varepsilon = 0$ für $\delta = 0$ und gemäß (3) und (6)

$$\varrho : x_0 = \cos e_2 : \cos\gamma .$$

Der Polarwinkel π ergibt sich aus (21)

$$(24) \qquad \cot\pi = \sin\varepsilon \cdot \tan e_2 \cos\gamma = \frac{\sin\delta}{\cot\lambda \tan\gamma + \cos\delta} .$$

In Rückbeziehung auf § 1 wird $\varepsilon = 0$ für $\delta = 0$, also gemäß (7) $\pi = 90^0$.

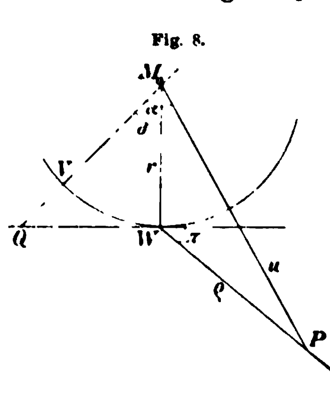


Fig. 8.

Aus der Beschaffenheit der Gleichung (24) geht hervor, daß sie von x oder z unabhängig ist, also zu einer bestimmten spiegelnden Leitlinie der Kegelfläche eine geradlinige Objektkurve gehört.

Die Eigenschaft des Polarwinkels π als einer konstanten Größe kann nun benutzt werden, die umgekehrte Richtung unserer Entwicklungen, also den direkten Weg der Lichtstrahlen von einem gegebenen Objektpunkte P nach dem Augenpunkte A zu verfolgen. Es ist in der Einleitung die Bemerkung gemacht, daß dies für den Kreiskegel, also auch für den Kreiszylinder, möglich sei. Es gelingt auch für die

Kugelfläche, dagegen · wohl kaum für den elliptischen Kegel und andere abwickelbare Flächen. Wir wollen unser Problem in dieser entgegengesetzten Richtung verfolgen.

Es sei M_0 (Fig. 8) das Zentrum der Kegelbasis, r ihr Radius, $PM_0 = u$, SW der gesuchte Spiegel, also δ sein gesuchtes Azimut, α das Azimut vom Objekte P; dann lassen sich δ, π und alle übrigen optischen Elemente finden. Es ist zunächst

$$u : r = \cos\pi : \cos(\pi + \alpha - \delta)$$

oder

(25) $$\cot\pi = \frac{\sin(\alpha - \delta)}{\cos(\alpha - \delta) - \frac{r}{u}},$$

und gemäß (24)

$$\cot\pi = \frac{\sin\delta}{\cot\lambda \tan\gamma + \cos\delta} = \frac{\sin\alpha\cos\delta - \cos\alpha\sin\delta}{\cos\alpha\cos\delta + \sin\alpha\sin\delta - \frac{r}{u}}.$$

Drückt man alles durch $\tan\delta$ aus, so ergibt sich

(26) $$(1 + \tan\delta^2)\left\{\left(\cot\lambda\tan\gamma - \frac{r}{u}\right)\tan\delta - \cot\lambda\tan\gamma\sin\alpha\right\}^2$$
$$= \{\sin\alpha\tan\delta^2 + 2\cos\alpha\tan\delta - \sin\alpha\}^2,$$

also eine biquadratische Gleichung nach $\tan\delta$. Derselben genügt für $\alpha = 0^0$ (Hauptebene) der Wert $\delta = 0^0$. Setzen wir in einem konkreten Falle $\lambda = 41^0 30'$, $\gamma = 30^0 30'$, $\alpha = 80^0$, $u = 25$ cm, $r = 12$ cm, $s = 24$ cm, so wird die Gleichung (26) in numerischen Werten:

$$0{,}8370 \tan\delta^4 + 0{,}2061 \tan\delta^3 - 2{,}3818 \tan\delta^2 - 1{,}1619 \tan\delta + 0{,}5398 = 0.$$

Ein Wurzelwert dieser Gleichung ist $\tan\delta = 1{,}7326$, also $\delta_1 = 60^0 0'$. Die übrigbleibende Gleichung ist

$$0{,}8370 \tan\delta^3 + 1{,}6573 \tan\delta^2 + 0{,}4896 \tan\delta - 0{,}3126 = 0.$$

Ein zweiter Wurzelwert ist $\tan\delta = 0{,}2959$, also $\delta_2 = 16^0 30'$ oder $-163^0 30'$. Die übrigbleibende quadratische Gleichung ist

$$0{,}8370 \tan\delta^2 + 1{,}9050 \tan\delta + 1{,}0533 = 0.$$

Die Wurzeln sind ebenfalls beide reell und negativ, nämlich $\delta_3 = -43^0 30'$, $\delta_4 = -53^0 0'$. Der einzig brauchbare Wert ist $\delta_1 = 60^0 0'$; es entsprechen entweder alle drei der inneren Inzidenz bei durchsichtigem Kegel, oder vielleicht auch nur einer. Welcher Wert, darüber zu entscheiden, bedarf einer besonderen Untersuchung.

Aus δ_1 berechnet man π und ϱ; dies aus

$$\varrho : u = \sin(\alpha - \delta) : \cos\pi.$$

Dabei findet man $\pi = 53^0 20'$, $\varrho = 14{,}1$ cm, $\varDelta = 61^0 30'$, $\Omega = 48^0 20'$, z (aus (23)) = 10,5 cm, x (aus (8)) = 20 cm, e_2 (aus (9)) = $65^0 0'$, ε (aus (24)) = $23^0 40'$, x_0 (aus (22)) = $-$ 23,2 cm.

Um diese Werte zu berechnen, kann man auch auf folgende Weise verfahren. Man verbinde den Objektpunkt P mit dem Augenpunkte A durch die Gerade t. Es ist dabei

$$(27) \quad t^2 = u^2 - 2du \sin\lambda \cos\alpha + s^2 \cos\gamma^2 + 2ds \cos\lambda \cos\gamma + d^2.$$

Die Linie t ist auf den Spiegel SW zu projiziren, wozu man noch den Objektpunkt P auf denselben zu projizieren hat. Ist p_1 die Projizierende und wie in (12) p die Projizirende des Augenpunktes A, so ist

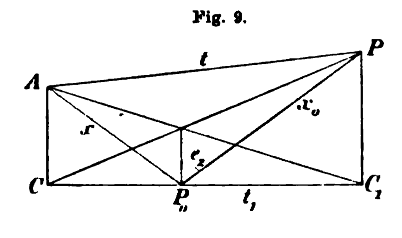
$$p = d(\cos\lambda \sin\gamma + \sin\lambda \cos\gamma \cos\delta), \quad p_1 = \varrho \sin\gamma \sin\pi.$$

Ist t_1 die Projektion von t, so ist

$$t_1 = \sqrt{t^2 - (p_1 - p)^2}.$$

Man findet dann leicht durch Konstruktion (Fig. 9) und Berechnung die Gesichtslinie $AP_0 = x$, die Objektdistanz $P_0P = x_0$, den Ort P_0 des Spiegels und den Einfallswinkel e_2. Das Azimut ε der Einfallsebene gegen den Spiegel SW ergibt sich aus (19)

Fig. 9.



$$\sin\varepsilon = \frac{\cot e_2 \sin\lambda \sin\delta}{\cos\lambda \sin\gamma + \sin\lambda \cos\gamma \cos\delta}.$$

Die vorstehenden Untersuchungen führen schließlich zu dem Satze, daß allgemein für alle abwickelbaren Flächen bei einem festen Augenpunkte zu einer Leitlinie als Spiegel krummlinige Objektkurven gehören, welche auf einer beliebigen Ebene liegen. Das Problem läßt sich aber nur punktuell für die abwickelbaren Flächen verallgemeinern, insofern als an die Stelle der gemeinsamen Einfallsebene eine gewundene Fläche eintritt, wobei sich die Elemente λ, γ, δ fortwährend ändern. Die Objektkurven auf irgend einer krummen Fläche findet man dadurch, daß man die Durchschnitte der Einfallsflächen mit jener Fläche konstruiert.

§ 7. *Die streifende Inzidenz.* Wenn man vom Augenpunkte aus die zwei Tangentialebenen an die Kegelfläche legt bis zum Durchschnitt mit der Basisebene (Objektebene), so begrenzen dieselben ein ringförmiges Flächenstück, in welchem sämtliche von A aus sichtbare, gespiegelte Objektpunkte enthalten sind. Wir erhalten dasselbe in

mathematischer Form, wenn wir $e_2 = 90^0$ setzen (streifende Inzidenz) Die Bestimmungsgleichung ist

(28) $$\cos(180 - \delta) = \cot\lambda \tan\gamma.$$

Diese Gleichung ist also von z unabhängig und das ringförmige Flächenstück nach beiden Seiten geradlinig begrenzt. Dasselbe folgt auch aus der Formel (24) für den Polarwinkel π, indem für alle Spiegelpunkte P_0 bei der streifenden Inzidenz $\pi = 0$ wird, also die Objektkurve mit der Tangente der Kegelbasis koinzidiert. Abhängig von $SP_0 = z$ sind aber die Elemente ε, x, x_0 und ϱ. Wir wollen dieselben einzeln betrachten.

a) *Das Azimut* ε hat ein Maximum für $z = 0$, ein Minimum für $z = s$.

Für $z = 0$ wird

$$\sin\varepsilon = \frac{\sin\lambda \sin\delta}{\sin\Omega}.$$

Setzt man den Grenzwert von δ ein, so kommt

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos\lambda}{\cos\gamma}, \quad \sin\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{\cos\lambda}{\cos\gamma}\right)^2}.$$

Da wir $\lambda > \gamma$ angenommen haben, so ist $\cos\lambda : \cos\gamma$ ein echter Bruch und ε reell. Für $z = s$ wird nach (17)

$$\cos\varepsilon = \frac{s + d\cos\Delta}{\sqrt{s^2 + 2ds\cos\Delta + d^2\sin\Omega^2}}.$$

Setzt man für δ seinen Wert ein, so wird

$$\cos\varepsilon = \frac{s + d\frac{\cos\lambda}{\cos\gamma}}{\sqrt{s^2 + 2ds\frac{\cos\lambda}{\cos\gamma} + d^2}}.$$

Dies ist ein echter Bruch für $\lambda > \gamma$; er ist größer als der vorhergehende, welcher $z = 0$ entspricht; es nimmt also ε mit wachsendem z ab.

b) Die *Objektdistanz* x_0 hat ein Maximum für $z = 0$, ein Minimum für $z = s$.

Für $z = 0$ wird

$$x_0 = \frac{s\sin\Omega}{\cos\Delta}.$$

Setzt man den Wert für δ ein, so wird

$$x_0 = s \cdot \frac{\cos\gamma}{\cos\lambda}.$$

Für $z = s$ wird $x_0 = 0$.

c) Der *Radiusvektor* ϱ *des Objektpunktes* ist ein Maximum für $z = 0$, ein Minimum für $z = s$.

Für $z = 0$ ist

$$\varrho = s \tan \varepsilon = \frac{s \cdot \sin \lambda \sin \delta}{\cos \Delta},$$

und wenn man den Wert für δ einsetzt

$$\varrho = s \sqrt{\left(\frac{\cos \gamma}{\cos \lambda}\right)^2 - 1}.$$

Für $z = s$ wird $\varrho = 0$. Der Polarwinkel π ist bei streifender Inzidenz gleich 0.

§ 8. *Die Berechnung der Bildweiten und ihres Astigmatismus.*

Für die Berechnung der beiden Bildweiten x_1 und x_2 gegebener Objektpunkte gelten die drei bekannten Neumannschen Gleichungen[1]) für die Brechung oder Spiegelung bei schiefer Inzidenz auf krumme Flächen. Für den Fall, welcher hier vorliegt, daß das einfallende Strahlenbündel homozentrisch ist, also $\xi_0 = x_0$, lauten dieselben

$$(29) \quad \frac{\varrho_1 \varrho_2 \sin e_1}{(\varrho_2 \cos \varepsilon^2 + \varrho_1 \sin \varepsilon^2) \sin(e_2 - e_1)} \left\{ -\frac{\cos e_2^2}{x_0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \cos e_1^2 \left(\frac{\cos \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\sin \vartheta_2^2}{x_1} \right) \right\} = 1,$$

$$(30) \quad \frac{\varrho_1 \varrho_2 \sin e_1}{(\varrho_2 \sin \varepsilon^2 + \varrho_1 \cos \varepsilon^2) \sin(e_2 - e_1)} \left\{ -\frac{1}{x_0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \left(\frac{\sin \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\cos \vartheta_2^2}{x_1} \right) \right\} = 1,$$

$$(31) \quad \frac{\varrho_1 \varrho_2 \sin e_1}{(\varrho_1 - \varrho_2) \sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \cdot \cos e_1 \cdot \frac{\sin 2\vartheta_2}{\sin 2\varepsilon} \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = 1.$$

Hieraus berechnen sich ϑ_2, x_1 und x_2 mittels folgender Gleichungen: Es sei

$$\frac{\cos \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\sin \vartheta_2^2}{x_1} = P_1, \quad \frac{\sin \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\cos \vartheta_2^2}{x_1} = Q_1,$$

$$\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2 = R_1.$$

Daraus erhält man

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = P_1 + Q_1, \quad \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) \cos 2\vartheta_2 = Q_1 - P_1,$$

und weiter

$$(32) \quad \tan 2\vartheta_2 = \frac{2 R_1}{P_1 - Q_1}, \quad \frac{1}{x_1 x_2} = P_1 Q_1 - R_1^2.$$

Es sind also x_1 und x_2 die Wurzeln von

$$(33) \quad \left(\frac{1}{x} - P_1 \right) \left(\frac{1}{x} - Q_1 \right) = R_1^2.$$

---

1) C. Neumann, Ber. d. Sächs Ges. d. Wiss., math.-phys. Kl. (1880) S. 53.

Die dioptrisch-katoptrischen Gleichungen lassen sich mit Rücksicht auf unser spezielles Problem noch vereinfachen. Es ist der Krümmungsradius des Hauptnormalschnittes von dem Spiegel SP_0W $\varrho_1 = \infty$, der des Nebennormalschnittes $\varrho_2 = N$ (Normale) $= z \tan\gamma$; $e_1 = -e_2$. Die drei Gleichungen (29), (30), (31) reduzieren sich auf folgende:

$$(34)\qquad \frac{\varrho_2 \cos e_2}{2 \sin \varepsilon^2} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{\varrho_2 \cos e_2}{2 \sin \varepsilon^2}\left(\frac{\cos \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\sin \vartheta_2^2}{x_1}\right) = 1,$$

$$(35)\qquad \frac{\varrho_2}{2 \cos \varepsilon^2 \cos e_2} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{\varrho_2}{2 \cos \varepsilon^2 \cos e_2}\left(\frac{\sin \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\cos \vartheta_2^2}{x_1}\right) = 1,$$

$$(36)\qquad \frac{\varrho_2 \sin 2\vartheta_2}{2 \sin 2\varepsilon}\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = 1.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen für die Bildweiten x_1 und x_2, sowie die Drehung ϑ_2 der einen Brennlinie gegen die Einfallsebene

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2x_0(1 - \cos \varepsilon^2 \sin e_2^2) - 2\varrho_2 \cos e_2}{x_0 \varrho_2 \cos e_2},$$

$$\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)\cos 2\vartheta_2 = \frac{2(\cos \varepsilon^2 \cos e_2^2 - \sin \varepsilon^2)}{\varrho_2 \cos e_2},$$

$$\tan 2\vartheta_2 = \frac{\sin 2\varepsilon \cdot \cos e_2}{\sin \varepsilon^2 - \cos \varepsilon^2 \cos e_2^2},$$

$$\frac{1}{x_1 x_2} = -\frac{2x_0(1 - \cos \varepsilon^2 \sin e_2^2) - \varrho_2 \cos e_2}{x_0^2 \varrho_2 \cos e_2}.$$

Es sind dann x_1 und x_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(37)\qquad \frac{1}{x^2} - 2\,\frac{x_0(1 - \cos \varepsilon^2 \sin e_2^2) - \varrho_2 \cos e_2}{x_0 \varrho_2 \cos e_2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{2x_0(1 - \cos \varepsilon^2 \sin e_2^2) - \varrho_2 \cos e_2}{x_0^2 \varrho_2 \cos e_2} = 0.$$

Dieser Gleichung genügt der eine Wert $x_1 = -x_0$, d. h. die erste Brennlinie liegt immer ebensoweit jenseits des Spiegels P_0 wie der Objektpunkt. Die zweite Bildweite ist

$$(38)\qquad x_2 = \frac{x_0 \varrho_2 \cos e_2}{2x_0(1 - \cos \varepsilon^2 \sin e_2^2) - \varrho_2 \cos e_2}.$$

In Rückbeziehung auf § 1 ist $\varepsilon = 0$ für $\delta = 0$ und

$$\frac{1}{x^2} - 2\,\frac{x_0 \cos e_2 - N}{x_0 N} \cdot \frac{1}{x} - \frac{2x_0 \cos e_2 - N}{x_0^2 N} = 0,$$

also

$$x_1 = -x_0, \quad x_2 = \frac{x_0 N}{2x_0 \cos e_2 - N}, \quad N = z \tan\gamma.$$

Für die Hauptebene wird ferner $\tan 2\vartheta_2 = 0$, also $\vartheta_2 = 0^0$.

Wenn der Augenpunkt in der Achse liegt, also in B, wird $\lambda = 0^0$ und

$$\cos e_2 = \frac{a \sin \gamma}{\sqrt{z^2 + 2az\cos\gamma + a^2}}.$$

Ist zugleich φ der Polwinkel bei B, so ist

$$z = \frac{a \sin \varphi}{\sin(\gamma - \varphi)} \quad \text{und} \quad \cot\varphi = \frac{a}{z \sin\gamma} + \cot\gamma.$$

Um die Örter der Brennlinien B_1 und B_2 zu finden, berechne man nacheinander z, e_2, N, x_0, x_1 und x_2. Man konstruiert B_1, indem man den Gegenpunkt von P (Fig. 2) zur Seite s sucht (ebener Spiegel); das Bild B_2 erhält man, indem man P mit V verbindet; der Schnittpunkt mit der Gesichtslinie ist der gesuchte (sphärische Spiegelung).

Wenn man der Kürze wegen an einem Modell ε und e_2, sowie die Dimensionen x_0 und ϱ_2 ermitteln kann, führt die Auflösung der quadratischen Gleichung (37) ebenfalls zur Bestimmung der beiden Bilddistanzen x_1 und x_2. Es ist dabei zu bemerken, daß in Beachtung der Richtung der Lichtbewegung in den Neumannschen Gleichungen x_0 negativ zu setzen ist.

Für unseren Spezialfall ergeben die Neumannschen Gleichungen noch folgende Werte der katoptrischen Konstanten für den Objektpunkt P.

$$\varrho_2 = N = 0{,}618, \quad x_1 = -x_0 = 23{,}2 \text{ cm}, \quad x_2 = 3{,}56 \text{ cm}, \quad \vartheta_2 = 43^0\,57'.$$

Aus dem Werte von ϑ_2 folgt, daß sich die Fokalebenen Σb_2 und $\Sigma_1 a_2$ um 44^0 gegen die Normalebene der Leitlinie gedreht haben.

Die Bewegungsgesetze der veränderlichen Masse.

Von Ferdinand Wittenbauer in Graz.

In gewissen Untersuchungen der technischen Mechanik ist es manchmal notwendig, die Masse des bewegten Punktes oder Körpers als veränderlich anzusehen. Man versteht darunter nicht immer eine wirkliche Änderung der Masse, sondern die Veränderung des Einflusses, den die Masse auf die Bewegung ausübt.

Fragen dieser Art müssen mit Vorsicht behandelt werden; die geläufigen Bewegungsgesetze, welchen durchwegs eine unveränderliche Masse zugrunde gelegt ist, gelten hier nur mit Einschränkungen und bedürfen einer Überprüfung.

Es ist vielleicht keine undankbare Aufgabe, die Bewegungs-

gesetze der veränderlichen Masse hier kurz zusammenzustellen und an einigen Beispielen zu erläutern; eine Reihe von Fehlern, die in Arbeiten von sehr bedeutenden Autoren zu finden sind, kennzeichnen die Schwierigkeit der Frage.

Die Veränderung der Masse eines bewegten Körpers kann auf zwei grundsätzlich verschiedene Arten erfolgen.

I. *Wirkliche* Zu- oder Abnahme der bewegten Masse;

II. *Gedachte* Veränderung der bewegten Masse.

Die erste Art, die u. a. beim Auf- und Abwickeln schwerer Ketten vorkommt, die zum Teil noch ruhen oder zum Teil wieder in Ruhe gelangt sind, wurde in der Literatur vielfach, aber oft fehlerhaft behandelt.

Die zweite Art kommt vor bei Maschinengetrieben, deren bewegte Masse nach einem ausgezeichneten Punkte der Maschine reduziert und eben durch diese Reduktion veränderlich, d. h. von der Stellung des Getriebes abhängig gemacht wird.

Diese beiden Arten weisen, so verschieden sie sind, gewisse Beziehungen auf, die den Einblick in diese eigentümlichen Bewegungsgesetze erleichtern.

I. Wirkliche Zu- und Abnahme der bewegten Masse.

1) Es sei M eine in Translation begriffene Masse, v ihre Geschwindigkeit, P die in der Bewegungsrichtung wirkende Kraft, dt das Zeitelement; dann ist nach dem Satze vom Antriebe

$$d(Mv) = P \cdot dt$$

Tritt nun im Zeitelemente dt eine kleine Masse dM mit der Geschwindigkeit v' hinzu, so ist die Änderung der Bewegungsgröße:

$$d(Mv) = Pdt + v' \cdot dM \cdots\cdots \qquad (1)$$

Diese Gleichung, welche den Vorgang in einfacher und durchsichtiger Weise erklärt, wurde von Routh in seiner „Dynamik der Systeme starrer Körper“ (deutsche Ausgabe, Band I. Seite 273) gegeben.

Ist zufällig $v' = v$, dann geht Gleichung (1) über in

$$Mdv = P \cdot dt$$

d. h. es gilt das Bewegungsgesetz der unveränderlichen Masse

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{P}{M}$$

Ist hingegen v' nicht gleich v, so wird Gleichung (1)

$$Mdv + (v - v') \cdot dM = P \cdot dt$$

und die Beschleunigung

$$\gamma = \frac{P}{M} - (v - v') \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{dM}{dt}$$

oder

$$\gamma = \frac{P - (v - v')\, v \frac{dM}{ds}}{M} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Hier muß also die Veränderung der Masse bereits berücksichtigt werden.

Zu demselben Resultate gelangt man auch mit Hilfe des Arbeitsprinzipes. Zu Beginn des Zeitelementes ist die Bewegungsenergie der Masse M: $\frac{1}{2} Mv^2$, jene der hinzutretenden Masse: $\frac{1}{2} dM \cdot v'^2$; am Ende des Zeitelementes ist die Energie der vereinigten Massen: $\frac{1}{2}(M + dM)(v + dv)^2$. Berücksichtigt man, daß die Massen M und dM mit ungleichen Geschwindigkeiten v und v' zusammentreffen und ihre Bewegung mit gleicher Geschwindigkeit $v + dv$ fortsetzen, so erkennt man das Eintreten eines unelastischen Stoßes, dessen Energieverlust

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{M \cdot dM}{M + dM} (v - v')^2 = \frac{1}{2} dM (v - v')^2$$

ist. Das Arbeits-Prinzip liefert also die Gleichung

$$\frac{1}{2}(M + dM)(v + dv)^2 - \frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} dM \cdot v'^2 + \frac{1}{2} dM (v - v')^2 = P \cdot ds \cdots (3)$$

woraus

$$d(Mv) = P \cdot dt + dM \cdot v'$$

also wieder Gleichung (1) folgt.

Es soll dies an einigen Beispielen erläutert werden.

2) Ein Wagen, mit Wasser oder Sand gefüllt, laufe auf horizontaler Straße; er verliere durch einen Schaden des Wagens gleichförmig seine Masse, so daß

$$M = M_0 - kt,$$

wenn M_0 die anfängliche Masse und k eine Konstante ist. Dann wird Gleichung (1)

$$d(Mv) = -cMg \cdot dt + v \cdot dM,$$

worin c die Konstante des Straßenwiderstandes ist und $v' = v$ gesetzt wurde, weil die abfließende Masse den Wagen in Richtung der Bewegung mit der Geschwindigkeit des Wagens verläßt.

Es bleibt also

$$dv = -cg\,dt$$

oder

$$\gamma = -cg$$

wie bei konstanter Masse. Das Abfließen der Masse hat also keinen Einfluß auf die Bewegung des Wagens.

3) Derselbe Wagen erhalte während seiner Bewegung den gleichförmigen Zufluß von Masse aus einem in Ruhe befindlichen Rohre. Dann ist

$$M = M_0 + kt.$$

Findet der Zufluß vertikal statt, so ist in Richtung der Bewegung $v' = 0$ und Gleichung (1) wird

$$d(Mv) = -eMg \cdot dt.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$v = \frac{M_0}{M} v_0 - \frac{cg}{2}\left(1 + \frac{M_0}{M}\right) \cdot t$$

sowie

$$\gamma = -cg - \frac{k}{M^2}\left[M_0 v_0 - \frac{cg}{2}(M_0 + M)t\right].$$

Die Zeit, welche bis zum Stillstand des Wagens vergeht, ergibt sich mit

$$T = \frac{M_0}{k}\left[\sqrt{1 + \frac{2kv_0}{cgM_0}} - 1\right],$$

während sie ohne Vermehrung der Masse, also für $k = 0$, den Wert hätt

$$T = \frac{v_0}{cg}.$$

4) Resal behandelt in seinem Traité de mécanique générale, T. I., p. 339 folgende Aufgabe:

An dem einen Ende eines Fadens, der über eine Rolle mit horizontaler Achse läuft (Fig. 1.), ist eine Masse M befestigt, an dem andern Ende eine ebenso schwere Kette, die zum Teile auf einer horizontalen Ebene aufgehäuft liegt; man ermittle das Gesetz der Bewegung.

Fig. 1.

Ist x die Länge des bereits emporgehobenen Kettenstückes, μ seine Masse für die Längeneinheit, so ist, wenn man von der Masse der Rolle absieht, nach Gleichung (1)

$$d[(M + \mu x)v] = (M - \mu x)g \cdot dt$$

weil die Geschwindigkeit v' der neu hinzukommenden Kettenglieder null ist. Diese Gleichung liefert also:

$$\mu v \frac{dx}{dt} + (M + \mu x)\frac{dv}{dt} = (M - \mu x) \cdot g.$$

Nennt man θ den Drehungswinkel der Rolle, so ist

$$\frac{dx}{dt} = v = r\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

und somit

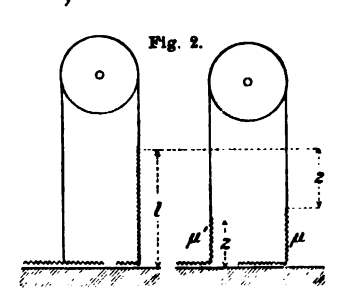
$$\mu r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + (M + \mu x) r \frac{d^2\theta}{dt^2} = (M - \mu x) \cdot g$$

die Differenzialgleichung der Bewegung.

Resal vergißt, die veränderliche Masse zu berücksichtigen; er unterdrückt dadurch das erste Glied der obigen Gleichung und findet bei Vernachlässigung der Rollen-Masse

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{(M - \mu x) g}{(M + \mu x) \cdot r}.$$

5) Herr Piarron de Mondesir beschäftigte sich in seiner Abhandlung: Sur la force (Mémoires de la société des ingénieurs civils 1887) mit der Veränderlichkeit der bewegten Masse. Er zeigt, daß sich das Gesetz der lebendigen Kraft auf veränderliche Massen ebenso anwenden läßt, wie auf konstante Massen, vergißt aber, die bei Veränderung der Masse auftretenden Stöße zu berücksichtigen und kommt ebenfalls zu unrichtigen Resultaten. Herr de Mondesir versucht folgendes Beispiel zu lösen:



Die höchsten Enden zweier homogenen Ketten, deren Massen μ und μ' für die Längeneinheit sind, werden durch einen undehnbaren, gewichtlosen Faden verbunden, der über eine Rolle läuft (Fig. 2). Zu Beginn der Bewegung ist die rechte Kette bis zur Höhe l aufgezogen, während die linke ganz auf einer horizontalen Ebene liegt; nach der Zeit t ist die rechte Kette um z gesunken, die linke hat sich um z gehoben. Man suche die Bewegungsgleichung der Kette ohne Rücksicht auf die Masse der Rolle und die Widerstände.

Benützt man wieder die Gleichung (1) und setzt die ganze bewegte Masse

$$M = z\mu' + (l - z)\mu,$$

die bewegende Kraft

$$P = (l - z) g\mu - z g \mu'$$

und beachtet, daß die im Zeitelement hinzukommende Bewegungsgröße

$$\mu' v' \cdot dz - \mu v \cdot dz$$

und überdies $v' = o$ ist, so wird die Gleichung (1)

$$d\{[z\mu' + (l - z)\mu] v\} = [(l - z)\mu - z\mu'] g dt - \mu v dz$$

oder

$$v^2 \mu' dz + v dv [\mu l + (\mu' - \mu) z] = g[\mu l - (\mu' + \mu) z] dz \cdots \quad (4)$$

Geht man hingegen vom Arbeitsprinzipe aus, so müßte gesetzt werden:

Bewegungs-Energie der Kette + Energieverlust durch Stoß (links und rechts) = Geleistete Arbeit

oder

$$\frac{1}{2}[z\mu' + (l-z)\mu]v^2 + \frac{\mu}{2}\int_0^z (dz \cdot v^2) + \frac{\mu'}{2}\int_0^z (dz \cdot v^2) = -\frac{1}{2}\mu' g z^2 + + \mu g z\left(l - \frac{z}{2}\right) \cdots \quad (5)$$

Differenziert man diese Gleichung, so erhält man Gleichung (4) wieder.

Die Integration der Bewegungsgleichung (4) liefert für die Geschwindigkeit den Ausdruck

$$v^2 = \frac{4g\mu l}{3\mu' - \mu}\left\{1 - \frac{z}{l}\,\frac{\mu' + \mu}{2\mu} - \left[\frac{\mu l}{z(\mu' - \mu) + \mu l}\right]^{\frac{2\mu'}{\mu' - \mu}}\right\}$$

Herr Piarron de Mondesir findet Gleichung (5), jedoch ohne die beiden Integrale; er hat also die auftretenden Energie-Verluste durch Stoß unberücksichtigt gelassen.

Er findet demgemäß

$$v^2 = \frac{[2\mu l - (\mu + \mu')z]gz}{\mu l + (\mu' - \mu)z}.$$

Haben beide Ketten gleichviel Masse in der Längeneinheit, d. h. ist $\mu' = \mu$, so wird Gleichung (4)

$$v^2 dz + l v dv = g(l - 2z) \cdot dz$$

und

$$v^2 = 2gl\left[1 - \frac{z}{l} - e^{-\frac{2z}{l}}\right],$$

während Herr Piarron de Mondesir in diesem Falle

$$v^2 = 2gz\left(1 - \frac{z}{l}\right)$$

findet. Er bemerkt, daß dieses Resultat auch aus der Gleichung von Lagrange für konstante Masse entnommen werden könnte, weil die gesamte bewegte Masse jetzt unveränderlich gleich μl bleibt; dies ist richtig, allein es darf nicht vergessen werden, daß trotzdem auch jetzt noch wie früher rechts und links Energieverluste durch Stoß auftreten, welche das Resultat beeinflussen.

II. Gedachte Veränderung der Masse.

(Reduktion der Masse.)

6) Ist dm ein Massenteilchen des bewegten Körpers, u seine Geschwindigkeit, v die Geschwindigkeit eines bestimmten Punktes R des Körpers, so versteht man unter

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{v^2}\int u^2 \cdot dm \cdots \tag{6}$$

die nach R **reduzierte Masse des Körpers** und R selbst nennt man **Reduktionspunkt**.

Es ist ohne weiteres klar, daß die reduzierte Masse die gleiche Bewegungsenergie haben wird, wie die wirkliche Masse des Körpers; ebenso ist aber aus Gleichung (6) auch zu entnehmen, daß $\mathfrak{M}$ eine veränderliche Größe sein wird und als Funktion des von R zurückgelegten Weges s aufgefaßt werden darf.

Ist ferner P irgend eine auf den Körper wirkende Kraft, u die Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes, so versteht man unter

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{v}\,\Sigma\,(Pu) \cdots \tag{7}$$

das nach dem Reduktionspunkt R reduzierte Kraftsystem des Körpers. Auch $\mathfrak{P}$ wird veränderlich sein und kann als Funktion von s aufgefaßt werden; man kann $\mathfrak{P}$ als Einzelkraft von veränderlicher Größe denken, die auf die veränderliche Masse $\mathfrak{M}$ des Punktes R einwirkt.

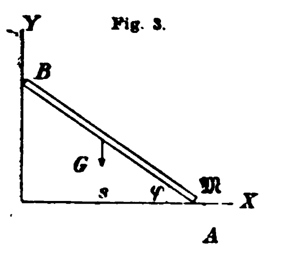


Fig. 3.

Wir wollen dies an einem Beispiele der ebenen Bewegung näher beleuchten.

Ein homogener schwerer Stab AB (Fig. 3) gleite aus der ruhenden Anfangslage $\varphi = \varphi_0$ an Wand und Boden abwärts. Wählt man das Fußende A des Stabes als Reduktionspunkt und nennt s seinen Weg, so ist die nach Gleichung (6) reduzierte Masse

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{3\sin^2\varphi} = \frac{Ml^2}{3(l^2 - s^2)},$$

worin M die wirkliche Masse des Stabes und l seine Länge ist. Ferner wird nach Gleichung (7) die nach A reduzierte Kraft

$$\mathfrak{P} = \frac{G}{2}\operatorname{cotg}\varphi = \frac{G}{2}\,\frac{s}{\sqrt{l^2 - s^2}}.$$

wenn auf die Reibung keine Rücksicht genommen wird. Das Fußende A bewegt sich also genau so, als wenn es ein freier Punkt von der Masse $\frac{M}{3\sin^2\varphi}$ wäre, auf die die Kraft $\frac{G}{2}\cot\varphi$ wirken würde.

7) Dieser Ersatz der wirklichen Masse des Körpers und seines wirklichen Kraftsystems durch die reduzierte Masse $\mathfrak{M}$ eines Punktes und die reduzierte Kraft $\mathfrak{P}$ gestattet, die Bewegung eines Körpers auf die Bewegung eines Punktes mit veränderlicher Masse zurückzuführen. Dies erweist sich vorteilhaft in dem Falle, daß die geometrische Form der Bewegung vorgeschrieben ist, wie dies bei den zwangläufigen Maschinengetrieben zutrifft. Ich habe in meiner Abhandlung: „Graphische Dynamik der Getriebe" (diese Zeitschrift, Band 50) gezeigt, wie man die erwähnte Methode benützen kann, um die Bewegung des ebenen Maschinengetriebes mit Rücksicht auf Kräfte und Massenverteilung zu untersuchen, und habe auch versucht, die Überlegenheit dieser Methode gegenüber der rechnerischen Behandlung nachzuweisen, da sie gestattet, die wirkliche Massenverteilung des Getriebes vollständig und genau zu berücksichtigen, ohne irgend eine Vernachlässigung oder Vereinfachung nötig zu machen.

8) Um zu dem Bewegungsgesetze der reduzierten Masse zu gelangen, denken wir uns, der Weg s des Reduktionspunktes R habe um ds zugenommen; die veränderliche Masse $\mathfrak{M}$ nehme hiebei um $d\mathfrak{M}$ zu. Diese Zunahme an Masse erfolgt aber im Gegensatze zu I. ohne Stoß, da sie nur gedacht ist; sie erfolgt im Zeitelemente dt und durchläuft alle Werte der Geschwindigkeit von O bis v, liefert also einen Zuwachs an Bewegungsgröße von $\frac{1}{2}\,v\cdot d\mathfrak{M}$; die Änderung der Bewegungsgröße ist demnach

$$d(\mathfrak{M}v) = \mathfrak{P}\cdot dt + \tfrac{1}{2}v\,d\mathfrak{M}\cdots \tag{8}$$

woraus

$$\mathfrak{M}\cdot dv + \tfrac{1}{2}v\,d\mathfrak{M} = \mathfrak{P}\cdot dt \tag{9}$$

oder

$$d(\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}v^2) = \mathfrak{P}\cdot ds$$

und

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}v^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_0 v_0^2 = \int \mathfrak{P}\cdot ds\cdots \tag{10}$$

folgt. Man entnimmt hieraus, daß das Arbeitsprinzip auch für Punkte mit gedachter veränderlicher Masse seine Geltung beibehält.

Zu demselben Resultate würde man mit Hilfe der Gleichung (3) gelangen, wenn man sie folgendermaßen anschreiben würde:

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{M} + d\mathfrak{M})(v + dv)^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}\cdot v^2 = \mathfrak{P}\cdot ds$$

d. h. wenn man die Energieverluste durch Stoß in Gleichung (3) unterdrücken würde, da sie hier nicht vorkommen können.

Aus Gleichung (9) folgt überdies noch nach Division durch dt

$$\gamma = \frac{\mathfrak{P} - \frac{1}{2} v^2 \frac{d\mathfrak{M}}{ds}}{\mathfrak{M}}, \ldots \tag{11}$$

eine Gleichung, die mit (2) übereinstimmt, wenn man dort $v' = \frac{v}{2}$ setzt.

9) Nennt man L die Bewegungsenergie des Getriebes, so kann Gleichung (10) geschrieben werden

$$L = \frac{1}{2}\mathfrak{M} v^2 = \frac{1}{2}\mathfrak{M}_0 v_0^2 + \int \mathfrak{P} \cdot ds$$

oder auch

$$\mathfrak{P} = \frac{dL}{ds} \ldots \tag{12}$$

Ferner kann Gleichung (11) in der Form geschrieben werden

$$\gamma = \frac{d}{ds}\left(\frac{L}{\mathfrak{M}}\right),$$

oder, wenn man

$$\frac{L}{\mathfrak{M}} = \mathfrak{L}$$

die spezifische Energie der Masse nennt:

$$\gamma = \frac{d\mathfrak{L}}{ds} \ldots \tag{13}$$

Dies wäre eine Definition der Beschleunigung, welche die konstante Masse mit der veränderlichen Masse gemein hat, während die gebräuchliche Definition

$$\gamma = \frac{\mathit{Kraft}}{\mathit{Masse}}$$

für veränderliche Massen nicht anwendbar ist, wie Gleichung (11) lehrt.

10) Die Beziehungen zwischen Energie der Bewegung L, veränderlicher Masse $\mathfrak{M}$, Weg s, Kraft $\mathfrak{P}$, Geschwindigkeit v und Beschleunigung γ lassen sich sehr anschaulich durch ein räumliches Diagramm (Fig. 4) darstellen.

Der Zustand eines bewegten Getriebes sei für eine bestimmte Stelle s des Weges durch die Bewegungsenergie L und die reduzierte Masse $\mathfrak{M}$ des Getriebes gegeben. Betrachtet man s, L, $\mathfrak{M}$ als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes R, so schildert die Lage dieses Punktes den augenblicklichen Bewegungszustand des Getriebes. R_0 sei dessen Anfangszustand; die räumliche Kurve R_0R gibt den Verlauf der

Zustandsänderungen des Getriebes. Ihre Projektionen auf die drei Koordinatenebenen sind: das Energie-Weg-Diagramm, das Massen-Weg-Diagramm und das Energie-Massen-Diagramm.

Zieht man in dem Punkte P des ersten dieser Diagramme die Tangente, so ist die Neigung α derselben gegen die s-Achse nach Gleichung (12)

$$tg\alpha = \frac{dL}{ds} = \mathfrak{P}$$

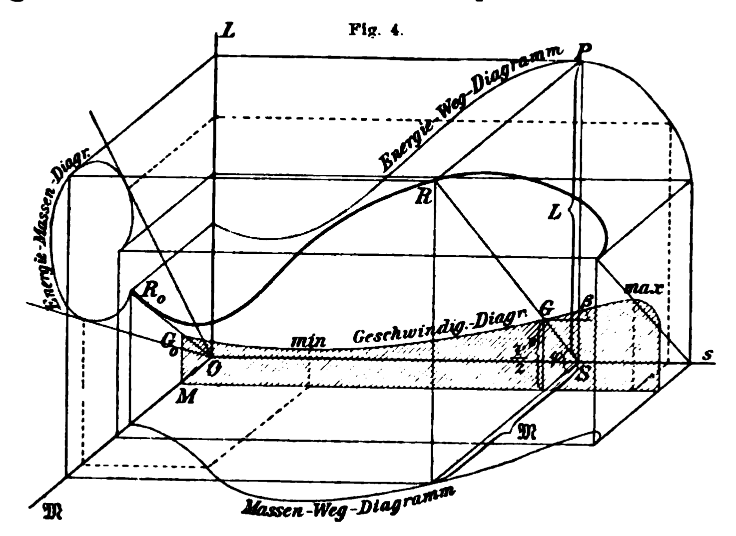
ein Maß für die reduzierte Kraft des Getriebes.

Verbindet man die Punkte R und S, so gibt die Neigung φ dieser Geraden gegen die $\mathfrak{M}s$-Ebene in

$$tg\varphi = \frac{L}{\mathfrak{M}} = \mathfrak{L}$$

ein Maß für die spezifische Energie der Masse. Legt man in der Entfernung OM = Masseneinheit eine Ebene parallel der Ls-Ebene, so

Fig. 4.



schneidet diese die Gerade RS in G; der Ort aller dieser Punkte ist das Diagramm $G_0 G$. Die Ordinaten dieses Diagramms sind wegen

$$\frac{L}{\mathfrak{M}} = \mathfrak{L} = \frac{v^2}{2}$$

die spezifischen Energien oder die halben Geschwindigkeitsquadrate; das Diagramm kann also als eine Art Geschwindigkeitsdiagramm aufgefaßt werden.

Die Neigung β der in G gezogenen Tangente dieses Diagramms gegen die $\mathfrak{M}s$-Ebene ist nach Gleichung (13)

$$tg\beta = \frac{d\mathfrak{L}}{ds} = \gamma$$

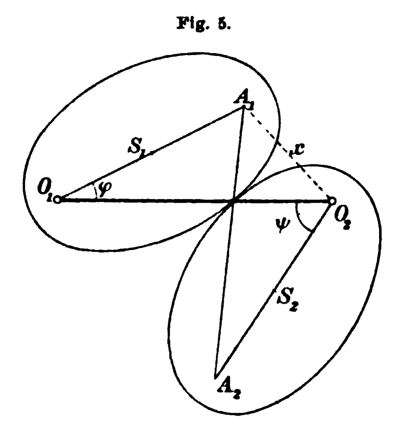
ein Maß für die Beschleunigung der Bewegung.

Zieht man an das Energie-Massen-Diagramm von O aus die Tangenten, so findet man jene Zustände des Getriebes, in denen die kleinsten oder größten Geschwindigkeiten bestehen. Die Stellen v_{min} und v_{max} sind im Geschwindigkeitsdiagramm angedeutet worden. Diese Eigenschaft des Energie-Massen-Diagramms habe ich benützt, um eine neue Art von graphischer Bestimmung des Schwungradgewichtes anzugeben (Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1905).

Gewöhnlich wird man mit den beiden anderen Diagrammen sein Auslangen finden. Man klappt sie dann, wie es in der darstellenden Geometrie üblich ist, in eine Ebene und arbeitet mit diesen beiden Projektionen der Zustandskurve R_0R. Dies soll an einem der Getriebelehre entnommenen Beispiele noch näher erläutert werden.

11) Die zwangläufigen Getriebe, die im Maschinenbau Verwendung finden, durchlaufen immer wieder dieselbe Stellung. Darin ist es begründet, daß die veränderliche Masse $\mathfrak{M}$ immer eine periodische Funktion ist.

Fig. 5.



Als Beispiel soll ein Paar kongruenter elliptischer Räder behandelt werden, die sich um ihre festliegenden Brennpunkte $O_1\,O_2$ drehen (Fig. 5). Wir wollen den beweglichen Brennpunkt A_1 des linken Rades als Reduktionspunkt wählen und die Masse M des rechten Rades dahin reduzieren. Bezeichnen wir

$$O_1\,O_2 = A_1A_2 = 2a,$$
$$O_1A_1 = O_2A_2 = 2e$$

und mit Mk^2 das Trägheitsmoment des Rades um seinen Brennpunkt, so ist

$$\mathfrak{m} = M\left(\frac{k}{2e}\right)^2$$

die nach A_2 reduzierte Masse des rechten Rades. Die weitere Reduktion von $\mathfrak{m}$ nach A_1 verlangt die Gleichung

$$\mathfrak{M}_2\left(2e\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \mathfrak{m}\cdot\left(2e\cdot\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

oder

$$\mathfrak{M}_2 = M\cdot\frac{k^2}{4e^2}\cdot\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2.$$

Die weitere Rechnung lehrt, daß

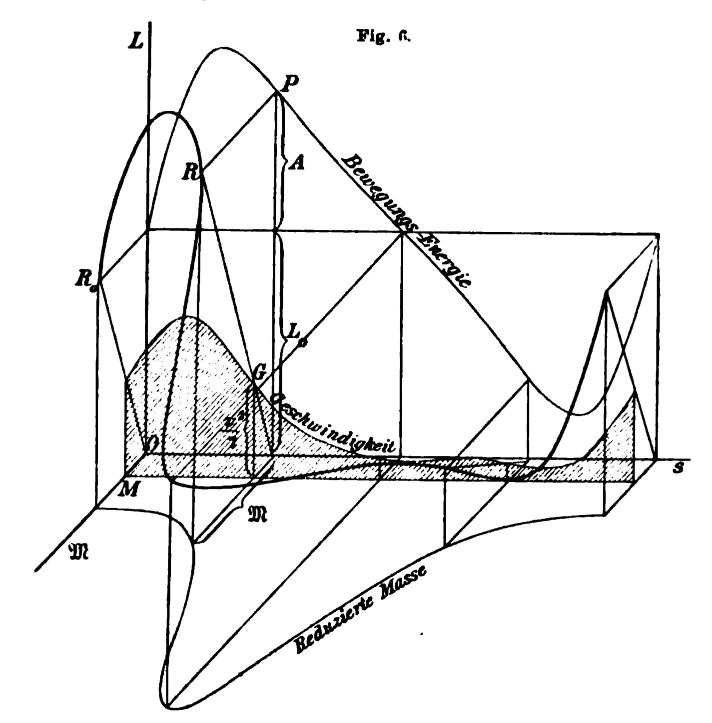
$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{4b^2}{x^2}$$

worin b die kleine Halbachse der Ellipse und x die veränderliche Entfernung $A_1 O_2$ ist; es wird also

$$\mathfrak{M}_2 = M \cdot \frac{4k^2b^2}{e^2} \cdot \frac{1}{x^4},$$

worin x periodisch zwischen den Werten $2(a-e)$ und $2(a+e)$ schwankt.

Nehmen wir an, die Anfangslage des Radpaares sei $\varphi = 0$, $\psi = 180^0$, die anfängliche Bewegungsenergie sei L_0, und die Räder wären sich



nun selbst überlassen. Sieht man von allen Widerständen ab, so ist die Arbeit, welche von den beiden gleichen Gewichten der Räder geleistet wird:

$$A = Mge \sin\varphi \left(\frac{4b^2}{x^2} - 1\right),$$

ebenfalls eine periodische Funktion.

Für das vorliegende Getriebe ist also

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2,$$

und weil $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{m}_2$ ist:

$$\mathfrak{M} = M \cdot \frac{k^2}{4e^2}\left[1 + 16\frac{b^4}{x^4}\right],$$

ferner

$$L = L_0 + A = L_0 + Mge \sin\varphi \left(\frac{4b^2}{x^2} - 1\right).$$

Fig. 6 zeigt die Diagramme Ls und $\mathfrak{M}s$. Der Kreisweg $s = 2e\varphi$ des Reduktionspunktes A_1 wurde auf der s-Achse abgewälzt und die zugehörigen Werte von L und $\mathfrak{M}$ wurden aufgetragen. Aus der räumlichen Zustandskurve R_0R des Getriebes wurde wie in Fig. 4 die Geschwindigkeitskurve $\frac{v^2}{2}$ konstruiert.

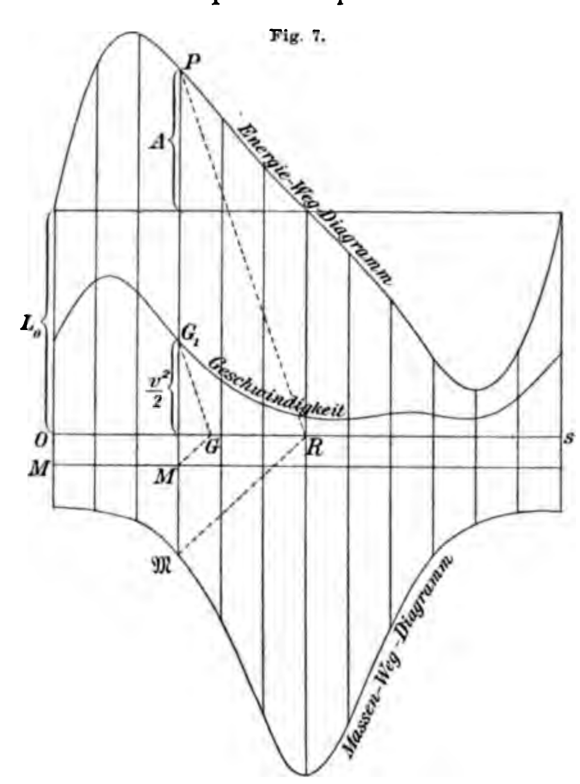


Fig. 7.

In Fig. 7 ist die Umklappung der beiden Diagramme in die Bildebene dargestellt. Um hier aus den beiden Ls- und $\mathfrak{M}s$-Diagrammen die Geschwindigkeitslinie $\frac{v^2}{2}$ zu finden, genügt es, den Punkt R irgendwo, z. B. auf der s-Achse anzunehmen, ihn mit $\mathfrak{M}$ und P zu verbinden und den Linienzug MGG_1 hierzu parallel zu ziehen; dann ist G_1 ein Punkt des gewünschten Geschwindigkeitsdiagrammes.

12) Die Ermittlung der reduzierten Masse eines Getriebes gibt manchmal auch die Mittel in die Hand, über die Massenverteilung im Getriebe derart zu verfügen, daß die Masse ihren Einfluß auf die Bewegung nicht verändert.

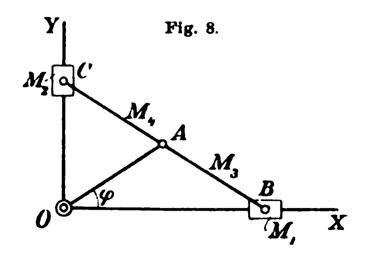


Fig. 8.

Fig. 8 zeigt z. B. die gekoppelte gleichschenklige Schubkurbel. Um O rotiert die Kurbel OA, während die Endpunkte der Stange BAC, die in ihrer Mitte A drehbar mit der Kurbel verbunden ist, auf einem rechtwinkligen Achsenkreuze schleifen. Es ist

$$OA = AB = AC.$$

Wählt man die Kurbelwarze A als Reduktionspunkt und nennt M_1 die in der X-Richtung geführte Masse des Schiebers, so liefert die nach Gleichung (6) vorgenommene Reduktion der Masse

$$\mathfrak{M}_1 = 4 M_1 \sin^2 \varphi$$

Ebenso gibt die Reduktion der Masse M_2 des anderen Schiebers nach A

$$\mathfrak{M}_2 = 4 M_2 \cos^2 \varphi.$$

Nennt man ferner M_3 die gleichförmig verteilte Masse der Stange AB und reduziert sie nach A, so gibt Gleichung (6)

$$\mathfrak{M}_3 = M_3 \left(\tfrac{1}{3} + 2 \sin^2 \varphi\right)$$

und ebenso die Masse M_4 des Stabes AC

$$\mathfrak{M}_4 = M_4 \left(\tfrac{1}{3} + 2 \cos^2 \varphi\right).$$

Die gesamte veränderliche Masse des Getriebes ist demnach

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4 \\ &= \tfrac{1}{3}(M_3 + M_4) + \sin^2 \varphi\,(4 M_1 + 2 M_3) + \cos^2 \varphi\,(4 M_2 + 2 M_4). \end{aligned}$$

Die Bedingung für unveränderlichen Einfluß der Masse auf die Bewegung wird also

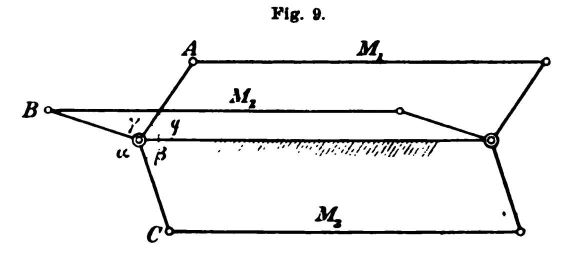
$$2 M_1 + M_3 = 2 M_2 + M_4,$$

und in diesem Falle wird die reduzierte Masse

$$\mathfrak{M} = 2(M_1 + M_2) + \tfrac{4}{3}(M_3 + M_4).$$

13) Bei dem in Fig. 9 dargestellten dreifach gekoppelten Parallelkurbelgetriebe haben die sechs Kurbeln unveränderlichen Einfluß auf die Bewegung. Reduzieren wir jedoch die Massen $M_1\, M_2\, M_3$ der drei horizontal hin- und hergehenden Koppelstangen nach A, so wird mit Benutzung von Gleichung (6) die reduzierte Masse eine periodische Funktion

Fig. 9.



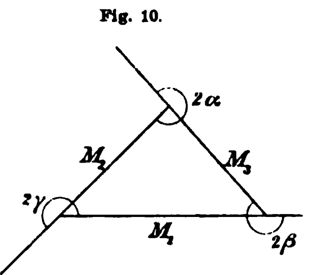
$$\mathfrak{M} = M_1 \sin^2 \varphi + M_2 \sin^2 (\varphi + \gamma) + M_3 \sin^2 (\varphi + \gamma + \alpha),$$

wenn φ den veränderlichen Kurbelwinkel von OA, $\alpha\beta\gamma$ die konstanten Winkel zwischen den drei Kurbeln bezeichnen.

Obigem Ausdruck kann die Form gegeben werden

$$\mathfrak{M} = M_2 \sin^2\gamma + M_3 \sin^2\beta$$
$$+ \sin^2\varphi\,(M_1 + M_2 \cos 2\gamma + M_3 \cos 2\beta)$$
$$+ \sin\varphi \cos\varphi\,(M_2 \sin 2\gamma - M_3 \sin 2\beta).$$

Soll nun z. B. der Einfluß der drei Stangenmassen auf die Bewegung des Getriebes unveränderlich bleiben, so muß $\mathfrak{M}$ konstant, also von φ unabhängig sein. Dies erfordert die Bedingungen



$$M_2 \cos 2\gamma + M_3 \cos 2\beta = -M_1$$
$$M_2 \sin 2\gamma - M_3 \sin 2\beta = 0$$

oder

$$M_2 \cos(2\gamma - 180^0) + M_3 \cos(2\beta - 180^0) = M_1$$
$$M_2 \sin(2\gamma - 180^0) - M_3 \sin(2\beta - 180^0) = 0,$$

woraus sich folgende Regel für die Wahl der Kurbelwinkel $\alpha\beta\gamma$ ergibt (Fig. 10):

Stellt man die gegebenen Stangenmassen $M_1 M_2 M_3$ durch Strecken dar und bildet aus ihnen ein Dreieck, so sind die doppelten Kurbelwinkel 2α, 2β, 2γ die um 180^0 vermehrten Dreieckswinkel.

Die konstante reduzierte Masse der drei Koppelstangen wird dann

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2 + M_3).$$

Spannungen und Formänderungen einer rotierenden Hohl- und Vollkugel.

Von Ingenieur Alfons Vincenz Leon,
Assistent an der k. k. Techn. Hochschule in Wien.

I. Schon bei verhältnismäßig einfachen Aufgaben der Elastizitätstheorie kennt man die exakten Lösungen noch nicht, und man muß, um zur Kenntnis der Größe der elastischen Kräfte und Formänderungen zu gelangen, Näherungsverfahren benützen. Zu diesen Aufgaben gehört auch die Bestimmung des Spannungs- und Deformationszustandes einer um eine fixe Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden festen, elastischen und isotropen Hohl- und Vollkugel. Dennoch lassen sich die streng gültigen Lösungen dieser Aufgabe angeben.

Bei der Bestimmung des Gleichgewichts einer Kugelschale, in

welcher die Temperatur in besonderer Weise von zwei Variablen abhängt, hat J. Stefan einen eigenartigen Weg eingeschlagen. (Siehe Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Math. Naturw. Kl. 1881, März, S. 565.) Derselbe führt auch bei dem vorliegenden Problem zum Ziele, wenn man ihn der Aufgabe anpaßt.

Bedeuten K und Θ die Kirchhoffschen Elastizitätskonstanten, r, φ, ψ die Polarkoordinaten eines Punktes der Hohlkugel (die Äquatorebene als Basisebene angenommen), Δr die Verschiebung dieses Punktes in radialer Richtung, σ_r die in dieser Richtung herrschende Normalspannung, Δt die Verschiebung normal zum Radius in der Meridianebene, σ_t die tangentiale (meridionale) Normalspannung, Δp die Verschiebung im Parallelkreis, σ_p die entsprechende Spannung, so sind die Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen gegeben durch die Gleichungen (Siehe G. Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité):

$$\sigma_r = -2K\left[\frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} + \Theta v\right] \tag{1}$$

$$\sigma_t = -2K\left[\frac{\Delta r}{r} + \frac{\partial(\Delta t)}{r\partial\varphi} + \Theta v\right] \tag{2}$$

$$\sigma_p = -2K\left[\frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta t \sin\varphi}{r\cos\varphi} + \Theta v\right], \tag{3}$$

wobei v die kubische Dilatation ist, und dargestellt wird durch den Ausdruck

$$v = \frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} + \frac{2\Delta r}{r} + \frac{\partial(\Delta t)}{r\partial\varphi} - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\frac{\Delta t}{r}, \tag{4}$$

weil Δp naturgemäß Null ist.

Die Schubspannungen in den Meridianebenen verschwinden ebenfalls; die noch übrig bleibende Schubspannung gehorcht der Gleichung

$$\tau = -K\left[\frac{\partial(\Delta r)}{r\partial\varphi} + \frac{\partial(\Delta t)}{\partial r} - \frac{\Delta t}{r}\right]. \tag{5}$$

Dabei sind die Druckkräfte positiv, die Zugkräfte negativ bezeichnet.

Bedeutet γ das spezifische Gewicht des Materials, aus dem der Körper besteht, g die Beschleunigung der Schwere und w die Winkelgeschwindigkeit, so hat die Fliehkraft pro Masseneinheit in radialer Richtung den Wert

$$f_r = \frac{\gamma w^2}{g} r\cos^2\varphi = \frac{\gamma w^2}{g} r(1 - \sin^2\varphi), \tag{6}$$

die Fliehkraft in der Richtung des Meridians ist gegeben durch

$$f_t = -\frac{\gamma w^2}{g} r\cos\varphi\sin\varphi. \tag{7}$$

Der Untersuchung liegt ein Volumelement von der Gestalt eines Kuppelgewölbesteins zugrunde. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial(\tau \cos\varphi)}{r\cos\varphi\,\partial\varphi} + \frac{2\sigma_r - \sigma_t - \sigma_p}{r} - f_r = 0,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial(\sigma_t \cos\varphi)}{r\,\partial\varphi} + \frac{3\tau\cos\varphi + \sigma_p \sin\varphi}{r\cos\varphi} + f_t = 0.$$

Daher erhält man, wenn man in den vorstehenden Gleichungen die Kräfte mit Hilfe der Gleichungen (1), (2), (3), (5), (6), (7) eliminiert:

$$(8)\quad 2K(1+\Theta)\,r^2\cos\varphi\frac{\partial v}{\partial r} + K\frac{\partial\beta}{\partial\varphi} + \left(\frac{\gamma w^2}{g}r - \frac{\gamma w^2}{g}r\sin^2\varphi\right)r^2\cos\varphi = 0$$

$$(9)\quad 2K(1+\Theta)\cos\varphi\frac{\partial v}{\partial\varphi} - K\frac{\partial\beta}{\partial r} - \frac{\gamma w^2}{g}r^2\sin\varphi\cos^2\varphi = 0,$$

wobei

$$(10)\quad \beta = \cos\varphi\left[\frac{\partial(\Delta r)}{\partial\varphi} - r\frac{\partial(\Delta t)}{\partial r} - \Delta t\right].$$

Drückt man nun v durch eine neue Größe η aus, und zwar derart, daß

$$(11)\quad v = \frac{1}{2K(1+\Theta)}\left[\eta - \frac{\gamma w^2}{2g}r^2 + \frac{\gamma w^2}{2g}r^2\sin^2\varphi\right],$$

so gehen die Gleichungen (8) und (9) in die folgenden über:

$$(12)\quad r^2\cos\varphi\frac{\partial\eta}{\partial r} + K\frac{\partial\beta}{\partial\varphi} = 0$$

$$(13)\quad \cos\varphi\frac{\partial\eta}{\partial\varphi} - K\frac{\partial\beta}{\partial r} = 0,$$

welchen man durch die Funktionen

$$(14)\quad \eta = L + M\sin^2\varphi$$

$$(15)\quad \beta = N\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi$$

genügen kann. L, M, N sind Funktionen von r und den Bedingungen unterworfen

$$(16)\quad \begin{cases} r^2\dfrac{dL}{dr} + KN = 0 \\ r^2\dfrac{dM}{dr} - 3KN = 0 \\ 2M - K\dfrac{dN}{dr} = 0. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (16) ergibt sich

$$(17)\quad M = Ar^2 + \frac{B}{r^3}$$

$$(18)\quad KN = \tfrac{2}{3}Ar^3 - \frac{B}{r^2}$$

$$(19)\quad L = C - \tfrac{1}{3}Ar^2 - \frac{B}{3r^3}.$$

A, B, C sind konstante Größen.

Aus (17) und (19) folgt ferner

$$3L + M = 3C. \tag{20}$$

Die Verschiebungen seien ausgedrückt durch die Formeln

$$\Delta r = G + H \sin^2 \varphi \tag{21}$$

$$\Delta t = J \sin \varphi \cos \varphi \tag{22}$$

G, H, J sind Funktionen von r. Aus (4) und (10) ergibt sich

$$\beta = \cos^2 \varphi \sin \varphi \left[2H - r\frac{dJ}{dr} - J\right] \tag{23}$$

$$\nu = \frac{dG}{dr} + \frac{2G}{r} + \frac{J}{r} + \left[\frac{dH}{dr} + \frac{2H}{r} - \frac{3J}{r}\right] \sin^2 \varphi. \tag{24}$$

β ist aber schon durch die Gleichung (15) ausgedrückt. Ebenso ist ν gegeben, wenn man in der Gleichung (11) für η den Wert aus (15) einsetzt. Man erhält also zur Bestimmung der Funktionen G, H, J die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{2K(1+\Theta)}\left[rL - \frac{\gamma w^2}{2g} r^3\right] &= r\frac{dG}{dr} + 2G + J \\ \frac{1}{2K(1+\Theta)}\left[rM + \frac{\gamma w^2}{2g} r^3\right] &= r\frac{dH}{dr} + 2H - 3J \\ N &= 2H - r\frac{dJ}{dr} - J. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Aus den vorstehenden Ausdrücken lassen sich die folgenden entwickeln:

$$H - J = \frac{E}{r^4} + \frac{1}{r^4}\int\left[\frac{1}{2K(1+\Theta)}\left(M + \frac{\gamma w^2}{2g} r^2\right) + \frac{N}{r}\right] r^4\, dr$$

$$2H + 3J = F \cdot r + r \cdot \int\left[\frac{1}{K(1+\Theta)}\left(M + \frac{\gamma w^2}{2g} r^2\right) - \frac{3N}{r}\right]\frac{dr}{r}$$

$$3G + H = \frac{Cr}{2K(1+\Theta)} + \frac{D}{r^2} - \frac{1}{r^2}\int \frac{\gamma w^2 r^4}{2K(1+\Theta)g}\, dr.$$

D, E, F, sind konstante Größen.

Setzt man für M und N die Werte ein, so bekommt man:

$$H - J = \frac{E}{r^4} + \frac{7 + 4\Theta}{42K(1+\Theta)} A r^3 + \frac{\gamma w^2 r^3}{28K(1+\Theta)g} r^3 - \frac{(1+2\Theta)B}{4K(1+\Theta)r^2} \tag{26}$$

$$2H + 3J = F \cdot r - \frac{1+2\Theta}{2K(1+\Theta)} A r^3 + \frac{\gamma w^2 r^3}{4K(1+\Theta)g} - \frac{(4+3\Theta)B}{3K(1+\Theta)r^2} \tag{27}$$

$$3G + H = \frac{Cr}{2K(1+\Theta)} + \frac{D}{r^2} - \frac{\gamma w^2 r^3}{10K(1+\Theta)g}. \tag{28}$$

Die weitere Aufgabe besteht nun darin, aus den Oberflächenbedingungen die sechs Konstanten A, B, C, D, E, F zu bestimmen. Gelingt dies, so bekommt man für die Formänderungen und Spannungen die richtigen, weil einzigen Lösungen, da das Problem eindeutig ist.

Wir nennen den Radius der inneren Begrenzungsfläche der Hohlkugel r_i, denjenigen der äußeren r_a. Wirken keine äußeren Kräfte auf den Körper ein, so muß $\sigma_r = \tau = 0$ werden, wenn r den Wert r_i oder r_a annimmt.

Demnach lauten die Oberflächenbedingungen:

$$\text{(I)} \qquad \left| \frac{dG}{dr} + \frac{\Theta}{2K(1+\Theta)} L - \frac{\Theta \gamma w^2}{4K(1+\Theta)g} r^2 = 0 \right|_{r=r_i}^{r=r_a}$$

$$\text{(II)} \qquad \left| \frac{dH}{dr} + \frac{\Theta}{2K(1+\Theta)} M + \frac{\Theta \gamma w^2}{4K(1+\Theta)g} r^2 = 0 \right|_{r=r_i}^{r=r_a}$$

$$\text{(III)} \qquad \left| 2H + r\frac{dJ}{dr} - J = 0 \right|_{r=r_i}^{r=r_a}.$$

Ersetzt man in den vorstehenden drei Doppelgleichungen G, H, J durch die aus (26), (27), (28) zu folgernden Werte, L, M durch die Werte aus (17), (19), so erhält man sechs Gleichungen, welche die Konstanten A, B, C, D, E, F linear enthalten, sodaß deren Bestimmung keine prinzipiellen Schwierigkeiten macht.

Diese Aufgabe kann jedoch erleichtert werden, wenn man aus den Gleichungen (I), (II), (III) gewisse neue Beziehungen ableitet: Multipliziert man die Gleichung (I) mit drei und addiert sie sodann zu (II), so folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (20) und (28):

$$\text{(I')} \qquad \left| \frac{1+3\Theta}{2K(1+\Theta)} C - \frac{2D}{r^3} - \frac{(3+5\Theta)\gamma w^2}{10K(1+\Theta)g} r^2 = 0 \right|_{r=r_i}^{r=r_a}.$$

Diese Doppelgleichung enthält bloß C und D.

Führt man ferner in die Gleichungen (II) und (III) für $\frac{dH}{dr}$ und $r\frac{dJ}{dr}$ die Werte aus (25) und für M, bezw. N die Werte aus (17) und (18) ein, so bekommt man:

$$\left| 2H - 3J = \frac{1}{2K}\left[Ar^3 + \frac{B}{r^2} + \frac{\gamma w^2}{2g} r^3\right] \right|_{r=r_i}^{r=r_a}$$

$$\left| 2H - J = \frac{1}{2K}\left[\frac{2}{3}Ar^3 - \frac{B}{r^2}\right] \right|_{r=r_i}^{r=r_a},$$

woraus

$$\left| J = -\frac{1}{4K}\left[\frac{Ar^3}{3} + \frac{2B}{r^2} + \frac{\gamma w^2}{2g} r^3\right] \right|_{r=r_i}^{r=r_a}$$

$$\left| H = \frac{1}{8K}\left[Ar^3 - \frac{4B}{r^2} - \frac{\gamma w^2}{2g} r^3\right] \right|_{r=r_i}^{r=r_a}$$

Bildet man nun die Wertverbindungen $H - J$ und $2H + 3J$, so wird

$$\left| H - J = \frac{1}{8K}\left[\frac{4}{3}Ar^3 + \frac{\gamma w^2}{2g} r^3\right] \right|_{r=r_i}^{r=r_a}$$

$$\left| 2H + 3J = -\frac{1}{2K}\left[\frac{5B}{r^2} + \frac{\gamma w^2}{2g} r^3\right] \right|_{r=r_i}^{r=r_a}$$

Mit Berücksichtigung von (26) und (27) erhält man endlich

$$\text{(II')}\quad \left| \frac{E}{r^4} - \frac{\Theta}{14K(1+\Theta)}Ar^3 - \frac{(3+7\Theta)\gamma w^2}{112K(1+\Theta)g}r^3 - \frac{(1+2\Theta)B}{4K(1+\Theta)r^2} = 0 \right|_{r=r_a}^{r=r_i}$$

$$\text{(III')}\quad \left| F\cdot r - \frac{1+2\Theta}{2K(1+\Theta)}Ar^3 + \frac{(3+2\Theta)\gamma w^2}{4K(1+\Theta)g}r^3 + \frac{(7+9\Theta)B}{6K(1+\Theta)r^2} = 0 \right|_{r=r_a}^{r=r_i}$$

Aus der Doppelgleichung (II') läßt sich E, aus (III') F eliminieren, sodaß zwei in A und B lineare Gleichungen übrig bleiben. Hat man aber die Werte für A und B, so geben (II') und (III') die Konstanten E und F. C und D sind durch (I') für sich bestimmt.

II. Größere Wichtigkeit kommt zweien Sonderfällen zu, bei denen sich die Entwicklung vereinfacht: dem Falle einer sehr dünnen Kugelschale und dem Falle einer Vollkugel. Wir wollen zunächst auf den letzteren genauer eingehen. Der Radius der Kugeloberfläche sei mit R, welches an Stelle von r_a tritt, bezeichnet. r_i nimmt den Wert Null an.

Es ist ohne weiteres klar, daß

$$\text{(29)}\qquad D=0,\quad E=0,\quad B=0$$

wird.

Für die Bestimmung der noch fehlenden Konstanten bringen die Gleichungen (I'), (II'), (III') keinen wesentlichen Vorteil, sodaß wir von deren Benützung absehen. Die Ausdrücke in (26), (27), (28) gehen in die folgenden über:

$$\text{(30)}\qquad H-J=\frac{1}{14K(1+\Theta)}\left[\frac{7+4\Theta}{3}A+\frac{\gamma w^2}{2g}\right]r^3$$

$$\text{(31)}\qquad 2H+3J=F\cdot r-\frac{1}{2K(1+\Theta)}\left[(1+2\Theta)A-\frac{\gamma w^2}{2g}\right]r^3$$

$$\text{(32)}\qquad 3G+H=\frac{1}{2K(1+\Theta)}\left[C-\frac{\gamma w^2}{5g}r^2\right]r.$$

Löst man diese Gleichungen nach G, H, J auf, so bekommt man:

$$\text{(33)}\qquad G=\frac{1}{3}\left[-\frac{F}{5}+\frac{C}{2K(1+\Theta)}\right]r+\frac{1}{21K(1+\Theta)}\left[\Theta A-\frac{6\gamma w^2}{5g}\right]r^3$$

$$\text{(34)}\qquad H=\frac{F}{5}r-\frac{1}{14K(1+\Theta)}\left[2\Theta A-\frac{\gamma w^2}{g}\right]r^3$$

$$\text{(35)}\qquad J=\frac{F}{5}r-\frac{1}{14K(1+\Theta)}\left[\frac{7+10\Theta}{3}A-\frac{\gamma w^2}{2g}\right]r^3.$$

Es lassen sich daher aus den Gleichungen (I), (II), (III) mit Hilfe von (17), (18), (19) für die Konstanten folgende Bedingungsgleichungen angeben:

$$\text{(36)}\qquad \begin{cases} -\dfrac{F}{15}+\dfrac{1+3\Theta}{6K(1+\Theta)}C-\dfrac{\Theta R^2}{42K(1+\Theta)}A-\dfrac{(24+35\Theta)\gamma w^2R^2}{140K(1+\Theta)g}=0 \\ \dfrac{F}{5}+\dfrac{\Theta R^2}{14K(1+\Theta)}A+\dfrac{(6+7\Theta)\gamma w^2R^2}{28K(1+\Theta)g}=0 \\ \dfrac{2F}{5}-\dfrac{(7+16\Theta)R^2}{21K(1+\Theta)}A+\dfrac{3\gamma w^2R^2}{14K(1+\Theta)g}=0. \end{cases}$$

Man erhält also

(37)
$$A = -\frac{3(3+7\Theta)\gamma w^2}{2(7+19\Theta)g}$$

(38)
$$F = -\frac{5(3+8\Theta)\gamma w^2 R^2}{2(7+19\Theta)Kg}$$

(39)
$$C = \frac{(3+5\Theta)\gamma w^2 R^2}{5(1+3\Theta)g}.$$

Die Gleichungen (33), (34), (35) schreiben sich daher in folgender Weise:

(40)
$$G = \frac{\gamma w^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)Kg}\left[\frac{2(3+16\Theta+25\Theta^2+10\Theta^3)R^2}{1+3\Theta} - \frac{4+13\Theta+5\Theta^2}{2}r^2\right]r$$

(41)
$$H = \frac{\gamma w^2}{2(7+19\Theta)Kg}\left[-(3+8\Theta)R^2 + (1+3\Theta)r^2\right]r$$

(42)
$$J = \frac{\gamma w^2}{2(7+19\Theta)Kg}\left[-(3+8\Theta)R^2 + (2+5\Theta)r^2\right]r.$$

Somit lauten die streng gültigen Formeln für die Verschiebungen eines Punktes einer rotierenden Kugel:

(43)
$$\Delta r = \frac{\gamma w^2}{(7+19\Theta)Kg}\left\{\frac{1}{5(1+\Theta)}\left[\frac{2(3+16\Theta+25\Theta^2+10\Theta^3)R^2}{1+3\Theta} - \frac{4+13\Theta+5\Theta^2}{2}r^2\right]\right.$$
$$\left. + \left[-\frac{(3+8\Theta)R^2}{2} + \frac{1+3\Theta}{2}r^2\right]\sin^2\varphi\right\}r$$

(44)
$$\Delta t = \frac{\gamma w^2}{2(7+19\Theta)Kg}\left[-(3+8\Theta)R^2 + (2+5\Theta)r^2\right]r\sin\varphi\cos\varphi.$$

Durch partielle Differentiation ergeben sich daher die folgenden, für die Aufstellung der Spannungsformeln wichtigen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} = \frac{\gamma w^2}{(7+19\Theta)Kg}\left\{\frac{1}{5(1+\Theta)}\left[\frac{2(3+16\Theta+25\Theta^2+10\Theta^3)R^2}{1+3\Theta} - \frac{3(4+13\Theta+5\Theta^2)}{2}r^2\right]\right.$$
$$\left. + \left[-(3+8\Theta)R^2 + 3(1+3\Theta)r^2\right]\frac{\sin^2\varphi}{2}\right\}$$

$$\frac{\partial(\Delta r)}{\partial\varphi} = \frac{\gamma w^2}{(7+19\Theta)Kg}\left[-(3+8\Theta)R^2 + (1+3\Theta)r^2\right]r\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{\partial(\Delta t)}{\partial r} = \frac{\gamma w^2}{2(7+19\Theta)Kg}\left[-(3+8\Theta)R^2 + 3(2+5\Theta)r^2\right]\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{\partial(\Delta t)}{\partial\varphi} = \frac{\gamma w^2}{2(7+19\Theta)Kg}\left[-(3+8\Theta)R^2 + (2+5\Theta)r^2\right](1-2\sin^2\varphi)r.$$

Da wir die Werte der Konstanten kennen, lassen sich die Hilfsfunktionen L, M, N, somit auch η, β und ν angeben:

$$M = -\frac{3(3+7\Theta)\gamma w^2}{2(7+19\Theta)g}r^2$$

$$N = -\frac{(3+7\Theta)\gamma w^2}{(7+19\Theta)Kg}r^3$$

$$L = \frac{\gamma w^2}{g}\left[\frac{(3+5\Theta)R^2}{5(1+3\Theta)} + \frac{3+7\Theta}{2(7+19\Theta)}r^2\right]$$

$$\eta = \frac{\gamma w^2}{g}\left[\frac{(3+5\Theta)R^2}{5(1+3\Theta)} + \frac{3+7\Theta}{2(7+19\Theta)}(1-3\sin^2\varphi)r^2\right]$$

$$\beta = -\frac{(3+7\Theta)\gamma w^2}{(7+19\Theta)Kg} r^3 \cos^2\varphi \sin\varphi$$

$$(45)\quad \nu = \frac{\gamma w^2}{2(1+\Theta)Kg}\left\{\frac{(3+5\Theta)R^2}{5(1+3\Theta)} - \frac{1}{7+19\Theta}\left[2(1+3\Theta)+(1+\Theta)\sin^2\varphi\right]r^2\right\}.$$

Schließlich können nach diesen Vorbereitungen die Formeln für die Spannungen in einfacher Weise entwickelt werden:

$$(46)\quad \sigma_r = -\frac{\gamma w^2}{(7+19\Theta)g}\left[\frac{12+49\Theta+45\Theta^2}{5(1+\Theta)} - (3+8\Theta)\sin^2\varphi\right](R^2-r^2)$$

$$(47)\quad \sigma_t = -\frac{\gamma w^2}{(7+19\Theta)g}\left[\frac{-8-6\Theta+5\Theta^2}{5(1+\Theta)}(R^2-2r^2) + (3+8\Theta)(R^2-r^2)\sin^2\varphi\right]$$

$$(48)\quad \sigma_p = -\frac{\gamma w^2}{(7+19\Theta)g}\left\{\frac{1}{5(1+\Theta)}\left[(12+49\Theta+45\Theta^2)R^2-(4+23\Theta+35\Theta^2)r^2\right] - (1+3\Theta)r^2\sin^2\varphi\right\}$$

$$(49)\quad \tau = \frac{(8+8\Theta)\gamma w^2}{(7+19\Theta)g}(R-r^2)\sin\varphi\cos\varphi.$$

III. Man sieht aus vorstehenden Formeln, daß die elastischen Kräfte und Formänderungen proportional sind dem Faktor $\frac{\gamma w^2}{g}$; erstere sind unabhängig vom Schubmodul K.

Die radiale Spannung σ_r verschwindet einerseits, wenn $r = R$ ist, also an der Oberfläche, andererseits aber auch, wenn

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{12+49\Theta+45\Theta^2}{5(1+\Theta)(3+8\Theta)}},$$

und zwar für jedes r. Θ liegt zwischen $\frac{1}{2}$ und 1. Für diese Werte ist der Nenner des unter dem Wurzelzeichen stehenden Bruches größer als der Zähler. Es gibt daher im allgemeinen einen Kegel mit dem kleinen Öffnungswinkel $90 - \varphi$, dessen Spitze der Kugelmittelpunkt und dessen Achse die Drehungsachse ist, längs dessen Mantel keine Normalspannungen in der Richtung der Erzeugenden vorhanden sind.

Für die Drehungsachse erhält man durch Einsetzen von $\varphi = 90^0$ folgende Formeln:

$$(50)\quad \begin{cases} \Delta r = \frac{\gamma w^2}{20(1+\Theta)(1+3\Theta)(7+19\Theta)Kg}[-(3+36\Theta+105\Theta^2+80\Theta^3)R^2 \\ \qquad + (1+7\Theta+10\Theta^2)(1+3\Theta)r^2]r \\ \Delta t = 0 \\ \nu = \frac{\gamma w^2}{2(1+\Theta)Kg}\left[\frac{(8+5\Theta)R^2}{5(1+3\Theta)} - \frac{3+7\Theta}{7+19\Theta}r^2\right] \\ \sigma_r = \frac{(8+6\Theta-5\Theta^2)\gamma w^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g}(R^2-r^2) \\ \sigma_t = \sigma_p = -\frac{\gamma w^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g}[(12+49\Theta+45\Theta^2)R^2 \\ \qquad - (9+43\Theta+50\Theta^2)r^2] \\ \tau = 0. \end{cases}$$

Die durch vorstehende Formeln ausgedrückten Normalspannungen sind zugleich Hauptspannungen, da Schubkräfte fehlen; sie werden durch Parabeln dargestellt.

Die radiale Kontraktion Δr ist stets negativ; sie verschwindet im Kugelmittelpunkte und erreicht an der Oberfläche den numerisch größten Wert gleich $-\frac{(1+12\Theta+25\Theta^2)\gamma w^2 R^3}{10(1+3\Theta)(7+19\Theta)Kg}$. Die kubische Dilatation im Kugelmittelpunkte ist $\frac{(3+5\Theta)\gamma w^2 R^2}{10(1+\Theta)(1+3\Theta)Kg}$, an den Polen hingegen $\frac{(3+6\Theta-5\Theta^2)\gamma w^2 R^2}{5(1+\Theta)(1+3\Theta)(7+19\Theta)Kg}$.

Die Normalspannung längs der Achse ist stets positiv, d. h. ein Druck; an der Oberfläche Null, wächst sie gegen den Kugelmittelpunkt bis zur Größe $\frac{(3+6\Theta-5\Theta^2)\gamma w^2 R^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g}$ an. Die Spannungen in einer Parallelkreisebene sind negativ, also Zugkräfte; für den Kugelmittelpunkt sind sie $-\frac{(12+49\Theta+45\Theta^2)\gamma w^2 R^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g}$; gegen die Pole nehmen sie bis $-\frac{(3+6\Theta-5\Theta^2)\gamma w^2 R^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g}$ ab. Die Polspannungen sind also dem numerischen Werte nach gerade so groß, wie die Spannung im Kugelmittelpunkt längs der Drehungsachse.

In der Äquatorebene gelten folgende, durch Einsetzen von $\varphi = 0$ erhaltene Beziehungen:

$$(51)\quad \begin{cases} \Delta r = \frac{\gamma w^2}{20(1+\Theta)(1+3\Theta)(7+19\Theta)Kg}[4(3+16\Theta+25\Theta^2+10\Theta^3)R^2 \\ \qquad - (4+13\Theta+5\Theta^2)(1+3\Theta)r^2]r \\ \Delta t = 0 \\ v = \frac{\gamma w^2}{2(1+\Theta)Kg}\left[\frac{(3+5\Theta)R^2}{5(1+3\Theta)} - \frac{2(1+3\Theta)}{7+19\Theta}r^2\right] \\ \sigma_r = -\frac{(12+49\Theta+45\Theta^2)\gamma w^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g}(R^2-r^2) \\ \sigma_t = \frac{(3+6\Theta-5\Theta^2)\gamma' w^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g}(R^2-2r^2) \\ \sigma_p = -\frac{\gamma w^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g}[(12+49\Theta+45\Theta^2)R^2 \\ \qquad - (4+23\Theta+35\Theta^2)r^2] \\ \tau = 0. \end{cases}$$

σ_r, σ_t, σ_p sind Hauptspannungen. Die zur Äquatorebene normale Spannung verschwindet für $r = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot R$; gegen das Innere der Kugel ist es eine Druckkraft, gegen die Oberfläche ein Zug; die Druckspannung im Mittelpunkte ist gerade so groß, wie die Zugspannung an der Oberfläche.

Für $r = 0$ erhalten wir die uns schon bekannten, für den Kugelmittelpunkt gültigen Formeln; nur die Bezeichnung ist eine etwas

andere: es wird $\sigma_r = \sigma_p$ und nicht wie früher $\sigma_t = \sigma_p$, denn jetzt spielt die radiale Spannung die Rolle derjenigen, die wir früher als tangentiale bezeichneten.

Für den Äquator ist $r = R$ zu setzen. Man bekommt:

$$(52)\quad \begin{cases} \Delta r = \dfrac{(8+31\Theta+25\Theta^2)\gamma w^2 R^3}{20(1+3\Theta)(7+19\Theta)Kg} \\ \Delta t = 0 \\ v = \dfrac{(11+32\Theta+5\Theta^2)\gamma w^2 R^3}{10(1+\Theta)(1+3\Theta)(7+19\Theta)Kg} \\ \sigma_r = 0 \\ \sigma_t = -\dfrac{(3+6\Theta-5\Theta^2)\gamma w^2 R^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g} \\ \sigma_p = -\dfrac{2(4+13\Theta+5\Theta^2)\gamma w^2 R^2}{5(1+\Theta))(7+19\Theta)g}. \end{cases}$$

Die Überhöhung des Äquators gegenüber der ursprünglichen Begrenzungsfläche des Körpers ist größer als die Abplattung der Pole. Der Unterschied zwischen einem Durchmesser des Äquatorkreises und der Drehungsachse beträgt während der Drehung $\frac{(2+5\Theta)\gamma w^2 R^3}{2(7+19\Theta)Kg}$. Die an Kugeln von verschiedenen Dimensionen und gleichen Stoffen durch Drehungen von gleicher Winkelgeschwindigkeit erzeugten Abplattungen verhalten sich wie die dritten Potenzen der Radien.

Die Spannungen im Äquator und in der darauf senkrechten Richtung sind negativ; die ersteren übertreffen weitaus die letzteren.

Schließlich sollen noch die für die Kugeloberfläche gültigen Formeln entwickelt werden. Durch Einsetzen von $r = R$ in die allgemeinen Beziehungen erhält man:

$$(53)\quad \begin{cases} \Delta r = \dfrac{\gamma w^2}{20(1+3\Theta)(7+19\Theta)Kg}[(8+31\Theta+25\Theta^2) \\ \qquad -5(1+3\Theta)(2+5\Theta)\sin^2\varphi]R^3 \\ \Delta t = -\dfrac{(1+3\Theta)\gamma w^2 R}{4(7+19\Theta)Kg}\sin 2\varphi \\ v = \dfrac{\gamma w^2 R^3}{10(1+\Theta)(1+3\Theta)(7+19\Theta)Kg}[(11+32\Theta+5\Theta^2) \\ \qquad -5(1+\Theta)(1+3\Theta)\sin^2\varphi] \\ \sigma_r = 0 \\ \sigma_t = -\dfrac{(3+6\Theta-5\Theta^2)\gamma w^2 R^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g} \\ \sigma_p = -\dfrac{\gamma w^2 R^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta g}[2(4+13\Theta+5\Theta^2) \\ \qquad -5(1+\Theta)(1+3\Theta)\sin^2\varphi] \\ \tau = 0. \end{cases}$$

Somit gelten an der Oberfläche folgende Regeln:

Die radiale Dilatation ist Null, wenn $\sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{8+13\Theta+25\Theta^2}{5(1+3\Theta)(2+5\Theta)}}$ ist; in höheren Breiten ist sie negativ, in geringeren positiv. Dieser Winkel bestimmt die Lage der Durchschnittlinien der Oberflächen des Körpers vor und nach der Drehung. Die Verschiebung gegen die Pole ist für komplementäre Winkel gleich und proportional dem Faktor $\frac{\gamma w^2 R}{Kg}$. Sie erreicht daher bei $\varphi = 45$ den größten Wert gleich $-\frac{(1+3\Theta)\gamma w^2 R}{4(7+19\Theta)Kg}$.

Die kubische Dilatation nimmt mit wachsender Breite ab.

Die Richtungen der Hauptspannungen sind die Tangenten an Meridian und Parallelkreis.

Die Normalspannung im Meridian ist an der ganzen Oberfläche konstant und zwar ein Zug; die Spannung in der Richtung des Parallelkreises hingegen ist abhängig von der geographischen Breite und wechselt bei $\sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{2(4+13\Theta+5\Theta^2)}{5(1+\Theta)(1+3\Theta)}}$ das Zeichen. In geringeren Breiten besteht eine Zugspannung, in höheren eine Druckspannung.

IV. Liegt eine Hohlkugel vor, deren Dicke gegen Null abnimmt, so nähern sich, wie man aus den Doppelgleichungen (I′), (II′), (III′) entnehmen kann, die Konstanten D, E, B der Null; somit erhalten die übrigen Konstanten die für die Vollkugel ermittelten Werte, wobei R nun den Radius der dünnen Kugelschale bezeichnet. Daraus folgt der Satz: *eine dünne kugelförmige elastische Schale gelangt in denselben Spannungs- und Deformationszustand, wie die Oberfläche einer Kugel vom gleichen Material und Radius, wenn beide Körper mit derselben Winkelgeschwindigkeit rotieren.*

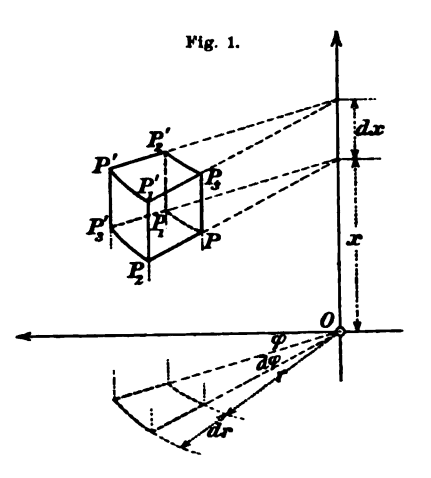
Spannungen und Formänderungen eines Hohlzylinders und einer Hohlkugel, die von innen erwärmt werden, unter der Annahme eines linearen Temperaturverteilungsgesetzes.

Von Ingenieur ALFONS VINCENZ LEON,
Assistent an der Techn. Hochschule in Wien.

I. Will man die Größe der Spannungen abschätzen, welche in Rohrleitungen für heiße Gase und Flüssigkeiten, in Geschütz- und Gewehrläufen, in Schornsteinen und modernen Hochöfen deshalb auftreten, weil die Temperatur in den einzelnen Punkten dieser Körper verschieden ist, so drängt sich die Frage auf: welchen Gesetzen gehorchen

die Spannungen und Formänderungen in einem zylindrischen Rohre, das von innen erwärmt wird? Führt man als Temperaturgesetz die Reihe ein, welche Fourier für die konzentrische Verteilung der Temperatur in einem Hohlzylinder angegeben hat, oder auch nur deren erste Glieder, so kommt man zu verwickelten, für Zwecke der Praxis wenig brauchbaren Formeln. Näherungsweise kann man stets annehmen, daß die Temperatur mit zunehmendem Radius gleichmäßig abnehme.

Jedes Element im Innern des Hohlzylinders wird sich deformieren. Dies rührt von Kräften her, welche auf die Oberfläche des Elements von den umliegenden Molekülen geäußert werden. Es ist ohne weiteres klar, daß das zylindrische Rohr nach der Formänderung ein Drehungskörper sein wird. Daher eignet sich zur Untersuchung ein halbpolares Koordinatensystem am besten. Es kommen drei Richtungen, die axiale, tangentiale und radiale in Betracht; sie seien mit den Buchstaben a, t und r bezeichnet. Es kann sich ein Punkt nur in radialer und axialer Richtung verschieben, und zwar müssen die Verrückungen aller in demselben Parallelkreise liegenden Punkte gleich groß sein. $PP_1'P_2P_3$ (Fig. 1) bleiben daher in derselben Meridianebene. Es stehen also auch nach der Formänderung die beiden durch PP_1 gehenden Seitenflächen des Volumelementes auf der Seitenfläche P_2P_3 senkrecht. Daher können in den drei in P zusammenstoßenden Seitenflächen keine Schubspannungen normal zu PP_2 und PP_3 bestehen. Solche gibt es also nur in den beiden durch PP_1 gehenden Ebenen. Nach dem Satze vom paarweisen Auftreten der Schubspannungen (Momentensatz) müssen die beiden in Betracht kommenden schiebenden Spannungen einander gleich sein; sie seien mit τ bezeichnet. Ferner müssen die Summen der Komponenten der auf das Volumelement wirkenden elastischen Kräfte in den drei Achsenrichtungen Null sein, woraus man folgende Beziehungen erhält:



$$\frac{\partial(r\cdot\sigma_r)}{r\partial r}-\frac{\sigma_t}{r}+\frac{\partial\tau}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\sigma_a}{\partial x}+\frac{\partial(r\cdot\tau)}{r\partial r}=0. \tag{2}$$

(Siehe z. B. Winkler: Über die Festigkeit der Röhren ... Civiling. 1860, S. 336.)

Es bedeuten σ_a, σ_t, σ_r die axiale bezw. die tangentiale und radiale Spannung. Die relativen Längenänderungen der drei Kanten PP_1, PP_2 und PP_3 sind $\frac{\Delta r}{r}$, $\frac{\partial(\Delta r)}{\partial r}$, $\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}$, wenn Δr und Δx die Verrückungen des Punktes P in der radialen und axialen Richtung bedeuten, und für diese gelten nach dem Superpositionsgesetze offenbar folgende Gleichungen, da die vorhandenen Schubkräfte keine Längenänderungen der Kanten, sondern nur ein Schiefstellen derselben bewirken:

$$\frac{\Delta r}{r} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_t - \frac{1}{m}(\sigma_r + \sigma_a)\right],$$

$$\frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_r - \frac{1}{m}(\sigma_a + \sigma_t)\right],$$

$$\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_a - \frac{1}{m}(\sigma_t + \sigma_r)\right].$$

E ist der Elastizitätsmodul, m die sogenannte Poissonsche Konstante. Die Druckkräfte sind positiv bezeichnet.

Um auch τ durch die Verrückungen des Punktes P auszudrücken, muß man die Änderung des Winkels P_2PP_3 suchen. Ist nämlich K der Schubmodul und γ die Winkeländerung, so ist

$$\tau = -K \cdot \gamma = -\frac{mE}{2(m+1)}\gamma.$$

Es kann γ dargestellt werden als Summe der Winkeländerungen, welche entstehen, wenn P_2 und P_3 sich gegen P verschieben.

Das r und x von P ist nach der Formänderung $r+\Delta r \ldots x+\Delta x$,

„ „ „ „ „ P_2 „ „ „ „ $r+\Delta r+dr+\frac{\partial(\Delta r)}{\partial r}dr \ldots x+\Delta x+\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}d$

„ „ „ „ „ P_3 „ „ „ „ $r+\Delta r+\frac{\partial(\Delta r)}{\partial x}dx \ldots x+\Delta x+dx+\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}d$

Die beiden Winkeländerungen sind also $\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}dx : dr = \frac{\partial(\Delta x)}{\partial r}$ bezw. $\frac{\partial(\Delta r)}{\partial x}dx : dx = \frac{\partial(\Delta r)}{\partial x}$, daher $\gamma = \frac{\partial(\Delta x)}{\partial r} + \frac{\partial(\Delta r)}{\partial x}$ und

$$\tau = -\frac{mE}{2(m+1)}\left[\frac{\partial(\Delta x)}{\partial r} + \frac{\partial(\Delta r)}{\partial x}\right]. \tag{3}$$

Hiermit sind alle Kräfte durch die Längenänderungen ausgedrückt.

Diese Gleichungen wären gültig, wenn die Temperatur sich nicht änderte. Denken wir uns die Temperatur der mittleren Mantelschichte, d. i. derjenigen, deren Abstand von der Achse $r_m = \frac{r_a + r_i}{2}$ ist, als Normaltemperatur angenommen, so kann die Temperaturerhöhung t

einer Schichte im Abstande r ausgedrückt werden durch $t = -\frac{\varDelta t}{d_1}(r - r_m)$, wenn $\varDelta t$ der gesamte Temperaturunterschied zwischen Innen- und Außenmantel und $d_1 = r_a - r_i$ die Rohrdicke bedeuten. Es müssen die relativen Längenänderungen nach den drei Richtungen um $a \cdot t$ vermehrt werden, wenn mit a der lineare Ausdehnungskoeffizient bezeichnet wird. Es ist also

$$(4) \qquad a \cdot t = -\frac{a \cdot \varDelta t}{d_1}(r - r_m) = -a'(r - r_m), \text{ wobei}$$

$$(5) \qquad a' = \frac{a \cdot \varDelta t}{d_1}.$$

Die gesamten relativen Längen- und Winkeländerungen sind also gegeben durch folgende Gleichungen:

$$(6) \qquad \frac{\varDelta r}{r} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_t - \frac{1}{m}(\sigma_r + \sigma_a)\right] - a'(r - r_m),$$

$$(7) \qquad \frac{\partial(\varDelta r)}{\partial r} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_r - \frac{1}{m}(\sigma_a + \sigma_t)\right] - a'(r - r_m),$$

$$(8) \qquad \frac{\partial(\varDelta x)}{\partial x} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_a - \frac{1}{m}(\sigma_r + \sigma_t)\right] - a'(r - r_m),$$

$$(9) \qquad \frac{\partial(\varDelta x)}{\partial r} + \frac{(\partial \varDelta r)}{\partial x} = -\frac{2(m+1)}{mE}\tau.$$

Es sind sechs Unbekannte vorhanden: $\varDelta r$, $\varDelta x$, σ_t, σ_r, σ_a und τ. Es stehen aber auch sechs voneinander unabhängige Gleichungen zur Verfügung: (1), (2), (6), (7), (8) und (9). Dadurch sind die Spannungen und die Verschiebungen als Funktionen von r und x bestimmt. Da außer den Unbekannten auch deren Differentialquotienten vorkommen, so wird sich die Notwendigkeit ergeben, Konstanten zu bestimmen. Hierzu dienen die Bedingungen:

für $x = 0$ und für $x = h$ muß $\sigma_a = 0$ sein, unabhängig von r,
„ $r = r_a$ „ „ $r = r_i$ „ $\sigma_r = 0$ „ „ „ x,

weil wir annehmen, daß auf den Körper keine äußeren Kräfte einwirken. (Fig. 2.)

Rechnet man aus den Gleichungen (6) bis (9) die Spannungen als Funktionen der Formänderungen aus, so erhält man:

$$(6_1) \quad \sigma_t = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[(m-1)\frac{\varDelta r}{r} + \frac{\partial(\varDelta r)}{\partial r} + \frac{\partial(\varDelta x)}{\partial x} + (m+1)a'(r - r_m)\right],$$

$$(7_1) \quad \sigma_r = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\varDelta r}{r} + (m-1)\frac{\partial(\varDelta r)}{\partial r} + \frac{\partial(\varDelta x)}{\partial x} + (m+1)a'(r - r_m)\right],$$

$$(8_1) \quad \sigma_a = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\varDelta r}{r} + \frac{(\partial \varDelta r)}{\partial r} + (m-1)\frac{\partial(\varDelta x)}{\partial x} + (m+1)a'(r - r_m)\right],$$

$$(9_1) \quad \tau = -\frac{Em}{2(m+1)}\left[\frac{\partial(\varDelta x)}{\partial r} + \frac{\partial(\varDelta r)}{\partial x}\right].$$

Würde man von vornherein von den Schubspannungen absehen, so würde nach (2) $\frac{\partial \sigma_a}{\partial x} = 0$, also σ_a von x unabhängig sein. Da nun σ_a für den untersten und obersten Querschnitt verschwindet, würden demnach im ganzen Körper keine axialen Spannungen entstehen, während schon die Anschauung zeigt, daß sie bedeutend sein müssen. Man darf also nicht von Anfang an und in dieser Weise die Schubspannungen vernachlässigen. Dies schließt jedoch nicht aus, daß τ in ganz speziellen Fällen zu Null wird. Die Ursache dieses Verhaltens ist folgende. Betrachtet man ein Element von nebenstehender Form für sich allein, so wird es sich so biegen, wie Fig. 3 andeutet, ohne daß Spannungen entstehen. Im körperlichen Zusammenhang wird aber diese tulpenförmige Ausweitung des Rohres durch die Ringfasern teilweise verhindert. Die in halber Höhe befindlichen Ringfasern werden gedrückt, die oben und unten befindlichen gezogen. Man kann also sagen: die Axialspannungen werden erst *mittelbar* erzeugt. *Unmittelbare* Axialspannungen fehlen.

Fig. 2.

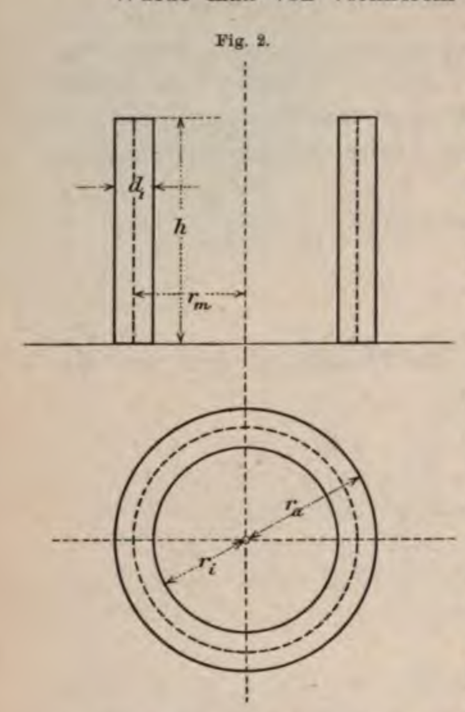
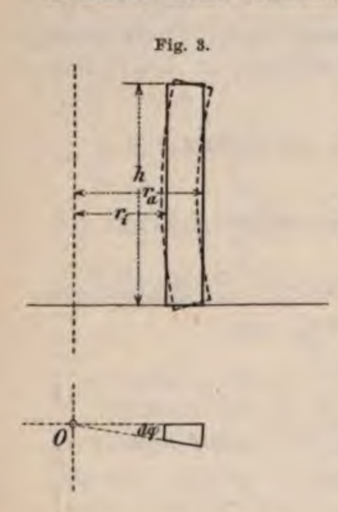


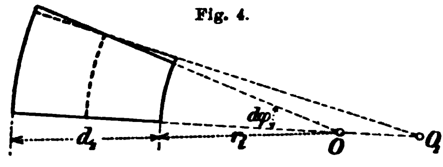
Fig. 3.



Anders verhalten sich die tangentialen Spannungen. Außer den mittelbaren inneren Kräften dieser Art sind auch unmittelbare vorhanden. Betrachtet man nämlich die tangentiale Ausdehnung allein, so ergibt sich, daß der äußere Umfang wegen der niedrigeren Temperatur sich zusammenzieht, während der innere sich ausdehnt. Soll der Körper im Zusammenhang bleiben, sollen also keine Sprünge in radialer Richtung entstehen, so muß auf jeden Teilquerschnitt ein Moment von solcher Größe wirken, daß eine Vergrößerung des Winkels $d\varphi$ nicht stattfindet. Die diesem Momente entsprechenden Spannungen können

unmittelbare Tangentialspannungen genannt werden. (Fig. 4.) Die Ringfasern werden also außen gezogen, innen gedrückt.

Ähnlich verhalten sich die Radialspannungen. In ihrer Richtung dehnt sich das Material innen aus, außen zieht es sich zusammen, sodaß die inneren Mantelschichten nach außen drücken und umgekehrt, die äußeren nach innen.



Um die Formänderungen in die Gleichungen (1) und (2) einzuführen, berechnen wir folgende Ausdrücke: $\frac{\partial(r\cdot\sigma_r)}{r\partial r}$, $\frac{\partial\sigma_a}{\partial x}$, $\frac{\partial\tau}{\partial x}$ und $\frac{\partial(r\cdot\tau)}{r\partial r}$ aus (6_1) bis (9_1) und beachten, daß r und x voneinander unabhängige Variable, Δr und Δx Funktionen dieser Größen sind:

$$(10)\quad \frac{\partial(r\cdot\sigma_r)}{r\partial r}=-\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[m\frac{\partial(\Delta r)}{r\partial r}+\frac{\partial(\Delta x)}{r\partial x}+(m-1)\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial r^2}+\frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial x\cdot\partial r}+(m+1)a'\frac{2r-r_m}{r}\right],$$

$$(11)\quad \frac{\partial\sigma_a}{\partial x}=-\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\partial(\Delta r)}{r\partial x}+\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial r\cdot\partial x}+(m-1)\frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial x^2}\right],$$

$$(12)\quad \frac{\partial\tau}{\partial x}=-\frac{Em}{2(m+1)}\left[\frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial r\cdot\partial x}+\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial x^2}\right],$$

$$(13)\quad \frac{\partial(r\cdot\tau)}{r\partial r}=-\frac{Em}{2(m+1)}\left[\frac{\partial(\Delta x)}{r\partial r}+\frac{\partial(\Delta r)}{r\partial x}+\frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial r^2}+\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial x\cdot\partial r}\right].$$

Diese Werte und die aus den Gleichungen (6_1) bis (9_1) in die Gleichungen (1) und (2) eingesetzt, geben folgende Beziehungen, welchen die Verrückungen genügen müssen:

$$(1_1)\quad (m+1)a'+(m-1)\frac{\partial(\Delta r)}{r\partial r}+(m-1)\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial r^2}+\frac{m\partial^2(\Delta x)}{2\partial r\,\partial x}+\frac{(m-2)\partial^2(\Delta r)}{2\partial x^2}-(m-1)\frac{\Delta r}{r^2}=0,$$

$$(2_1)\quad \frac{m\partial(\Delta r)}{2r\partial x}+\frac{m\partial^2(\Delta r)}{2\partial r\cdot\partial x}+(m-1)\frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial x^2}+\frac{(m-2)\partial(\Delta x)}{2r\partial r}+\frac{(m-2)\partial^2(\Delta x)}{2\partial r^2}=0.$$

Diese Formeln gelten aber nicht für den Zylinder allein. Ihre Bedeutung ist eine weitergehende: sie erscheinen bei allen Wärmespannungsproblemen der Rotationskörper, wenn die Temperatur sich so verteilt, wie angenommen wurde. Es dürfte daher auch außerordentlich schwierig sein, die allgemeinen Lösungen von Δr und Δx zu finden, das heißt diejenigen, welche alle Probleme der Drehungskörper als spezielle Fälle enthalten. Andererseits kann man aber durch Versuche, durch Reihenentwicklungen usw. Funktionen für Δr und Δx finden, welche den Gleichungen (1_1) und (2_1) genügen. Aus den Oberflächenbedingungen läßt sich zu jedem so gefundenen Integralsystem der dazu gehörige Drehungskörper finden.

Man kann die vorstehenden Gleichungen auch umformen und in folgender Weise anschreiben:

$$(1_2)\qquad (m+1)a' + (m-1)\frac{\partial\left[\frac{\partial(\Delta r\cdot r)}{r\,\partial r}\right]}{\partial r} + \frac{\partial\left[\frac{m\,\partial(\Delta x)}{2\,\partial r} + \frac{(m-2)\,\partial(\Delta r)}{2\,\partial x}\right]}{\partial x} = 0.$$

$$(2_2)\qquad \frac{\partial\left[r\left\{\frac{m\,\partial(\Delta r)}{2\,\partial x} + \frac{(m-2)\,\partial(\Delta x)}{2\,\partial r}\right\}\right]}{r\,\partial r} + (m-1)\frac{\partial\left[\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}\right]}{\partial x} = 0.$$

II. Für zwei Sonderfälle des vorliegenden Zylinderproblems lassen sich die Lösungen unschwer entwickeln. Ist nämlich der Hohlzylinder sehr kurz, so kann man sowohl die axialen Spannungen, als auch die Schubspannungen vernachlässigen. Dann kann man in einfacher Weise die tangentialen und radialen Spannungen erhalten

Ist hingegen das Rohr unendlich lang, so müssen die Spannungen von x unabhängig sein, da in allen Punkten mit demselben r der gleiche Spannungszustand herrschen muß, so daß $\frac{\partial \sigma_t}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_a}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0$ ist; ferner muß auch $\frac{\partial(\Delta r)}{\partial x} = 0$, also auch $\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial r\cdot\partial x} = \frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial x^2} = 0$ sein.

Da wir die Temperaturerhöhungen auf die Temperatur der mittleren Mantelschichte bezogen haben, können wir ferner annehmen, daß das Rohr bei der Deformation seine Länge nicht ändert, also $\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} = 0$ ist. Ganz korrekt ist diese Annahme nicht. Ihre Berechtigung ist aber gewiß so groß, wie die früher gemachte eines linearen Temperaturverteilungsgesetzes; beide gelten unter denselben Verhältnissen. Strenge genommen müßten wir $\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} =$ konstant nehmen und den Wert dieser Konstanten so bestimmen, daß das $\int \sigma_a df$ der positiven auf einen Rohrquerschnitt wirkenden axialen Spannungen gleich ist dem der negativen. df bedeutet ein Flächenelement des Rohrquerschnittes. Im übrigen beeinflußt diese Annahme in keiner Weise die Werte für die Tangential- und Radialspannungen, so daß es in sehr einfacher Weise möglich ist, nachträglich die — gänzlich unbedeutende — Korrektur der axialen Spannungen vorzunehmen. Die Spannungslinie — eine Gerade — ist eben so lange parallel zu sich selbst zu verschieben, bis Gleichgewicht an einem Querschnitte herrscht.

Jedenfalls wird $\frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial r\cdot\partial x} = \frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial x^2} = 0$ sein.

Daher sind die Gleichungen 1 und 2 für diesen Sonderfall so zu schreiben:

$$(1_a)\qquad \frac{d(r\cdot\sigma_r)}{r\,dr} - \frac{\sigma_t}{r} = 0,$$

$$(2_a)\qquad \frac{d(r\cdot\tau)}{dr} = 0.$$

Die Gleichungen (6) bis (9) lauten:

$$(6_a)\qquad \frac{\Delta r}{r} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_t - \frac{1}{m}(\sigma_r + \sigma_a)\right] - a'(r - r_m),$$

$$(7_a)\qquad \frac{d(\Delta r)}{dr} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_r - \frac{1}{m}(\sigma_a + \sigma_t)\right] - a'(r - r_m),$$

$$(8_a)\qquad 0 = -\frac{1}{E}\left[\sigma_a - \frac{1}{m}(\sigma_t + \sigma_r)\right] - a'(r - r_m),$$

$$(9_a)\qquad \frac{d(\Delta x)}{dr} = -\frac{2(m+1)}{mE}\tau.$$

Die Gleichungen (6_1) bis (9_1) und (1_1) sowie (2_1) lauten:

$$(6_{1a})\qquad \sigma_t = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[(m-1)\frac{\Delta r}{r} + \frac{d(\Delta r)}{dr} + (m+1)a'(r - r_m)\right]$$

$$(7_{1a})\qquad \sigma_r = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\Delta r}{r} + (m-1)\frac{d(\Delta r)}{dr} + (m+1)a'(r - r_m)\right],$$

$$(8_{1a})\qquad \sigma_a = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\Delta r}{r} + \frac{d(\Delta r)}{dr} + (m+1)a'(r - r_m)\right],$$

$$(9_{1a})\qquad \tau = -\frac{Em}{2(m+1)}\cdot\frac{d(\Delta x)}{dr}$$

$$(1_{1a})\qquad (m+1)a' + (m-1)\frac{d(\Delta r)}{r\,dr} + (m-1)\frac{d^2(\Delta r)}{dr^2} - (m-1)\frac{\Delta r}{r^2} = 0$$

$$(2_{1a})\qquad \frac{d(\Delta x)}{r\,dr} + \frac{d^2(\Delta x)}{dr^2} = 0.$$

Aus den zuletzt angeschriebenen Gleichungen erhält man durch Integration:

$$(14)\qquad \Delta r = -\frac{(m+1)a'}{3(m-1)}r^2 + C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

$$(15)\qquad \Delta x = C' \operatorname{logn} r + C''$$

$C_1\,C_2\,C'\,C''$ sind Konstanten.

Aus (14) und (15) ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$(16)\qquad \frac{\Delta r}{r} = -\frac{(m+1)a'}{3(m-1)}r + C_1 + \frac{C_2}{r^2}$$

$$(17)\qquad \frac{d(\Delta r)}{dr} = -\frac{2(m+1)a'}{3(m-1)}r + C_1 - \frac{C_2}{r^2}$$

$$(18)\qquad \frac{d(\Delta x)}{dr} = \frac{C'}{r}.$$

Diese Werte sind in die Gleichungen (6_{1a}) bis (9_{1a}) einzusetzen:

$$(19)\quad \sigma_t = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{2(m+1)(m-2)a'}{3(m-1)}r + mC_1 - (m+1)a'r_m + \frac{(m-2)C_2}{r^2}\right],$$

$$(20)\quad \sigma_r = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{(m+1)(m-2)a'}{3(m-1)}r + mC_1 - (m+1)a'r_m - \frac{(m-2)C_2}{r^2}\right],$$

$$(21)\quad \sigma_a = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{(m+1)(m-2)a'}{m-1}r + 2C_1 - (m+1)a'r_m\right]$$

$$(22)\quad \tau = -\frac{Em}{2(m+1)}\cdot\frac{C'}{r}.$$

Gleichung (22) folgt auch direkt aus (2_a); wenn $\frac{d(r\cdot\tau)}{dr}=0$ ist, muß $\tau\cdot r$ konstant sein.

Es sind nun zunächst die Konstanten C_1 und C_2 zu bestimmen. Für $r=r_i$ und $r=r_a$ ist $\sigma_r=0$; daraus folgen die Gleichungen:

$$\frac{(m+1)(m-2)a'}{3(m-1)}r_i+mC_1-(m+1)a'r_m-\frac{m-2}{r_i^2}C_2=0,$$

$$\frac{(m+1)(m-2)a'}{3(m-1)}r_a+mC_1-(m+1)a'r_m-\frac{m-2}{r_a^2}C_2=0.$$

Aus diesen Gleichungen rechnen sich folgende Größen:

$$(23)\quad C_1=\frac{(m+1)a'}{6m(m-1)(r_a+r_i)}[(m+1)r_a^2+2(m-1)r_ar_i+(m+1)r_i^2],$$

$$(24)\quad C_2=-\frac{(m+1)a'r_a^2r_i^2}{3(m-1)(r_a+r_i)},$$

$$(25)\quad mC_1-(m+1)a'r_m=-\frac{(m+1)(m-2)a'(r_a^2+r_ar_i+r_i^2)}{3(m-1)(r_a+r_i)}.$$

Mit Hilfe dieser Werte lassen sich nun die Normalspannungen als Funktionen von r bestimmen. Es ist

$$(26)\quad \sigma_t=-\frac{Ema'}{3(m-1)}\left[2r-\frac{r_a^2+r_ar_i+r_i^2}{r_a+r_i}-\frac{r_a^2r_i^2}{(r_a+r_i)r^2}\right],$$

$$(27)\quad \sigma_r=-\frac{Ema'}{3(m-1)}\left[r-\frac{r_a^2+r_ar_i+r_i^2}{r_a+r_i}+\frac{r_a^2r_i^2}{(r_a+r_i)r^2}\right],$$

$$(28)\quad \sigma_a=-\frac{Ema'}{m-2}\left[\frac{m-2}{m-1}r+\frac{(m+1)r_a^2+2(2m-1)r_ar_i+(m+1)r_i^2}{3m(m-1)(r_a+r_i)}-\frac{r_a+r_i}{2}\right].$$

Die Gleichungen (26) und (27) stellen eine Art höherer Hyperbeln, Gleichung (28) stellt eine Gerade dar.

Die relative Volumänderung v, welche durch die Summe $\frac{\Delta r}{r}+\frac{\partial(\Delta r)}{\partial r}+\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}$ bezw. durch den Ausdruck $\frac{m-2}{Em}(\sigma_t+\sigma_r+\sigma_a)$ gegeben ist, hängt von r linear ab. Es ergibt sich:

$$v=\frac{(m+1)a'}{3(m-1)}\left[-3r+\frac{2(m+1)r_a^2+4(2m-1)r_ar_i+2(m+1)r_i^2}{2m(r_a+r_i)}\right].$$

Die Schubspannung τ muß für $r=r_a$ und für $r=r_i$ verschwinden; dies ist nur möglich, wenn $C'=0$ ist. Es ist daher in allen Punkten des elastischen Körpers

$$(29)\quad \tau=0.$$

Schließlich läßt sich noch die radiale Verrückung Δr als Funktion von r angeben:

$$(30)\quad \Delta r=\frac{(m+1)a'}{3(m-1)}\left[-r^2+\frac{(m+1)r_a^2+2(2m-1)r_ar_i+(m+1)r_i^2}{2m(r_a+r_i)}r-\frac{r_a^2r_i^2}{(r_a+r_i)r}\right].$$

Wenn $a' = \frac{a \cdot \Delta t}{d_1}$ Null wird, so verschwinden sämtliche Spannungen. Dies ist der Fall, wenn a oder Δt Null wird.

Obwohl die Formeln (26), (27), (28) ... schon der Annahme eines linearen Temperaturverteilungsgesetzes wegen nur näherungsweise gültig sind, und zwar umsomehr, je kleiner das Verhältnis zwischen Rohrdicke und mittlerem Radius ist, sollen sie doch für einen Sonderfall umgeformt werden, bei dem diese Bedingung nicht erfüllt ist, aber sich merkwürdige Beziehungen ergeben.

Ist nämlich $r_i = 0$, so wird

$$(26_a) \qquad \sigma_t = -\frac{Ema'}{3(m-1)}(2r - r_a),$$

$$(27_a) \qquad \sigma_r = -\frac{Ema'}{3(m-1)}(r - r_a),$$

$$(28_a) \qquad \sigma_a = -\frac{Ema'}{m-2}\left[\frac{m-2}{m-1}r + \frac{(m+1)r_a}{3m(m-1)} - \frac{r_a}{2}\right],$$

$$(30_a) \qquad \Delta r = \frac{(m+1)a'}{3(m-1)}\left[-r^2 + \frac{(m+1)r_a}{2m}r\right].$$

Die drei Normalspannungen verteilen sich also geradlinig; die Verschiebung in radialer Richtung nach einer Parabel. Die Spannungen in einem Punkte der Achse bekommt man, wenn man für r Null einsetzt:

$$(26_b) \qquad \sigma_t = +\frac{E \cdot m \cdot a \cdot \Delta t}{3(m-1)},$$

$$(27_b) \qquad \sigma_r = +\frac{E \cdot m \cdot a \cdot \Delta t}{3(m-1)},$$

$$(28_b) \qquad \sigma_a = -\frac{E \cdot m \cdot a \cdot \Delta t}{m-2}\left[\frac{m+1}{3m(m-1)} - \frac{1}{2}\right],$$

$$(30_b) \qquad \Delta r = 0.$$

Es ist zu beachten, daß diese Spannungen unabhängig sind von r_a. Es kommt nur auf den Temperaturunterschied Δt an, dem sie proportional sind.

Die Spannungen für die Oberfläche erhält man, wenn man für $r \ldots r_a$ einsetzt:

$$(26_c) \qquad \sigma_t = -\frac{Ema\Delta t}{3(m-1)},$$

$$(27_c) \qquad \sigma_r = 0,$$

$$(28_c) \qquad \sigma_a = -\frac{E(3m^2 - 7m + 2)a\Delta t}{6(m-2)(m-1)},$$

$$(30_c) \qquad \Delta r = -\frac{(m+1)a\Delta t}{6m}r_a.$$

Die Spannungen sind wieder von r_a unabhängig; Δr ist proportional r_a.

Zahlenbeispiel: Für eine im unteren Teil eines Schornsteins befindliche, als Hohlzylinder zu betrachtende Trommel sei folgendes teils gegeben, teils angenommen:

$$r_a = 150 \text{ cm},$$
$$r_i = 100 \text{ cm},$$
$$d_1 = r_a - r_i = 50 \text{ cm},$$
$$\varDelta t = 125 \text{ Grad Cels.},$$
$$a = 0{,}00005 \text{ Grad}^{-1},$$
$$E = 45000 \text{ at},$$
$$m = 4.$$

Daher ist:

$$a' = \frac{a \cdot \varDelta t}{d_1} = \frac{125}{10^7} \text{ cm}^{-1},$$
$$\frac{E m a'}{3(m-1)} = 0{\cdot}25 \text{ kg cm}^{-3},$$
$$\frac{r_a^2 + r_a r_i + r_i^2}{r_a + r_i} = 190 \text{ cm},$$
$$\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a + r_i} = 900000 \text{ cm}^3,$$
$$\frac{E m a'}{m-2} = 1{\cdot}125 \text{ kg cm}^{-3},$$
$$\frac{(m+1)r_a^2 + 2(2m-1)r_a r_i + (m+1)r_i^2}{3m(m-1)(r_a+r_i)} - \frac{r_a + r_i}{2} = -\,83{\cdot}61 \text{ cm}.$$

Eingesetzt in die Gleichungen (26), (27) und (28):

$$\sigma_t = -\,0{\cdot}\,25\left[2r - 190 - \frac{900000}{r^2}\right] \text{at},$$
$$\sigma_r = -\,0{\cdot}\,25\left[\;r - 190 + \frac{900000}{r^2}\right] \text{at},$$
$$\sigma_a = -\,1{\cdot}125\left[\tfrac{4}{3}r - 83{\cdot}61\right] \text{at},$$

für $r = r_i$, $\sigma_t = 20{\cdot}0$ at, $\sigma_r = 0$, $\sigma_a = 19{\cdot}0$ at,
„ $r = r_m$, $\sigma_t = -\,0{\cdot}6$ at, $\sigma_r = 1{\cdot}7$ at, $\sigma_a = 0{\cdot}3$ at,
„ $r = r_a$, $\sigma_t = -\,17{\cdot}5$ at, $\sigma_r = 0$, $\sigma_a = 18{\cdot}4$ at.

Da diese Spannungen zum größten Teile weit über der Elastizitätsgrenze liegen, sind die hier angegebenen Werte an sich unrichtig und lassen nur die Überschreitung dieser und die Wichtigkeit der durch die ungleiche Temperaturverteilung entstehenden inneren Kräfte erkennen.

Für Metalle wird $m = \frac{10}{3}$ gesetzt. Dann lauten die Gleichungen (26), (27), (28) und (30):

$$(26_1)\qquad \sigma_t = -\tfrac{10}{21} E a'\left[2r - \frac{r_a^2 + r_a r_i + r_i^2}{r_a + r_i} - \frac{r_a^2 r_i^2}{(r_a + r_i) r^2}\right],$$

$$(27_1)\qquad \sigma_r = -\tfrac{10}{21} E a'\left[r - \frac{r_a^2 + r_a r_i + r_i^2}{r_a + r_i} + \frac{r_a^2 r_i^2}{(r_a + r_i) r^2}\right],$$

$$(28_1)\qquad \sigma_a = -\tfrac{5}{2} E a'\left[\tfrac{4}{7} r + \frac{18(r_a^2 + r_i^2) + 34 r_a r_i}{70(r_a + r_i)} - \frac{r_a + r_i}{2}\right],$$

$$(30_1)\qquad \Delta r = \tfrac{13}{21} a'\left[-r^2 + \frac{18(r_a^2 + r_i^2) + 34 r_a r_i}{20(r_a + r_i)} r - \frac{r_a^2 r_i^2}{(r_a + r_i) r}\right].$$

Kehren wir wieder zu den Gleichungen (1_1) und (2_1) zurück. Folgendes Funktionenpaar genügt denselben:

$$(31)\qquad \begin{aligned} \Delta r &= a_1 r + a_2 r^2 + a_1' r x, \\ \Delta x &= b_0 + b' x + b_2 r^2 + b'' x^2, \end{aligned}$$

(a_1, a_2, ... sind Konstanten), aber auch das folgende:

$$(32)\qquad \begin{aligned} \Delta r &= a_1 r + a_2 r^2 + a_2' r x + a_3 r^3 + a_3' r^2 x + a_3'' r x^2, \\ \Delta x &= b_0 + b' x + b_2 r^2 + b_2'' x^2 + b_3 r^3 + b_3' r^2 x + b_3'' r x^2 + b_3''' x^3. \end{aligned}$$

Diese, durch eine Potenzreihenentwicklung gefundenen Lösungen lassen sich natürlich beliebig erweitern. Merkwürdig ist nun, daß auch folgende, von (31) nur durch ein Glied verschiedene Funktionen Integrale von (1_1) und (2_1) sind:

$$(33)\qquad \begin{aligned} \Delta r &= C_0 r^2 + C_1 r + \frac{C_2}{r} + C_3 r x, \\ \Delta x &= C_4 + C_5 x + C_6 x^2 + C_7 r^2. \end{aligned}$$

Dabei müssen aber folgende Bedingungen zwischen den Konstanten erfüllt werden:

$$(34)\qquad \begin{aligned} C_0 &= -\frac{(m+1)\alpha \Delta t}{3(m-1) d_1}, \\ C_7 &= -\frac{m}{2(m-2)} C_3 - \frac{m-1}{m-2} C_6. \end{aligned}$$

Diese Lösungen lassen sich aber durch Entwicklung in Potenzreihen nicht erweitern. Die zu den Gleichungen (31), (32), (33) gehörigen Drehungskörper lassen sich aus den Oberflächenbedingungen finden. Der zu (33) passende Körper enthält den unendlich langen Hohlzylinder als speziellen Fall.

III. Das dem hier behandelten Wärmespannungsproblem analoge der „reinen“ Elastizitätstheorie ist das folgende: ein Hohlzylinder aus isotropem Materiale gehorche dem Hookschen und dem Superpositionsgesetze; auf seinen Innen- und Außenmantel wirke der Druck p_0 bezw. p'; es sind die Spannungen und Formänderungen zu bestimmen! Die Gleichgewichtsbedingungen für ein tonnengewölbsteinförmiges Volum-

element sind wieder durch (1) und (2) gegeben. Die Spannungen hingegen, ausgedrückt durch die spez. Längenänderungen, lauten:

$$(\mathrm{VI}_1) \qquad \sigma_t = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[(m-1)\frac{\Delta r}{r} + \frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} + \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}\right],$$

$$(\mathrm{VII}_1) \qquad \sigma_r = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\Delta r}{r} + (m-1)\frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} + \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}\right],$$

$$(\mathrm{VIII}_1) \qquad \sigma_a = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\Delta r}{r} + \frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} + (m-1)\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}\right],$$

$$(\mathrm{IX}_1) \qquad \tau = -\frac{Em}{2(m+1)}\left[\frac{\partial(\Delta x)}{\partial r} + \frac{\partial(\Delta r)}{\partial x}\right].$$

Ersetzt man in den Gleichungen (1) und (2) die Spannungen durch die Längenänderungen, so bekommt man:

$$(\mathrm{I}_1) \quad (m-1)\frac{\partial(\Delta r)}{r\partial r} + (m-1)\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial r^2} + \frac{m\partial^2(\Delta r)}{2\partial x\partial r} + \frac{(m-2)\partial^2(\Delta r)}{2\partial x^2} - (m-1)\frac{\Delta r}{r^2} = 0.$$

$$(\mathrm{II}_1) \quad \frac{m\partial(\Delta r)}{2r\partial x} + \frac{m\partial^2(\Delta r)}{2\partial r\partial x} + (m-1)\frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial x^2} + \frac{(m-2)\partial(\Delta x)}{2r\partial r} + \frac{(m-2)\partial^2(\Delta x)}{2\partial r^2} = 0.$$

Ist das Rohr unendlich lang und wird es der Beanspruchung unterworfen, so wird im allgemeinen seine Länge sich ändern. Die Spannungen sind von x unabhängig. Ist der Körper spannungslos montiert und verhindern die Befestigungen eine Bewegung der Moleküle längs der Achse, so hängen auch die Formänderungen in keiner Weise von x ab. Es wird also $\frac{\partial\sigma_t}{\partial x} = \frac{\partial\sigma_r}{\partial x} = \frac{\partial\sigma_a}{\partial x} = \frac{\partial\tau}{\partial x} = 0$, ferner $\frac{\partial(\Delta r)}{\partial x} = \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} = 0$, also auch $\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial x\cdot\partial r} = \frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial x\cdot\partial r} = \frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial x^2} = 0$ werden. Somit lauten die Gleichungen (I_1) und (II_1):

$$(\mathrm{I}_{1a}) \qquad \frac{d(\Delta r)}{rdr} + \frac{d^2(\Delta r)}{dr^2} - \frac{\Delta r}{r^2} = 0,$$

$$(\mathrm{II}_{1a}) \qquad \frac{d(\Delta x)}{rdr} + \frac{d^2(\Delta x)}{dr^2} = 0.$$

Durch Integration erhält man nun:

$$(\mathrm{XIV}) \qquad \Delta r = C_1 r + \frac{C_2}{r},$$

$$(\mathrm{XV}) \qquad \Delta x = C' \operatorname{logn} r + C''.$$

Daher lauten die Spannungsformeln wie folgt:

$$(\mathrm{XIX}) \qquad \sigma_t = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[mC_1 + (m-2)\frac{C_2}{r^2}\right],$$

$$(\mathrm{XX}) \qquad \sigma_r = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[mC_1 - (m-2)\frac{C_2}{r^2}\right],$$

$$(\mathrm{XXI}) \qquad \sigma_a = -\frac{2C_1 Em}{(m+1)(m-2)},$$

$$(\mathrm{XXII}) \qquad \tau = -\frac{C' Em}{2(m+1)r}.$$

Die kubische Dilatation $v = 2C_1$ ist also konstant. Aus den Oberflächenbedingungen bekommt man die Konstanten. Setzt man sie in die vorstehenden Gleichungen ein, so wird:

$$\text{(XXVI)} \qquad \sigma_t = \frac{r_a^2 p' - r_i^2 p_0}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{r_a^2 r_i^2 (p_0 - p')}{(r_a^2 - r_i^2) r^2},$$

$$\text{(XXVII)} \qquad \sigma_r = \frac{r_a^2 p' - r_i^2 p_0}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{r_a^2 r_i^2 (p_0 - p')}{(r_a^2 - r_i^2) r^2},$$

$$\text{(XXVIII)} \qquad \sigma_a = \frac{2}{m} \cdot \frac{r_a^2 p' - r_i^2 p_0}{r_a^2 - r_i^2},$$

$$\text{(XXIX)} \qquad \tau = 0.$$

Ein anderer (sehr oft behandelter) Sonderfall ist der folgende: ein Hohlzylinder ist oben und unten abgeschlossen. Nimmt man an, daß die axiale Spannung sich gleichmäßig über den ganzen Querschnitt verteilt, so muß, soll äußeres Gleichgewicht herrschen,

$$\sigma_a = \frac{r_a^2 p' - r_i^2 p_0}{r_a^2 - r_i^2}$$

sein.

Ferner wird $\tau = 0$ gesetzt. Rechnet man auf Grund dieser Annahmen die tangentiale und radiale Spannung, so erhält man wieder die Formeln (XXVI) und (XXVII). In diesem Falle sind sämtliche Spannungen unabhängig von den Elastizitätskonstanten. Könnte m den Wert zwei annehmen, so wären beide Sonderfälle identisch.

Zu den Gleichungen (I_1), (II_1) gehören wieder den Systemen (31), (32) und (33) analoge Lösungen. Speziell lauten die letzteren:

$$\text{(XXXIII)} \qquad \begin{aligned} \Delta r &= C_1 r + \frac{C_2}{r} + C_3 r x, \\ \Delta x &= C_4 + C_5 x + C_6 x^2 - \left[\frac{m}{2(m-2)} C_3 + \frac{m-1}{m-2} C_6\right] r^2. \end{aligned}$$

Zu diesem Integralsystem gehören folgende Spannungsformeln:

$$\sigma_t = - \frac{Em}{(m+1)(m-2)} \left[m C_1 + C_5 + (m-2) \frac{C_2}{r^2} + (m C_3 + 2 C_6) x\right],$$

$$\sigma_r = - \frac{Em}{(m+1)(m-2)} \left[m C_1 + C_5 - (m-2) \frac{C_2}{r^2} + (m C_3 + 2 C_6) x\right],$$

$$\sigma_a = - \frac{Em}{(m+1)(m-2)} [2 C_1 + (m-1) C_5 + 2 \{C_3 + (m-1) C_6\} x],$$

$$\tau = - \frac{Em}{2(m+1)(m-2)} [m C_3 - 2(m-1) C_6] r.$$

Zu diesen Formeln gehört bei gegebener Belastung ein aus den Oberflächenbedingungen zu ermittelnder Drehungskörper und umgekehrt: ist die Körperform gegeben, so kann man den Belastungszustand be-

stimmen. Ist z. B. ein unendlich langer Zylinder gegeben, so ergibt sich eine Belastungsart, welche den hier besprochenen Fall eines konstanten inneren und äußeren Druckes als Sonderfall enthält. Ist aber ein konstanter Oberflächendruck p_0 bezw. p' gegeben, so erhalten wir einen Drehungskörper, welcher unter Umständen in einen unendlich langen Hohlzylinder übergehen kann.

Ein weiteres Integralsystem der Gleichungen (I_1) und (II_1) ist folgendes:

$$\text{(XXXIV)} \qquad \begin{aligned} \Delta r &= -\frac{Cr}{R(x+R)} + \frac{Bxr}{R^3}, \\ \Delta x &= \frac{A}{R} + \frac{Bx^2}{R^3}. \end{aligned}$$

wobei $R^2 = x^2 + r^2$.

A, B und C sind Konstanten, die folgender Bedingung genügen müssen:

$$2B + \frac{m}{m-2}(B + C - A) = 0 \text{ (Boussinesq.).}$$

Wenn Drehungskörper um ihre Achse rotieren, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\frac{\partial (r \cdot \sigma_r)}{r \partial r} - \frac{\sigma_t}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\gamma \omega^2}{g} r = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_a}{\partial x} + \frac{\partial (r \cdot \tau)}{r \partial r} = 0.$$

γ ist das spez. Gewicht, g die Beschleunigung der Schwere, ω die Winkelgeschwindigkeit. Die Spannungsformeln sind identisch mit (IV_1) bis (IX_1). Setzt man sie in die vorstehenden Gleichungen ein, so bekommt man Ausdrücke, welche sich von (1_1) und (2_1) nur dadurch unterscheiden, daß $(m+1)a'$ ersetzt ist durch Cr, wobei C nur abhängig ist von m, E und $\frac{\gamma \omega^2}{g}$. Es lassen sich den Gleichungen (33) analoge Lösungen angeben; an Stelle des Gliedes $C_0 r^2$ tritt ein solches mit r^3.

IV. Einfacher sind die Verhältnisse bei einer Hohlkugel. Alle elastischen Kräfte normal zur radialen Richtung sind einander gleich und mit σ_t bezeichnet. Die radiale Spannung sei wieder σ_r genannt. Schubspannungen in radialer oder tangentialer Richtung fehlen. Betrachtet man ein Element, welches die Form eines Kuppelgewölbsteines hat, und bestimmt die Bedingung für das Gleichgewicht aller in radialer Richtung wirkenden Kräfte, so bekommt man die Gleichung:

$$\text{(35)} \qquad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_t) = 0.$$

Unter Beibehaltung der den früheren analogen Bezeichnungen ist der Zusammenhang zwischen Formänderungen und Spannungen gegeben durch die Gleichungen:

$$\frac{\Delta r}{r} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_t - \frac{1}{m}(\sigma_t + \sigma_r)\right] + at$$

$$\frac{d(\Delta r)}{dr} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_r - \frac{1}{m}(\sigma_t + \sigma_t)\right] + at$$

$$(36) \qquad \frac{\Delta r}{r} = -\frac{1}{E}\left[\frac{m-1}{m}\sigma_t - \frac{\sigma_r}{m}\right] - a'(r - r_m)$$

$$(37) \qquad \frac{d(\Delta r)}{dr} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_r - \frac{2}{m}\sigma_t\right] - a'(r - r_m).$$

Berechnet man aus den vorstehenden Gleichungen die Spannungen, so erhält man:

$$(38) \quad \sigma_t = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{m\Delta r}{r} + \frac{d(\Delta r)}{dr} + (m+1)a'(r - r_m)\right],$$

$$(39) \quad \sigma_r = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{2\Delta r}{r} + (m-1)\frac{d(\Delta r)}{dr} + (m+1)a'(r - r_m)\right].$$

Daraus ergeben sich folgende, in Gleichung (35) vorkommende Ausdrücke:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[-\frac{2\Delta r}{r^2} + \frac{2d(\Delta r)}{rdr} + (m-1)\frac{d^2(\Delta r)}{dr^2} + (m+1)a'\right],$$

$$\sigma_r - \sigma_t = -\frac{Em}{m+1}\left[-\frac{\Delta r}{r} + \frac{d(\Delta r)}{dr}\right],$$

welche dort eingesetzt, folgende Differentialgleichung liefern:

$$(40) \qquad -\frac{2\Delta r}{r^2} + \frac{2d(\Delta r)}{rdr} + \frac{d^2(\Delta r)}{dr^2} + \frac{(m+1)a'}{m-1} = 0.$$

Es ist daher

$$(41) \qquad \Delta r = -\frac{(m+1)a'}{4(m-1)}r^2 + \frac{C_1}{3}r + \frac{C_2}{r^2}$$

und

$$(42) \qquad \frac{d(\Delta r)}{dr} = -\frac{(m+1)a'}{2(m-1)}r + \frac{C_1}{3} - \frac{2C_2}{r^3}.$$

C_1 und C_2 sind die Integrationskonstanten.

Die Gleichungen (38) und (39) gehen nun über in die folgenden:

$$\sigma_t = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{3(m+1)(m-2)a'}{4(m-1)}r + \frac{m+1}{3}C_1 - (m+1)a'r_m + (m-2)\frac{C_2}{r^3}\right]$$

$$\sigma_r = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{(m+1)(m-2)a'}{2(m-1)}r + \frac{m+1}{3}C_1 - (m+1)a'r_m - 2(m-2)\frac{C_2}{r^3}\right].$$

Bestimmt man C_1 und C_2 aus der Bedingung, daß die radiale Spannung für $r = r_i$ und $r = r_a$ verschwindet, so bekommt man:

$$(43) \qquad C_1 = \frac{3a'(r_a + r_i)[r_a^2 + (m-1)r_a r_i + r_i^2]}{2(m-1)[r_a^2 + r_a r_i + r_i^2]},$$

$$(44) \qquad C_2 = -\frac{(m+1)a' r_a^2 r_i^2}{4(m-1)[r_a^2 + r_a r_i + r_i^2]},$$

so daß endlich

$$(45)\qquad \sigma_t = -\frac{Ema'}{4(m-1)}\left[3r - \frac{2(r_a+r_i)(r_a^2+r_i^2)}{r_a^2+r_a r_i+r_i^2} - \frac{r_a^3 r_i^3}{r_a^2+r_a r_i+r_i^2}\cdot\frac{1}{r^3}\right],$$

$$(46)\qquad \sigma_r = -\frac{Ema'}{2(m-1)}\left[r - \frac{(r_a+r_i)(r_a^2+r_i^2)}{r_a^2+r_a r_i+r_i^2} + \frac{r_a^3 r_i^3}{r_a^2+r_a r_i+r_i^2}\cdot\frac{1}{r^3}\right]$$

und

$$(47)\qquad \Delta r = \frac{(m+1)a'}{4(m-1)}\left[-r^2 + \frac{2(r_a+r_i)[r_a^2+(m-1)r_a r_i+r_i^2]}{(m+1)(r_a^2+r_a r_i+r_i^2)}r - \frac{r_a^3 r_i^3}{r_a^2+r_a r_i+r_i^2}\cdot\frac{1}{r^2}\right].$$

Die relative Volumänderung ist

$$(48)\qquad v = \frac{2\Delta r}{r} + \frac{d(\Delta r)}{dr} = \frac{(m+1)a'}{2(m-1)}\left[-2r + \frac{3(r_a+r_i)[r_a^2+(m-1\ r_a r_i+r_i^2]}{(m+1)(r_a^2+r_a r_i+r_i^2)}\right].$$

Maßgebend für die Beanspruchung ist immer die tangentiale Spannung, welche an der (äußeren und inneren) Oberfläche die größten Werte erreicht:

$$\text{für } r = r_a \ \ldots\ldots\ \min \sigma_t = -\frac{Ema'(r_a^3+r_a^2 r_i+r_a r_i^2-3r_i^3)}{4(m-1)(r_a^2+r_a r_i+r_i^2)},$$

$$\text{für } r = r_i \ \ldots\ldots\ \max \sigma_t = -\frac{Ema'(-3r_a^3+r_a^2 r_i+r_a r_i^2+r_i^3)}{4(m-1)(r_a+r_a r_i+r_i^2)}.$$

Daher sind die reduzierten Tangentialspannungen:

$$\min \sigma_t \,\mathrm{red} = -\frac{Ea'(r_a^3+r_a^2 r_i+r_a r_i^2-3r_i^3)}{4(r_a^2+r_a r_i+r_i^2)},$$

$$\max \sigma_t \,\mathrm{red} = -\frac{Ea'(-3r_a^3+r_a^2 r_i+r_a r_i^2+r_i^3)}{4(r_a^2+r_a r_i+r_i^2)}.$$

Hätten die Formen auch für den Grenzfall $r_i = 0$ Gültigkeit, so wäre:

$$\sigma_t = -\frac{Ema'}{4(m-1)}(3r-2r_a),$$

$$\sigma_r = -\frac{Ema'}{2(m-1)}(r-r_a),$$

$$\Delta r = \frac{(m+1)a'}{4(m-1)}\left[-r^2 + \frac{2r_a}{m+1}r\right].$$

Die Spannungen wären also lineare Funktionen von r. Natürlich ist a' gleich $\frac{a\cdot\Delta t}{r_a}$. Für die Kugeloberfläche ist

$$\sigma_t = -\frac{Ema\Delta t}{4(m-1)},$$

$$\sigma_r = 0,$$

$$\Delta r = \tfrac{1}{4}a\Delta t r_a$$

und für den Kugelmittelpunkt

$$\sigma_t = \sigma_r = \frac{Ema\Delta t}{2(m-1)},$$

$$\Delta r = 0.$$

Korrektionsspiegel zu parabolischen Reflektoren.[1]

Von F. Biske in Straßburg i. E..

I. Aberration parabolischer Spiegel.

Wenn OP den Durchschnitt eines Rotationsparaboloides mit der Achse OX darstellt, F seinen Brennpunkt mit der Brennweite f, P einen Punkt seiner Fläche mit den rechtwinkligen Koordinaten X, Y und den Polarkoordinaten θ, R, und wenn auf dieses Paraboloid unter dem Winkel α gegen seine Achse ein Strahlenbüschel s fällt, das vom Zentrum O in der Richtung OF_0 und vom Punkte P in der Richtung PF_θ reflektiert wird, so ist die Distanz $OF_\theta = f_\theta$ eine Funktion der Variablen α, θ und kann folgendermaßen entwickelt werden:

Aus dem $\triangle\, OLF_\theta$ ist:

$$f_\theta = OL \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin\theta},$$

da aber

$$OL = X + Y \operatorname{cotg}(\theta + \alpha)$$

und die Gleichung der Parabel

$$Y^2 = 4fX,$$

außerdem

$$\sin\theta = \frac{Y}{R}$$

und die Polargleichung der Parabel

$$R = \frac{f}{\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

also

(1) $$Y = 2f \operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

so wird

(2) $$OL = \frac{Y^2}{4f} + Y \operatorname{ctg}(\theta + \alpha)$$

und folglich ist

(3) $$f_\theta = \frac{f}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\left[\cos(\theta + \alpha) + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin(\theta + \alpha)\right].$$

---

1) Bei dieser Untersuchung wurden die Arbeiten berücksichtigt: „The abberation of parabolic mirrors“, Ch. L. Poor (Astron. Journ. 420); „The parabolic mirror“, C. W. Crockett (Astroph. Journ. VII).

Für $\alpha = 0$ ist

(4) $$f_\theta = f;$$

dies ist die Fundamentaleigenschaft des Paraboloides.

Für $\theta = 0$ ist

$$f_o = f \cos\alpha;$$

dies ist die Polargleichung eines Kreises mit dem Durchmesser f. Wenn also θ bis Null abnimmt, so nähern sich die seitlichen Brennpunkte bis zu einem geometrischen Orte, der hier eine Kugel mit dem Durchmesser gleich der Brennweite ist und die Fokalfläche des Paraboloides bildet.

Die lineare Aberration in der Richtung des Zentralstrahles ist nach Substitution von (3) und (4)

(5) $$f_o - f_\theta = \frac{f}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\left(\sin\alpha\sin\theta - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\theta\sin\alpha\right)$$

oder

$$\varDelta_1 f_\theta = f\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left(1 + \frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\right).$$

Die lineare Aberration senkrecht zum Zentralstrahl in der Fokalfläche ist nach der Figur

$$\varDelta_2 f_\theta = \varDelta_1 f_\theta \cdot \operatorname{tg}\theta$$

und die winkelige Aberration vom Zentrum O aus

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\varDelta_2 f_\theta}{f_o},$$

folglich nach Substitution von (4) und (5)

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\theta\left(1 + \frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\right),$$

oder bei kleinem α und θ

(7) $$\operatorname{tg}\gamma = 6\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}.$$

II. Aufstellung und Auflösung der Differentialgleichung des Korrektionsspiegels.

Bei der Brennweite $f = 10$ m und dem Einfallswinkel $\alpha = 1^0$ ist $f\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = 0{,}75$ mm; sei $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ eine kleine Größe 1er Ordnung.

Beim Verhältnisse der Öffnung zur Brennweite nach (1)

$\frac{2Y}{f} = 4\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = = \begin{cases}\frac{1}{5}\\ \frac{1}{10}\end{cases}$ und $f = \begin{cases}7.5 \text{ m}\\ 10 \text{ m}\end{cases}$ ist $f\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2} = \begin{cases}0.75 \text{ mm}\\ 0.15 \text{ mm}\end{cases}$, angenähert derselben Ordnung wie $f\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; also $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ eine kleine Größe $\frac{2}{3}$er Ordnung im Maximum.

Die winkelige Aberration vom Zentrum O aus ist nach (7) $\operatorname{tg}\gamma = 6\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}$; vom Punkte P aus ist der Winkel γ angenähert von derselben Größe; vom Punkte P_1, angenähert in halber Entfernung, ist der Aberrationswinkel σ fast zweimal größer als γ, aber $\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}$ ist ungefähr derselben Ordnung wie $6\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}$; also $\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}$ eine kleine Größe $2\frac{1}{3}$er Ordnung im Maximum.

Die Ordinate des Punktes P_1 ist $y = SL\operatorname{tg}(\theta + \alpha)$; für $\alpha = 0$ ist angenähert $y = \frac{1}{2}OF\operatorname{tg}\theta = OF\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, bei endlichem α ist y kleiner; also y eine kleine Größe $\frac{2}{3}$er Ordnung im Maximum.

Die Abszisse x des Punktes P_1 ist bei kleinem Winkel $\frac{\sigma}{2}$, den die Tangente in P_1 mit y einschließt, angenähert gleich $y\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}$; also x eine kleine Größe 3er Ordnung im Maximum.

Gegen endliche Größen wie $f = 1$ können die kleinen Größen 2er Ordnung und höherer vernachlässigt werden.

Stellt man sich in der Entfernung $Oo = a$ senkrecht zur Achse einen Planspiegel eingeführt vor, so würden die Strahlen OF_o, PF_θ nach RF'_o und MF'_θ reflektiert.

Die Entfernung der Punkte F'_o, F'_θ bleibt nach (5)

$$(8)\qquad F'_oF'_\theta = f'_o - f'_\theta = \frac{f}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\left(\sin\alpha\sin\theta - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\theta\sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2}f\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left(3 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) = f\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left(3 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Wird das Spiegelelement ds vom Punkte M in der Richtung des Strahles PM parallel zu sich selbst bis zum Punkte P_1 mit den Koordinaten x, y verschoben, so wird der reflektierte Strahl MF'_θ parallel zu sich selbst in die Lage P_1K verlegt.

Sei $NK \parallel MP_1$, so wird

$$(9)\qquad NK = MP_1 = \frac{x}{\cos(\theta + \alpha)};$$

da außerdem aus dem $\triangle F_\theta' NK$

$$F_\theta' K = \frac{x \sin 2(\theta + \alpha)}{\cos(\theta + \alpha) \sin \theta} = \frac{2x}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} \left(\cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \tfrac{1}{2}\sin\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} + \tfrac{1}{2}\sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{2x}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} \left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right),$$

so wird die lineare Aberration in der Richtung des Korrektionsstrahles jetzt

(10) $$F_o' K = F_o' F_\theta' + F_\theta' K =$$

$$= \frac{f \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\left(3 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) + 2x\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}.$$

Aus dem $\triangle MoL$ und nach (2) hat man

$$ML = \frac{\left[f \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} + 2f \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \operatorname{ctg}(\theta + \alpha) - a\right]}{\cos(\theta + \alpha)} =$$

$$= \frac{\left[f\left(2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - 3\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) - a\left(2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\right]\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}{\left(2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} - 2\sin\alpha \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\left[f\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - 3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) - a\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\right]\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} - 4\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}$$

und außerdem aus dem $\triangle LOF$ und nach (3)

$$LF_\theta = \frac{f\left[\cos(\theta + \alpha) + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin(\theta + \alpha)\right]\sin\alpha}{\cos^2\frac{\theta}{2}\sin(\theta + \alpha)} =$$

$$= \frac{f\left(2 - 3\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\sin\alpha}{2\left(\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{f\left(1 - 3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)},$$

also

(11) $$MF_\theta' = MF_\theta = ML + LF_\theta,$$

und aus dem $\triangle NF_\theta' K$ und nach (9)

$$F_\theta' N = \frac{x \sin(\theta + 2\alpha)}{\cos(\theta + \alpha)\sin\theta} = \frac{x\left(2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left(\cos\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} - 2\sin\alpha \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)} =$$

$$= \frac{x\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} - 4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)};$$

folglich wird aus der Figur und nach (11)

$$(12)\qquad P_1K = MN = MF'_\theta - F'_\theta N = ML + LF_\theta - NF'_\theta =$$

$$= \frac{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\left[f\left(\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}\right)-a\left(\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}\right)\right]}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}-4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$-\frac{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)x\left(\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}+3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}+2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}-4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Die winkelige Aberration vom Punkte P_1 aus, $\sigma = \angle F'_o P_1 K$, läßt sich jetzt ermitteln aus dem $\triangle F'_o P_1 K$

$$\frac{\sin\sigma}{\sin(\theta-\sigma)} = \frac{F'_o K}{P_1 K},$$

oder da

$$\frac{\sin\sigma}{\sin(\theta-\sigma)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)},$$

wird

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = \frac{F'_o K \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{P_1 K\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)+F'_o K\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)};$$

wenn in den Koeffizienten die Glieder vom größten bis zu 2er höherer Ordnung ausschließlich mitgenommen werden, nach Substitution von (10) und (12) ist

$$(13)\quad \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = \frac{f\left(3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}+3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}-2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^5\frac{\theta}{2}-17\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^4\frac{\theta}{2}\right)}{(f-a)\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)+x\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}-24\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$+\frac{2x\left(\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}+2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}^4\frac{\theta}{2}-8\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}\right)}{(f-a)\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)+x\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}-23\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Wird jetzt dem Spiegelelement ds im Punkte P_1 eine Drehung um die Hälfte der winkeligen Aberration erteilt, so wird der Strahl PP_1, statt in früherer Richtung P_1K, nach $P_1F'_o$ reflektiert und die Aberration korrigiert.

Da die Verlängerung des Elementes ds die Tangente P_1T bildet, so ist

$$(14)\qquad \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = \frac{dx}{dy} = x'.$$

Die winkelige Aberration ist ausgedrückt in der Funktion von θ nach (13); aus dem $\triangle P_1SL$ ist aber

$$y = \operatorname{tg}(\theta + \alpha)\left[f \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} + 2f\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}(\theta+\alpha) - a - x\right],$$

und wenn diese Gleichung nach Potenzen von $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ geordnet wird:

$$2f\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^4\frac{\theta}{2} + \left[2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(3f-a) - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}x - y\right]\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} -$$
$$- 2\left[(f-a) - x + 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}y\right]\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}a + 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}x + y = 0,$$

oder da das Glied mit der 4ten Potenz um mehr als $2\frac{2}{3}$er Ordnung kleiner als das konstante ist, so kann $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ aus der quadratischen Gleichung bestimmt werden, d. h.

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}, \tag{15}$$

wo

$$\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(3f-a) - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}x - y, \quad \beta = -(f-a) + x - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}y,$$
$$\gamma = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}a + 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}x + y. \tag{16}$$

Wenn $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ in (13) und (14) substituiert wird und die Glieder mit und ohne die Wurzel gesondert vereinigt werden, so ist

$$\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}\left\{x'\alpha^2\left\{(f-a)\left[(\alpha^2+8\beta^2-2\alpha\gamma) - 2\alpha\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]\right.\right.$$
$$\left. + x\left[(\alpha^2 - 24\beta^2 + 6\alpha\gamma) + 46\alpha\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]\right\}$$
$$- \left\{ f\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left[(3\alpha^4 - 32\beta^4 + 24\alpha\beta^2\gamma + 9\alpha^2\beta^2 - 3\alpha^2\beta\gamma - 2\alpha^2\gamma^2)\right.\right.$$
$$\left. + (136\alpha\beta^3 - 6\alpha^3\beta - 68\alpha^2\beta\gamma)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]$$
$$\left.\left. + 2x\left[(8\alpha\beta^3 - 2\alpha^3\beta - 4\alpha^2\beta\gamma) + (2\alpha^4 - 32\alpha^2\beta^2 + 8\alpha^3\gamma)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]\right\}\right\}$$
$$= -x'\alpha^2\left\{(f-a)\left[(-a^2\beta - 8\beta^3 + 6\alpha\beta\gamma) + (\alpha^3 + 2\alpha\beta^2 - \alpha^2\gamma)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]\right.$$
$$\left. + x\left[(-\alpha^2\beta + 24\beta^3 - 18\alpha\beta\gamma) + (\alpha^3 - 46\alpha\beta^2 + 23\alpha^2\gamma)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]\right\}$$
$$+ \left\{ f\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left[(32\beta^5 - 12\alpha^2\beta^3 - 40\alpha\beta^3\gamma + 9\alpha^3\beta\gamma + 10\alpha^2\beta\gamma^2)\right.\right.$$
$$\left. + (6\alpha^3\beta^2 - 3\alpha^4\gamma - 17\alpha^3\gamma^2 - 136\alpha\beta^4 + 136\alpha^2\beta^2\gamma)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]$$
$$+ 2x\left[(2\beta^5 - \alpha^4\gamma - 8\alpha\beta^4 + 8\alpha^2\beta^2\gamma - \alpha^3\gamma^2)\right.$$
$$\left.\left. + (-2\alpha^4\beta + 32\alpha^2\beta^3 - 24\alpha^3\beta\gamma)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \alpha^5\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right]\right\}.$$

Werden beim Quadrieren, nach Aufhebung gleicher Glieder, in allen Koeffizienten die Glieder vom größten bis zu 2er höherer Ordnung ausschließlich mitgenommen, so ist die Gleichung:

$$\left[12f^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}(\alpha^2\beta^8 + \alpha^2\beta^7\gamma) - 16fx \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \beta^{10}\right]$$
$$+ x'\left[3f(f-a) \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(\alpha^4\beta^6 + \alpha^4\beta^5\gamma) - 4(f-a)x \cdot \alpha^2\beta^8\right] = 0.$$

Nach (16) sind hier die Glieder mit größeren Potenzen von β die größten; da die größten Potenzen von y durch β und teilweise durch α geliefert werden, in β aber das Glied mit y kleiner als das konstante ist und wenn noch in α möglichst

(17) $$\text{Maximum } y < 2(3f - a) \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

wird, so werden allgemein die konstanten Glieder die größten und die mit wachsenden Potenzen von y allmählig kleiner sein.

Die einzelnen Glieder, bis zu den angenommenen Ordnungen entwickelt, werden:

$$\alpha^2\beta^8 = 2^2(3f-a)^2(f-a)^8 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 2^2(3f-a)(f-a)^8 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\, y + (f-a)^8 y^2,$$

$$\alpha^2\beta^7\gamma = -2^3(3f-a)^2(f-a)^7 a \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$$
$$+\left[2^3(3f-a)(f-a)^7 a \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 2^2(3f-a)^2(f-a)^7 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right] y$$
$$+\left[2^2(3f-a)(f-a)^7 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 2(f-a)^7 a \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right] y^2 - (f-a)^7 y^3,$$

$$\beta^{10} = (f-a)^{10},$$

$$\alpha^4\beta^6 = 2^4(3f-a)^4(f-a)^6 \operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} - 2^5(3f-a)^3(f-a)^6 \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\, y$$
$$+ 3\cdot 2^3(3f-a)^2(f-a)^6 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} y^2 - 2^3(3f-a)(f-a)^6 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} y^3 + (f-a)^6 y^4,$$

$$\alpha^4\beta^5\gamma = -2^5(3f-a)^4(f-a)^5 a \operatorname{tg}^5\frac{\alpha}{2}$$
$$+\left[2^6(3f-a)^3(f-a)^5 a \operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} - 2^4(3f-a)^4(f-a)^5 \operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}\right] y$$
$$+ 2^5\left[(3f-a)^3(f-a)^5 \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} - 3 \cdot 2^4(3f-a)^2(f-a)^5 a \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\right] y^2$$
$$+\left[2^4(3f-a)(f-a^5) a \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 3 \cdot 2^3(3f-a)^2(f-a)^5 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right] y^3$$
$$+\left[2^3(3f-a)(f-a)^5 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 2(f-a)^5 a \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right] y^4 - (f-a)^5 y^5.$$

Nach Substitution ist die gesuchte Differentialgleichung:

$$
\begin{aligned}
(18)\ \Bigg\{\Bigg[&\left.\begin{array}{l} +2^4\cdot 3(3f-a)^2(f-a)^2 f^2\,\mathrm{tg}^4\frac{\alpha}{2} \\ -2^5\cdot 3(3f-a)^2(f-a)f^2 a\,\mathrm{tg}^5\frac{\alpha}{2} \\ \end{array}\right|
\left.\begin{array}{l} -2^4\cdot 3(3f-a)(f-a)^2 f^2\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2} \\ +2^5\cdot 3(3f-a)(f-a)f^2 a\,\mathrm{tg}^4\frac{\alpha}{2} \\ -2^4\cdot 3(3f-a)^2(f-a)f^2\,\mathrm{tg}^4\frac{\alpha}{2} \end{array}\right| y \\
&\left.\begin{array}{l} +2^2\cdot 3(f-a)^2 f^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} \\ -2^3\cdot 3(f-a)f^2 a\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2} \\ +2^4\cdot 3(3f-a)(f-a)f^2\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2} \end{array}\right| y^2 \left. -2^2\cdot 3(f-a)f^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right| y^3\Bigg]-\left[+2^4(f-a)^4 f\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right]x\Bigg\} \\
+\Bigg\{\Bigg[&\left.\begin{array}{l} +2^4\cdot 3(3f-a)^4(f-a)f\,\mathrm{tg}^6\frac{\alpha}{2} \\ -2^5\cdot 3(3f-a)^4 f a\,\mathrm{tg}^6\frac{\alpha}{2} \\ \end{array}\right|
\left.\begin{array}{l} -2^5\cdot 3(3f-a)^3(f-a)f\,\mathrm{tg}^4\frac{\alpha}{2} \\ +2^6\cdot 3(3f-a)^3 f a\,\mathrm{tg}^5\frac{\alpha}{2} \\ -2^4\cdot 3(3f-a)^4 f\,\mathrm{tg}^5\frac{\alpha}{2} \end{array}\right| y \\
&\left.\begin{array}{l} +2^3\cdot 3^2(3f-a)^2(f-a)f\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2} \\ -2^4\cdot 3^2(3f-a)^2 f a\,\mathrm{tg}^4\frac{\alpha}{2} \\ +2^5\cdot 3(3f-a)^3 f\,\mathrm{tg}^4\frac{\alpha}{2} \end{array}\right| y^2
\left.\begin{array}{l} -2^3\cdot 3(3f-a)(f-a)f\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} \\ +2^4\cdot 3(3f-a)f a\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2} \\ -2^3\cdot 3^2(3f-a)^2 f\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2} \end{array}\right| y^3 \\
&\left.\begin{array}{l} +3(f-a)f\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \\ -2\cdot 3f\cdot a\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} \\ +2^3\cdot 3(3f-a)f\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} \end{array}\right| y^4 \left. -3f\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right| y^5\Bigg]-\Bigg[\left.+2^4(3f-a)^2(f-a)^3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right| \\
&\left. -2^4(3f-a)(f-a)^3\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right| y \left. +2^2(f-a)^3\right| y^2\Bigg]x\Bigg\}\frac{dx}{dy}=0.
\end{aligned}
$$

Diese Differentialgleichung ist von der Form:

$$(Y_0^1 + Y^1 x) + (Y_0^2 + Y^2 x)\frac{dx}{dy} = 0;$$

sie kann nach Division durch den Koeffizienten bei $\frac{dx}{dy}$ dargestellt werden in der Form

$$Y_0 + Yx + \frac{dx}{dy} = 0, \tag{19}$$

wo

$$Y_0 = \frac{Y_0^1}{Y_0^2} \quad \text{und} \quad Y = -\frac{Y^1 - \frac{Y^2\,.\,Y_0^1}{Y_0^2}}{Y_0^2}.$$

In einzelnen Teilen der Gleichung (18), und dadurch auch in (19) nehmen die Glieder mit wachsenden Potenzen von y allmählich ab, nach (17); wenn noch die Ordnung von x berücksichtigt wird, so kann der Teil Y in Gleichung (19) bis zum konstanten Gliede abgekürzt werden, und die resultierende Gleichung kann dargestellt werden in der Form:

$$Y + A x + \frac{dx}{dy} = 0. \tag{20}$$

Die Gleichungen (19) und (20) können integriert werden durch die Substitution $x = uv$. Die aufgelöste Gleichung (20) ist:

$$x = \left(e^{-\int A\,dy}\right)\left(c - \int Y e^{\int A\,dy} \cdot dy\right). \tag{21}$$

Da Y ein Aggregat von konstanten und nach Potenzen von y geordneten Gliedern darstellt, so ist das hier vorkommende allgemeine Integral von der Form:

$$\int y^m e^{ay} dy = \left[\frac{y^m}{a} - \frac{m y^{m-1}}{a^2} + \frac{m(m-1)y^{m-2}}{a^3} \cdots + (-1)^m \frac{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}{a^{m+1}}\right] \cdot e^{ay}.$$

Soll für $y = 0$, $x = 0$ werden, so ist die Konstante der Gleichung (21):

$$c = (-1)^m \frac{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}{a^{m+1}} + (-1)^n \frac{n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1}{a^{n+1}} + \cdots.$$

Für allmählich wachsende y ist es möglich die zugehörigen x zu berechnen.

III. Diskussion.

Als Kontrolle der Gleichung (18) oder (19) ergibt sich für $\alpha = 0$, unabhängig von a, $\frac{dx}{dy} = 0$, d. h. ein Planspiegel.

In der Gleichung dieses Korrektionsspiegels sind die Koordinaten x, y in Funktion der Konstanten f, a, α ausgedrückt. Die Aberration ist für einen bestimmten Winkel α korrigiert, denn sie wird nach (7) für wachsende α größer. Aus der Figur ist aber ersichtlich, daß es durch axiale Bewegung des Korrektionsspiegels in der Richtung zum parabolischen Spiegel möglich ist den reflektierten Strahl bei größerem α vom Elemente des Korrektionsspiegels mit größerer Neigung, dagegen durch Rückwärtsbewegung bei kleinerem α vom Elemente mit kleinerer Neigung, reflektieren zu lassen. Es wird durch diese Verschiebungen in den Grenzen für α, in welchen die Neigung der Elemente des Korrektionsspiegels von o bis P_1 dazu ausreicht, eine im richtigen Sinne wirkende Korrektion der Strahlen ermöglicht.

Bei gleich dem mittleren Winkel des Gesichtsfeldes gewähltem α

ist die vorteilhafteste Höhe und die mittlere Entfernung a des Korrektionsspiegels bestimmt durch den vom Punkte des parabolischen Spiegels mit größtem θ reflektierten Strahl und dadurch, daß der zum axialen Punkte des Korrektionsspiegels reflektierte Strahl noch eben am Rande dieses Spiegels vorher vorbeigehen soll. An dem reflektierten Strahle PL soll also der Punkt M so bestimmt werden, daß der einfallende Strahl MG nach seiner Reflexion durch den Fußpunkt o des Lotes von M zur Achse hindurchgehen wird.

Es ist dann aus $\triangle\, MLo$ und $\triangle\, MGo$ bei Berücksichtigung von (1)

$$(22)\qquad oM = oL\,\mathrm{tg}\,(\theta+\alpha) = f\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\left[\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,\mathrm{tg}\,(\theta+\alpha)+2\right] - a\,\mathrm{tg}\,(\theta+\alpha)$$

und

$$oM = 2f\,\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2}\,\mathrm{ctg}\,(\vartheta+\alpha)[\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,(\vartheta+\alpha)],$$

wo $\angle\, OFG = \vartheta$, und nach (2)

$$(23)\qquad a = f\,\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2}\left[\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2} + 2\,\mathrm{ctg}\,(\vartheta+\alpha)\right];$$

es läßt sich, durch Vergleichung der Werte von oM, ϑ in Funktion von f, θ, α bestimmen. Da $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$er Ordnung, $\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{3}$er Ordnung, $\mathrm{tg}\,(\theta+\alpha) = \frac{1}{3}$er Ordnung, so ist es möglich, bei Berücksichtigung der Glieder bis zu 2er höherer Ordnung, ϑ aus der quadratischen Gleichung zu berechnen:

$$(24)\qquad p\,\mathrm{tg}^2\frac{\vartheta}{2} + 2(m-n)\,\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2} + m\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0,$$

wo

$$m = f\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\left[\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,\mathrm{tg}\,(\theta+\alpha)+2\right],\qquad n = f[\mathrm{tg}\,(\theta+\alpha)+2\,\mathrm{tg}\,\alpha],$$

$$p = f[3\,\mathrm{tg}\,(\theta+\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha - 4].$$

Nach den Dimensionen $f = 10m$, $\frac{2Y}{f} = 0.1$ ist aus (24), (23), (22)

$$\text{für}\quad \alpha = \begin{cases} 1^0 \\ 30', \\ 15' \end{cases}\qquad \vartheta = \begin{cases} 28'\,10''\!.4 \\ 39'\,46''\!.4, \\ 33'\,\;2''\!.9 \end{cases}\qquad a = \begin{cases} 0.3195f \\ 0.5700f, \\ 0.6878f \end{cases}$$

$$\text{Max. } y < Mo < \begin{cases} 0.0285f \\ 0.0165f, \\ 0.0126f \end{cases}\qquad \text{dagegen nach (17) Max. } y < \begin{cases} 0.0468f \\ 0.0212f. \\ 0.0101f \end{cases}$$

Das Beobachten mit dem Korrektionsspiegel ist ermöglicht durch eine Öffnung bei O im parabolischen Spiegel, oder durch Reflexion der korrigierten Strahlen von einem 45° zur Achse geneigten Spiegel, der in H, wo der äußerste korrigierte Strahl den innersten schneidet, gesetzt wird.

Durch den Meridian oP' des Korrektionsspiegels werden die Strahlen korrigiert, welche von dem Meridiane OP des parabolischen Spiegels reflektiert sind, der in derselben Ebene durch die Achse liegt und welche von dem Punkte des Objektes ausgehen, der in demselben Meridiane sich befindet; dasselbe gilt auch für andere Meridiane. Die Intensität des korrigierten Bildpunktes wird also in dem Verhältnisse größer sein, als die mit dem Auge gesehene, in welchem die Fläche des elementaren Meridians des parabolischen Spiegels größer als die der Augenpupille ist. Da die Strahlen, welche von einem Punkte des Objektes ausgehen, der in einem bestimmten Meridiane sich befindet, und welche durch den ganzen parabolischen Spiegel reflektiert sind, ein Bildchen erzeugen, das eine bestimmte Flächenausdehnung hat, so würde für Korrektion aller dieser Strahlen eine Fläche des Korrektionsspiegels nötig und die gleichzeitige Korrektion für Punkte des Objektes in anderen Meridianen nicht möglich sein. Es wäre möglich eine sukzessive Korrektion für Punkte des Objektes in allen Meridianen durch die Rotation um die Achse eines solchen Korrektionsspiegels für alle Strahlen zu erreichen. Die sukzessive Abbildung des Objektes könnte aber einfacher durch eine spiralförmige Rotation der Achse des parabolischen Spiegels selbst um das Zentrum O erreicht werden. Dazu müßte aber vor der unbeweglichen photographischen Platte in F ein durch die Achse mitgeführtes Diaphragma angebracht werden, damit nur der zentrale Lichtkegel zur Platte gelangen kann. Wenn dieser Lichtkegel von einem hyperbolischen Spiegel h reflektiert wird, der einen Brennpunkt in F hat, möglichst nahe an ihm liegt und nur die Strahlen dieses Kegels aufnimmt, so werden die nicht axialen Strahlen größtenteils am hyperbolischen Spiegel vorbeigehen und noch durch ein Diaphragma im Zentrum O des parabolischen Spiegels abgegrenzt, zur photographischen Platte, die im zweiten Brennpunkte des hyperbolischen Spiegels sich befinden sollte, nicht gelangen. Die Rotation der Achse des parabolischen Spiegels kann dann um das Zentrum des hyperbolischen Spiegels erfolgen. Die Punkte des Objektes werden dann durch die fundamentale Eigenschaft des parabolischen Spiegels in Punkten und durch die sukzessive Einstellung der Achse des Spiegels winkeltreu abgebildet.

Zürich, im Oktober 1902.

Über das natürliche Erhaltungsprinzip.

Von S. Wellisch, Oberingenieur der Stadt Wien.

Die mechanische Begründung der *Methode der kleinsten Quadrate* hat so vielerlei Wege genommen, daß ein Rückblick auf die wichtigsten Entwicklungsstadien des mit dieser Methode verwandten mechanischen Prinzips der möglichsten Erhaltung des Naturzustandes von einigem Interesse sein dürfte.

In Anlehnung an die von Galilei in seiner Hauptschrift: „Discorsi e dimostrazioni matematiche", Leyden 1638, festgestellte Wirkungsweise der Schwere, wonach Hebungen und Senkungen durch die Quadrate der Geschwindigkeiten dargestellt werden, hat Huygens in dem Werke: „Horologium oscillatorium," Paris 1673, für das Erhaltungsprinzip das erste Fundament gelegt, indem er der erste war, welcher erkannt hat, daß dasjenige, was in der Natur erhalten bleibt, durch die Summe der Produkte aus den Massen und den Quadraten der Geschwindigkeiten auszudrücken sei. Der mit diesem Produkte verbundene Begriff der „lebendigen Kraft", welcher später von Cartesius (1686), Leibniz (1695) und den drei Bernoulli (1686—1748) eine bestimmtere Ausbildung und Aufklärung gefunden hat, wurde in dem Erhaltungsprinzip zum Gegenstand verschiedener Variationen gemacht.

In seinem Werke: „Varia opera mathematica", Tolosae 1679, hat Fermat zum ersten Male den Satz ausgesprochen, „daß die Natur immer auf den kürzesten Wegen tätig sei," oder mit anderen Worten, daß die Natur mit dem „möglich geringsten Kraftaufwand" auskomme, d. h. im Sinne des „geringsten Widerstandes" vorgehe. Diesen Gedanken hat im Jahre 1740 und einige Jahre später Maupertuis aufgegriffen, um in der Mechanik ein neues Gesetz aufzustellen, welches in seiner Abhandlung: „Les lois du mouvement et du repos déduites d'un principe méthaphysique" (Histoire de l'académie de Berlin, 1746) folgenden Wortlaut hat: „Wenn in der Natur eine Veränderung vorgeht, so ist die für diese Veränderung notwendige Tätigkeitsmenge die kleinst mögliche." Die für die Veränderung eines Bewegungzustandes erforderliche Tätigkeitsmenge ist als Produkt von der Form

$$m \cdot v \cdot s$$

zu denken, worin m die Masse, v die Geschwindigkeit und s den zurückgelegten Weg bedeutet. Unter der Veränderung, die in der Natur vor sich gehen und ein Minimum werden soll, wird die Differenz zwischen

zwei Tätigkeitsmengen verstanden, deren eine dem Zustande vor dem Ereignis, die andere demjenigen nach dem Ereignis entspricht, gleichviel, ob das letztere ein wirklicher oder nur ein denkbar möglicher, ein virtueller Vorgang sei.

Da diese Darstellung des Prinzips der möglichsten Erhaltung des Naturzustandes, welches man auch als das „Prinzip der kleinsten Wirkung“ (principium minimae actionis) bezeichnet, nicht klar genug durchsehen läßt, wie im allgemeinen eine unendlich kleine oder doch eine sehr geringfügige Veränderung eines Systems in der Nähe des Gleichgewichtszustandes — worauf es am meisten ankommt — zu behandeln sei, so erscheint die von Euler gegebene Fassung in differentieller Form viel exakter und deutlicher. In seiner Schrift: „Methodus inveniendi lineas curvas,“ Lausanne 1741, stellt er für die Formulierung des Prinzips der kleinsten Wirkung das Produkt

$$m \cdot v \cdot ds$$

auf. Dieses Produkt, worin die Bewegungsgröße mv mit dem differentiellen Wegelement ds multipliziert erscheint, bezeichnet er als die augenblickliche lebendige Kraft, und das Integral dieser augenblicklichen lebendigen Kräfte zwischen zwei entsprechenden Zeitgrenzen läßt er ein Minimum werden. Mit Bezug auf die Relation

$$v = \frac{ds}{dt}$$

könnte der Eulersche Ausdruck auch geschrieben werden wie folgt:

$$m \cdot v^2 \cdot dt \quad \text{oder} \quad m \frac{ds^2}{dt}$$

und unter Zugrundelegung der Zeiteinheit:

$$m \cdot v^2 \quad \text{oder} \quad m \cdot ds^2.$$

In der Schrift: „Traité de dynamique,“ Paris 1743, gibt d'Alembert den elementaren Wirkungen die Form

$$m \cdot v \cdot dv.$$

Setzt man hierin $m = \frac{p}{g}$, $v = \frac{ds}{dt}$ und $dv = g \cdot dt$, wo p die Kraft und g die zugehörige Beschleunigung bedeutet, so hat man

$$m \cdot v \cdot dv = \frac{p}{g} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot g \cdot dt = p \cdot ds$$

d. i. das Element der *Arbeit.*

Nach Lagrange, welcher in seiner „Mécanique analytique“ Paris 1788, die Eulersche Formel analytisch insofern ausdehnte, als

er an die Stelle des eindeutigen Minimums die doppelte Möglichkeit von Maximum und Minimum einführte, könnte man dieses Prinzip als dasjenige „der größten und kleinsten lebendigen Kraft“ bezeichnen, in welcher Ausdrucksweise es sich auch unmittelbar auf den Grenzfall des Gleichgewichtes anwenden läßt, indem Lagrange nachgewiesen hat, daß unter allen Lagen eines bewegten Systems die der größten und kleinsten lebendigen Kraft entsprechende auch diejenige sei, in welche man es bringen müßte, damit es sich im Zustande des Gleichgewichtes befände.

Laplace drückt sich in seinem Werke: „Exposition du système du monde“ wie folgt aus: „Das Integral der mit dem Zeitelemente multiplizierten lebendigen Kraft eines Systems ist ein Minimum, sodaß also die wahrhafte Ökonomie der Natur diejenige der lebendigen Kraft ist.“ Dieser Auffassung, welche der Eulerschen Formulierung vollkommen entspricht, schließen sich später auch Poisson (Traité de mécanique, 1833), Hamilton (Philosophical Transactions, 1834) und Jacobi (Vorlesungen, 1842) an, jedoch unter erweiterten Gesichtspunkten, die in der analytischen Bearbeitung des Prinzips zum Ausdrucke gelangen.

Carnot läßt in seinen „Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement“, Paris 1803, den Verlust an lebendiger Kraft zu einem Minimum werden und nähert sich damit wieder der d'Alembertschen Form.

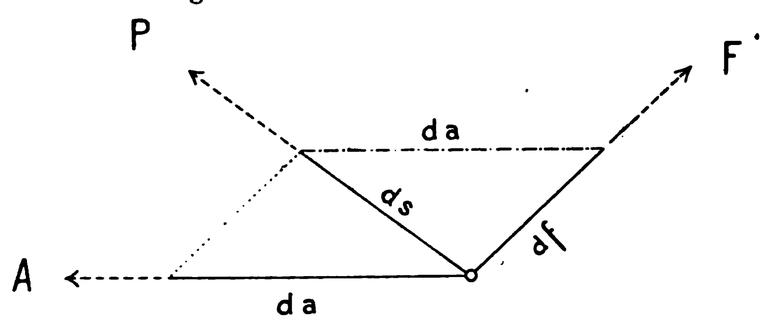
In dem Aufsatze: „Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik“, (Crelle, Journal für Mathematik, Bd. IV, 1829) hat Gauß einen mit dem Prinzip der geringsten Wirkung verwandten Satz dahin formuliert: „Die Bewegung eines Systems materieller, auf was immer für eine Art unter sich verknüpfter Punkte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äußere Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblicke in möglich größter Übereinstimmung mit der freien Bewegung oder *unter möglich kleinstem Zwange*, indem man als Maß des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeitteilchen erleidet, die Summe der Produkte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punktes von seiner freien Bewegung in seine Masse betrachtet.“ Unter der Ablenkung da, welche ein materieller Punkt von der Masse m in jedem Zeitteilchen erleidet, wird jener Unterschied in der Bewegung verstanden, welcher eintreten würde, wenn die Bewegung anstatt unter dem Einflusse der vorgeschriebenen Bedingungen unter demjenigen der frei wirkenden Kräfte, also ohne das Vorhandensein dieser Bedingungen ausgeführt werden würde. Nach dem Gaußschen Satze findet also die zwangloseste Bewegung unter der Bedingung statt, daß die sogenannte Ablenkungssumme

$$\sum m \cdot da^2$$

ein Minimum wird. — Ist das unter dem Einflusse der *freien* Bewegung zurückgelegte Wegelement df, das unter dem Einflusse der *gezwungenen* Bewegung ds, so erklärt das Prinzip der geringsten Wirkung aber denjenigen Grenzfall als den Gleichgewichtszustand, für welchen die Summe der Produkte $m \cdot ds^2$ ein Minimum ist. Oder betrachtet man mehrere materielle Punkte $m_1\ m_2\ m_3 \ldots$, welche im *freien* Zustande von den angreifenden Kräften um $df_1\ df_2\ df_3 \ldots$, im *verbundenen* Zustande aber um $ds_1\ ds_2\ ds_3 \ldots$, verschoben werden, sodaß sie vermöge ihrer Verbindungen die seitlichen Ablenkungen $da_1\ da_2\ da_3 \ldots$ erleiden, so erfolgt die *wirkliche* Bewegung unter der Minimumsbedingung:

$$\sum m \cdot ds^2 = \min.$$

Führt man die freiwirkenden Kräfte F, die von der freien Bewegung ablenkenden, durch die vorgeschriebenen Bedingungen wachgerufenen Ablenkungskräfte A und die tatsächlich zur Wirksamkeit



kommenden Resultierenden P ein, welche sich nach vorstehender Figur zusammensetzen; bezeichnet man ferner die den verschiedenen Kräften und dem gleichen Zeitteilchen dt entsprechenden Beschleunigungen mit φ, α und π, sodaß die Beziehungen bestehen:

$$F = m\varphi \qquad df = \varphi \frac{dt^2}{2}$$

$$A = m\alpha \qquad da = \alpha \frac{dt^2}{2}$$

$$P = m\pi \qquad ds = \pi \frac{dt^2}{2},$$

so erhält man die Arbeitsgleichungen:

$$\sum m \cdot df^2 = \frac{dt^2}{2} \sum m \cdot \varphi \cdot df = \frac{dt^2}{2} \sum F \cdot df$$

$$\sum m \cdot da^2 = \frac{dt^2}{2} \sum m \cdot \alpha \cdot da = \frac{dt^2}{2} \sum A \cdot da$$

$$\sum m \cdot ds^2 = \frac{dt^2}{2} \sum m \cdot \pi \cdot ds = \frac{dt^2}{2} \sum P \cdot ds.$$

Wenn im verbundenen Zustande $\frac{dt^2}{2}\sum F \cdot df = 0$ und daher $\sum A \cdot da = \sum P \cdot ds = \text{min}$ ist, dann kann man sagen: Es findet die wirkliche Bewegung nach dem Prinzip des kleinsten Zwanges so statt, wie nach dem Prinzip der geringsten Wirkung, nämlich derart, daß die Summe der von den Ablenkungskräften verrichteten Arbeiten ein Minimum wird. Andernfalls müßte man, um das Gaußsche Prinzip mit dem natürlichen Erhaltungsprinzip in Übereinstimmung zu bringen, den Einfluß der freiwirkenden Kräfte in Berücksichtigung ziehen, oder es müßte das Prinzip des kleinsten Zwanges mit dem Trägheitsgesetze in Verbindung gebracht werden. (Mach: „Die Mechanik in ihrer Entwicklung"; Hertz: „Die Prinzipien der Mechanik".) In dieser Verbindung erscheint das Minimumsprinzip in der allgemeinsten Form, und in dieser erhielt es die vollkommenste und verständlichste Fassung von Castigliano durch seinen „Lehrsatz von der kleinsten Arbeit", welchen er zum ersten Male im Jahre 1873 in seiner Diplomarbeit als Ingenieur und später in seinem klassischen Werke: „Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications," Turin 1879, gegeben hat. Begründet durch die Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme und als eine Folgerung seiner berühmten Sätze über den Differentialquotienten der Arbeit, lautet dieser Lehrsatz wie folgt: „Die elastischen Kräfte, welche nach der Deformation des Körpers oder des Systems zwischen den Molekülen auftreten, sind jene, welche die Deformationsarbeit zu einem Minimum machen, insofern man die Bedingungsgleichungen berücksichtigt, welche ausdrücken, daß zwischen diesen Kräften um jedes Molekül Gleichgewicht herrscht."

Der Zusammenhang des mechanischen Minimumsprinzips mit dem geometrischen Minimumsprinzip wurde schon zur Zeit der Auffindung der methodischen Ausgleichungsrechnung geahnt. Legendre, welcher die Methode der kleinsten Quadrate in einem Anhange zu seinem Werke: „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes," Paris 1805, zuerst öffentlich behandelt hat, findet die Analogie des Ausgleichungsproblems mit den Eigenschaften des Schwerpunktes bemerkenswert, indem er zeigt, daß der nach seiner Methode berechnete Mittelpunkt eines beliebigen Punktsystems mit dessen Schwerpunkt zusammenfällt. Berührungspunkte zwischen der Bestimmung des Minimumspunktes und den Gesetzen der Natur finden sich auch bei Laplace (Théorie analytique des probabilités, Paris 1812) und Gauß (Theoria combinationis, Göttingen 1821); Versuche zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate aus mechanischen Prinzipien hat die Literatur seit Ivorys Vergleich mit dem Hebelgesetze (Tilloch's Philosoph.

Magaz. 1825 und 1826) nicht wenige aufzuweisen; in besonders zutreffender Weise hat Henke in seiner Inaugural-Dissertation: „Über die Methode der kleinsten Quadrate," Dresden 1868 und 1894, die Meinung von der Möglichkeit, daß das Ausgleichungsproblem eine ganz allgemeine Bedeutung für die Auffassung von Naturvorgängen haben könne, mit den Worten zum Ausdrucke gebracht: Die durch äußere Einflüsse bewirkten Veränderungen geschehen stets so, daß die veränderten Zustände denjenigen, aus welchen sie hervorgegangen, immer möglichst nahe liegen — und daß man als mathematischen Ausdruck dieses Prinzips den Fundamentalsatz der Methode der kleinsten Quadrate zu betrachten habe.

Nach den jüngsten Untersuchungen ist man im allgemeinen zu der Behauptung berechtigt, daß die Anwendung des natürlichen Erhaltungsprinzips auf die Ausgleichungsrechnung zu der allgemeinen Theorie der kleinsten Summen führt. Wird nun im besonderen ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht die Summe der von den Ablenkungskräften allein verrichteten Arbeiten, die „Ablenkungsarbeit" zu einem Minimum gemacht, dann ist auch der mathematische Ausdruck dieses Prinzips das Fundamentalgesetz der kleinsten Quadratsummen, und es entspricht das hierbei in Anwendung kommende Rechenverfahren der Gaußschen *Methode der kleinsten Quadrate.* Wird aber die Summe der zur Erlangung des Gleichgewichts notwendigen Arbeiten, die „Deformationsarbeit", auf ein kleinstes Maß gebracht, so erweitert sich das Rechenverfahren zur *Methode der kleinsten Produkte,* wie sie zum ersten Male in der „Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen", Wien 1904, unter dem Titel: „Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme" vom Verfasser ausführlich behandelt worden ist.

Da diese erweiterte Methode durch Einführung entsprechender, von den vorgeschriebenen Gleichgewichtsbedingungen abhängender Gewichtszahlen immer auf die Gaußsche Methode zurückgeführt werden kann, so findet die eine wie die andere — unabhängig von der Wahrscheinlichkeitstheorie — nach der strengen Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme oder allgemein durch das natürliche Erhaltungsprinzip ihre mechanische Begründung.

Zur Massenberechnung im Wegbau.

Von Ludwig Schleiermacher in Aschaffenburg.

Mit Tafel.

Zur Berechnung der Massen bedient man sich im Wegbau der Formel

(1) $$V = \frac{1}{2}(Q_0 + Q_1)\,l,$$

in welcher Q_0, Q_1 die Flächeninhalte des Anfangs- und Endprofils einer Station bedeuten, l aber den Horizontalabstand dieser Profile, die Stationslänge. In der Praxis erweist sich die Formel als hinreichend verlässig. Es soll untersucht werden, wie weit sie genau ist für Wegkörper, welche von ebenen Flächen begrenzt, also Polyeder sind. Dementsprechend wird vorausgesetzt, daß der Weg geradlinig ist und das Gelände eben, aber von beliebigem Längs- und Quergefälle. Den Ausgangspunkt bildet ein gewisses Polyeder, für welches die Formel (1) strenge richtig ist. Es wird sich zeigen, daß sämtliche Wegkörpertypen, die unter den genannten Voraussetzungen möglich sind, hinsichtlich ihrer Gestalt nur wenig von ihm abweichen.

Als rein empirische Formel ist (1) wohl nicht anzusehen. Offenbar entspringt sie der Absicht, den i. A. unregelmäßig gestalteten Wegkörper zu ersetzen durch ein Prisma von gleicher Länge, dem dann das arithmetische Mittel der Grenzprofile näherungsweise und aus Billigkeitsgründen als Basis zuerkannt werden muß. Diese Absicht wird durch die räumliche Vorstellung gerechtfertigt, solange ein Wegkörper vorliegt, der nur aus Auftrag, oder nur aus Abtrag besteht. In andern Fällen versagt die Vorstellung. Nehmen wir einmal das Extrem: einen Wegabschnitt[1]), bei welchem das Anfangsprofil nur Auftrag, das Endprofil nur Abtrag aufweist; wie will man sich zwischen diesen Profilen ein Prisma von gleicher Länge denken, welches den Wegkörper annähernd ersetzt? Gleichwohl liefert in diesem Falle die Formel (1) ebenfalls und zwar dann ein brauchbares Ergebnis, wenn man den Inhalt des Abtragsprofils negativ nimmt. Sie ergibt nämlich ungefähr die Masse, welche zur Herstellung des Wegabschnittes anzufahren ist. Man wird hier nicht einwenden, daß die Änderung eines Vorzeichens eine willkürliche Modifikation der Formel sei, und daß durch derlei Willkürlichkeiten für irgend einen gegebenen Fall immer ein „ungefähr richtiges" Ergebnis erpreßt werden könne. Die Änderung

1) Figur 7.

erscheint mit Rücksicht auf den Gegensatz von Auftrag und Abtrag doch mindestens als plausibel; ihre Zulässigkeit aber läßt einen Übergang ahnen vom einfachen Auftragskörper zu solchen Gebilden. Man beachte die unterscheidenden Merkmale beider Gebilde! Ein Körper im gewöhnlichen Sinne ist durch eine geschlossene Fläche als durch seine Oberfläche bestimmt und umschlossen; es gibt ein „innen“ und „außen“; der Begriff Inhalt ist klar. Solche Körper sollen *schlicht* heißen. Hingegen ist ein Raumgebilde, wie es oben gedacht und z. B. in Fig. 7 abgebildet ist, zwar gleichfalls durch eine geschlossene Fläche bestimmt, jedoch nicht von ihr als Oberfläche umschlossen. Denn die Fläche durchsetzt sich selbst in der sogenannten *Übergangslinie*[1]), da wo Auftrag und Abtrag keilförmig in der Oberfläche des natürlichen Geländes zusammenstoßen. Infolgedessen kann man von einem Inneren dieses Gebildes nicht reden. Auch ein solches Gebilde soll Körper, jedoch *zwerch*[2]) genannt werden. Seit Möbius steht fest, daß und wie man einem zwerchen Körper einen Inhalt, ein Volum zuzuerkennen hat. Auf eine allgemeine Entwickelung des Inhaltsbegriffes aller Raumgebilde einzugehen, ist nicht Zweck dieses Aufsatzes. Insoweit aber der Begriff hier hereinspielt, wird er erläutert. Schon im voraus sei bemerkt, daß für den oben geschilderten zwerchen Wegkörper dasjenige, was als sein Volum anzusehen ist, sich genau mit der Größe deckt, die der Praktiker zu ermitteln hat, nämlich dem Überschusse des Auftrages über den Abtrag.

§ 1. Der Klotz.

Ein Sechsflächner mit zwei Paaren paralleler Gegenflächen heiße *Klotz*.

Die beiden Paare paralleler Gegenflächen für sich allein begrenzen einen prismatischen Raum, welcher von jeder anderen Ebene in einem Parallelogramm durchschnitten wird. Insbesondere ist also das Normalprofil des prismatischen Raumes ein Parallelogramm. Daher kann der Klotz auch erklärt werden als ein beliebig (schief) abgeschnittenes vierseitiges Prisma mit einem Parallelogramm als Profil. Als äußerliche Kennzeichen fallen an dem Klotz (Fig. 1) zunächst ins Auge die vier parallelen Prismenkanten AE, BF, CG, DH, in welchen ein Parallelflächenpaar das andere durchschneidet. Ferner bemerkt man die beiden Parallelogramme $ABCD$ und $EFGH$, welche die Endpunkte der Prismenkanten zu Ecken haben. Die übrigen Flächen sind Trapeze.

---

1) Knotenlinie, Doppelkurve.

2) d. h. verwachsen oder durchwachsen. Die Kürze und die im § 2 geschilderte Erzeugung solcher Gebilde möge diese Benennung rechtfertigen.

Ein Prismatoid, d. h. ein Polyeder, dessen Ecken auf zwei parallele Grundflächen verteilt sind, ist der Klotz in doppelter Hinsicht, je nachdem man nämlich zu Grundflächen das eine oder andere Parallelflächenpaar wählt.

Bezeichnet man mit Q_0, Q_1 die Inhalte eines Parallelflächenpaares, mit l ihren Abstand, so ist das Volum V des Klotzes

$$V = \tfrac{1}{2}(Q_0 + Q_1)\,l. \tag{1}$$

Man beweist dies zunächst für den schlichten Körper, *Typus* 𝔎 (Fig. 1), wie folgt.[1]) Grundflächen seien $BFGC$ und $AEHD$. Durch den Mittelpunkt O einer Seitenkante AB führe man zu den Grundflächen die Parallelebene, welche die übrigen Seitenkanten DC, HG, EF in den Punkten P, R, S hälftet. Sodann führe man parallel zu den Seitenkanten EF, HG durch OP die Ebene, welche die Prismenkanten des Klotzes AE, BF, CG, DH in den Punkten X, Y, Z, U schneidet. Dann kann der Klotz aus Prismen additiv so zusammengesetzt werden[2]):

$$\text{Klotz}\ \frac{BFGC}{AEHD} = \text{Prisma}\ \frac{YFGZ}{XEHU} - \frac{OBY}{PCZ} + \frac{OAX}{PDU}.$$

Die beiden letzten Prismen sind aber volumgleich und heben sich weg. Folglich ist das Volum V des Klotzes gleich dem des ersten Prismas, welches mit ihm die Höhe l (Abstand des Grundflächenpaares) und den

1) Den folgenden Beweis, sowie die Beschreibung des schlichten Klotzes, als eines „Obelisken, in welchem außer den Grundflächen zwei weitere Grenzflächen einander parallel sind", findet man bei Heis und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie (2. Teil, Stereometrie). Er dient dort zur Herleitung der Volumformel des allgemeinen Obelisken (Koppeschen Satzes) auf Grund einer Zerlegung, die noch einfacher ist als die bekannte Steinersche. Schon um deswillen ist der Körper für die Stereometrie wichtig und verdient einen besonderen Namen. Wir haben den Namen Klotz gewählt, weil er kurz ist und weil solche Körper entstehen, wenn der Zimmermann einen Balken zersägt, etwa um Schifter herzustellen. Man begegnet übrigens dem Klotze in seinen vielfältigen Formen häufig genug.

2) Der Bezeichnung der Polyeder liegt hier und ferner folgende Vorstellung zugrunde. Man denke sich das Polyeder zwischen zwei Ebenen eingespannt, ein Prismatoid z. B. zwischen die Ebenen der Grundflächen. Nun bewege sich eine dritte Ebene aus der Lage der ersten in die der zweiten, indem sie den Körper immer schneidet. Es sollen dann

1. Ecken, welche derselben Lage der beweglichen Ebene angehören, auf dieselbe Zeile,
2. Ecken, die auf einer Kante liegen, welche von der 1. Ebene bis zur 2. Ebene reicht (Seitenkante) untereinander gesetzt werden.

Im Texte gestatten wir uns statt der Untereinanderstellung die Nebeneinanderstellung mit Trennung durch ein Komma.

Mittelschnitt $OPRS$ gemein hat. Wir bezeichnen den Inhalt des Mittelschnittes mit $Q_{\frac{1}{2}}$ und haben:

$$V = Q_{\frac{1}{2}} l. \tag{2}$$

Nun gilt aber für die Grundflächen des Klotzes und dieses Prismas:

$$BFGC + AEHD = \begin{matrix} YFGZ - YBCZ \\ XEHU + AXUD \end{matrix} = \begin{matrix} YFGZ \\ + XEHU \end{matrix} = 2 \times OSRP$$

oder:

$$Q_0 + Q_1 = 2 Q_{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

womit die Übereinstimmung von (1) und (2) erwiesen ist:

Das Volum des Klotzes ist Höhe mal Mittelschnitt, oder Höhe mal dem arithmetischen Mittel der Grundflächen.

Dasselbe Ergebnis liefert auf Grund von (3) auch die bekannte Simpsonsche Formel:

$$V = \tfrac{1}{6}\left(Q_0 + Q_1 + 4 Q_{\frac{1}{2}}\right) l, \tag{S}$$

welche für jedes Prismatoid gilt.

§ 2. Gestaltsänderungen.

Irgend eine Ebene, welche die Prismenkanten schneidet, zerlegt den Klotz in zwei Körper derselben Art. Insbesondere trennt (Fig. 2) die Ebene $GHE'F'$ von dem Klotze das gleichhohe dreiseitige Prisma über der Grundfläche $F'FG$ ab, das als Klotz angesehen werden kann, in welchem die durch G und H laufenden Prismenkanten unendlich klein sind. Wir bezeichnen das Volum des Prismas mit V^*. Es erscheint dann der übrigbleibende Klotz — er heiße *Restkörper* — als Differenz von zwei gleichhohen schlichten Klötzen, nämlich

$$\begin{matrix} BF'GC \\ AE'HD \end{matrix} = \begin{matrix} BFGC \\ AEHD \end{matrix} - \begin{matrix} F'FG \\ E'EH \end{matrix} \tag{4}$$

oder, wenn V' das Volum des Restkörpers

$$V' = V - V^*. \tag{4a}$$

Grundflächen und Mittelschnitt des Restkörpers sind gleichfalls Differenzen, z. B.

$$BF'GC = BFGC - F'FG \tag{5}$$

oder, wenn wir mit Δ den Inhalt des Dreiecks $F'FG$ bezeichnen und die Inhalte der Grundflächen und des Mittelschnittes des Restkörpers mit Q_0', Q_1', $Q_{\frac{1}{2}}'$:

$$Q_0' = Q_0 - \Delta, \quad Q_1' = Q_1 - \Delta, \quad Q_{\frac{1}{2}}' = Q_1 - \Delta \tag{5a}$$

und deswegen gelten für den Restkörper auch die Beziehungen (2) und (3) in der Form:

$$(6) \qquad V' = Q'_{\frac{1}{2}} l, \quad Q'_0 + Q'_1 = 2 Q'_{\frac{1}{2}}.$$

Dreht man jetzt die Ebene $GHE'F'$ um GH, so bleiben für alle ihre Lagen die vorstehenden Gleichungen (4), (4a), (5), (5a), (6) in Geltung: zunächst solange wie in Fig. 2 der Punkt F' zwischen F und B, S' zwischen S und O, E' zwischen E und A verharrt, aber auch dann noch, wenn diese Punkte einer nach dem andern das betreffende Intervall überschreiten, wie in Fig. 3 und 4 — sofern man nur die Inhalte der Grundflächen, des Mittelschnittes und des Restkörpers, welche dabei teilweise oder sämtlich zwerche Gestalt annehmen, im Anhalte an die Gleichungen (4), (4a), (5), (5a) erklärt.

Demzufolge hat man in Fig. 3 mit Rücksicht auf (5) als Inhalt des zwerchen Trapezes $BF'GC$ anzusehen die Differenz der Dreiecke GCL und $LF'B$, da bei dieser Lage von F' Minuend und Subtrahend in (5) den Flächenteil $BFGL$ gemein haben, der also von beiden abgezogen werden darf.

Der Restkörper in Fig. 3 hat eine Übergangslinie IL erhalten, längs welcher sich seine Oberfläche durchsetzt, ist aber gleichwohl im Sinne der Erklärung des § 1 ein Klotz geblieben. Wir bezeichnen diese Gestalt des zwerchen Klotzes fernerhin als *Typus* $\mathfrak{K}'$. Sein Volum V' muß im Anhalte an (4) erklärt werden als Differenz der beiden schlichten Körper, welche längs IL zusammenstoßen, nämlich[1])

$$\begin{matrix}BF'GC\\AE'HD\end{matrix} = J\,{}^{\qquad LGC}_{AE'\;\;HD} - \begin{matrix}BF'L\\J\end{matrix},$$

welche übrig bleiben, nachdem Minuend und Subtrahend in (4) befreit sind von dem ihnen gemeinsamen schlichten Körperteil

$$J\,{}^{LGFB}_{\quad HE\;\;E'}.$$

Rückt bei weiterer Drehung der Ebene $GHE'F'$ auch E' über A hinaus, wie in Fig. 4, so werden beide Grundflächen und der Mittelschnitt des Restkörpers zwerche Trapeze, deren Inhalte wie oben zu verstehen sind.

Der Restkörper (Fig. 4) verliert dabei nicht die definierenden Eigenschaften eines Klotzes; doch ist seine Gestalt, die wir als *Typus* $\mathfrak{K}''$ des zwerchen Klotzes bezeichnen, wesentlich verschieden von der des Typus $\mathfrak{K}'$. Er wird gebildet von den beiden dreiseitigen Pyramiden,

1) In der Figurentafel sind positive und negative Teile zwercher Körper durch rote und gelbe Farbe unterschieden.

welche in der Übergangslinie NL zusammenhängen, und sein Volum ist ihrer Differenz gleichzusetzen, da die Gleichung (4) nach Beseitigung des dem Minuenden und Subtrahenden gemeinsamen Körperteiles

$$\begin{matrix} LGFB \\ NHEA \end{matrix}$$

(eines schlichten Klotzes) die Form annimmt:

$$\frac{BF'GC}{AE'HD} = \frac{LGC}{NHD} - \frac{BLF'}{ANE'}.$$

Als unterscheidende Merkmale der drei Typen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$ heben wir hervor:

bei $\mathfrak{K}$ besteht jedes Paar paralleler Gegenflächen (Prismenflächen) aus schlichten Trapezen,

bei $\mathfrak{K}'$ ist von jedem Paare eine Fläche ein schlichtes, die andere ein zwerches Trapez,

bei $\mathfrak{K}'$ besteht ein Paar aus schlichten, das andere aus zwerchen Trapezen.

Man beachte, daß in diesem Paragraphen der Typus $\mathfrak{K}''$ auf dem Paare der zwerchen Trapeze als Grundflächen aufgestellt ist.[1])

§ 3. Fortsetzung.

Bei den vorstehend geschilderten Gestaltsänderungen des Klotzes wurde die Ebene $EFGH$ um die Seitenkante GH gedreht und dies hatte zur Folge, daß gleichzeitig beide Grundflächen ihre Gestalt veränderten. Man kann aber die Ebene auch um eine Grundkante, z. B. um HE drehen, dann bleibt die zugehörige Grundfläche, hier $AEHD$, ungeändert. Sei nun $HEF'G'$ (Fig. 2) eine Lage der sich drehenden Ebene, so zerlegt auch sie den schlichten Klotz $\mathfrak{K}$, von dem wir wiederum ausgehen, in zwei Klötze. Davon ist einer eine dreiseitige Pyramide, nämlich derjenige, dessen durch E und H laufende Prismenkanten null sind: sein Volum sei V_0. Der andere heiße Restkörper; sein Volum sei V'. Es ist:

$$\frac{BF'G'C}{AEHD} = \frac{BFGC}{AEHD} - \frac{F'FGC}{EEHH} \tag{7}$$

oder

$$V' = V - V_0.$$

Sei Π der Inhalt des Parallelogramms $F'FGG'$, so ist $\frac{1}{2}\Pi$ der Inhalt des Parallelogramms $S''SRR'$. Bezeichnet man ferner die Inhalte der

1) Über einem zwerchen Trapeze als Grundfläche läßt sich selbstverständlich auch ein Prisma errichten. Man kann also die oben geschilderte Veränderung des Inhaltes auch am Prisma studieren.

Grundflächen und des Mittelschnittes des Restkörpers mit Q_0', Q_1', $Q_{\frac{1}{2}}'$, so ist:

$$(8)\qquad \begin{aligned} Q_0' &= BF'G'C = BFGC - F'FGG' = Q_0 - \Pi \\ Q_{\frac{1}{2}}' &= OS''R'P = OSRP - S''SRR' = Q_{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\Pi \\ Q_1' &= Q_1, \quad V_0 = \tfrac{1}{2}\Pi l, \end{aligned}$$

somit

$$(9)\qquad V' = Q_{\frac{1}{2}}' l, \quad Q_0' + Q_1' = 2\,Q_{\frac{1}{2}}'.$$

Diesen Gleichungen erteilen wir nun wieder dauernde Gültigkeit für jede Lage der sich drehenden Ebene, so für Fig. 5 wie für Fig. 6, welche, wie man leicht sieht, wiederum den Typus $\mathfrak{K}'$ bezw. $\mathfrak{K}''$ darstellen. Im Gegensatze zu § 2 und Fig. 4 hat jedoch $\mathfrak{K}''$ hier das schlichte Parallelflächenpaar zu Grundflächen.

Man erkennt im Anhalte an (7), daß die Volume dieser Körper genau wie oben bei Fig. 3 und 4 zu erklären sind. Dasselbe gilt mit Rücksicht auf (8) auch für ihre Grundflächen und den Mittelschnitt. Besondere Beachtung aber verdient dabei, daß in Fig. 6 die Grundfläche $BF'G'C$ (vergl. 8), als Differenz, deren Subtrahend den Minuenden gerade um diese Fläche übertrifft, einen negativen Inhalt Q_0 gewinnt.[1]) Bei weiterer Drehung der Ebene kann auch der Mittelschnitt und somit das Volum V' negativ werden.

Hiermit ist jetzt dargetan, daß die Volumformel (1) und (2) § 1 für alle drei Typen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$ gilt[2]), und was darin in jedem einzelnen dieser drei Fälle V, Q_0, Q_1, $Q_{\frac{1}{2}}$ bedeuten.

Über den Klotz noch folgende Bemerkungen: er ist offenbar das stereometrische Analogon des Trapezes und kann (wie dieses dem Parallelogramm) dem Parallelepiped, als ein Stück von ihm, angereiht werden. Irgend ein Parallelschnitt zu den Grundflächen, dessen Abstand von Q_0 sich zur Höhe l verhält wie $\xi : 1$, hat den Inhalt $Q_0 + (Q_1 - Q_0)\,\xi$.

1) Man beachte, daß der negative Charakter der Fläche sich verrät in dem Sinne des Umlaufs, welcher der konsequent beibehaltenen Bezeichnung $BFGC$ (Fig. 1), $BF'G'C$ (Fig. 2, 5, 6) folgt. Wenn nämlich auf der wagrecht gedachten Grundfläche eine Person in Fig. 1 den Weg $BFGCB$ zurücklegt, bleibt ihr die umlaufene Fläche zur Rechten. Dagegen bleibt ihr in Fig. 6 die umlaufene Grundfläche $BF'G'C$ zur Linken. Den Übergang bildet Fig. 5: hier bleibt auf dem Wege $BF'G'CB$ die Fläche $BF'L$ zur Linken, $LG'C$ zur Rechten des Umlaufenden. Es entspricht dies der Tatsache, daß als Inhalt des zwerchen Trapezes $BF'G'C$ die Differenz $LG'C - BF'L$ wegen (8) zu betrachten ist.

2) Sie gilt auch für die Zwischenformen dieser Typen, auf welche hier ebensowenig eingegangen werden soll, wie auf andere Spezialisierungen des Klotzes.

Da der Klotz zwei Mittelschnitte und zugehörige Höhen besitzt, besteht zwischen diesen vier Größen eine Gleichung. Sie sagt nichts anderes aus, als daß das Profil, ein Parallelogramm, zweierlei Grundlinie nebst Höhe hat. Dies ergibt sich, wenn man durch einen Punkt der Schnittlinie beider Mittelschnitte, der sogenannten Schwerachse, den Profilschnitt führt. Man findet dabei, daß das Volum des Klotzes auch gleich dem Produkte aus Schwerachse und Profil ist, wie es der schöne Satz von Meier-Hirsch für alle schiefabgeschnittenen Prismen fordert.

Der Klotz ist übrigens nicht das allgemeinste vierseitige Prismatoid, dessen Volum durch (1) gegeben ist. Dieses hat folgende Eigenschaft: Legt man durch einen Punkt auf einer der Grundflächen zu jedem Paare gegenüberstehender Seitenkanten die Parallelebene, so schneiden diese die Grundfläche in derselben Geraden.

§ 4. Wegkörperformen.

Auf dem ebenen Gelände $ABTCDS$ (Fig. 7) von beliebigem Längs- und Quergefälle werde ein geradliniger Weg mit wagrechter Krone (Kronenbreite $EF = HG = w$) erbaut zwischen dem senkrechten Anfangsprofil $ABFE$ (Auftrag) und dem Endprofil $DCGH$ (Abtrag). Das Böschungsverhältnis sei sowohl zu beiden Seiten, wie auch für Auf- und Abtrag das nämliche und gleich β.[1]) Die Geländeebene $ABCD$ durchsetzt die Wegfläche $EFGH$ längs der Übergangslinie ST. Irgend ein Zwischenprofil, welches ST nicht trifft, zeigt nur Auftrag oder nur Abtrag; trifft es aber ST, so entsteht ein zwerches Viereck, in welchem gleichzeitig Auf- und Abtrag vorhanden ist. Durch Einschaltung von mehr Zwischenprofilen kann man Stationen abgrenzen, für welche die zugehörigen Wegkörper einen der folgenden vier Typen aufweisen, welche bezw. dargestellt sind in Fig. 8, 9, 10, 7:

I. Beide Grenzprofile sind gleichzeitig Auftrag oder Abtrag,

II. Ein Grenzprofil hat nur Auftrag (oder Abtrag), das andere ist gemischt,

III. Beide Grenzprofile sind gemischt aus Auftrag und Abtrag,

IV. Ein Grenzprofil hat nur Auftrag, das andere nur Abtrag.

Es mögen diese Typen in ihrer Reihenfolge einzeln betrachtet und ihr Volum berechnet werden. Der Abstand der Grenzprofile, die Stationslänge, sei durchgehends mit l bezeichnet.

---

1) Dies trifft in der Praxis nicht immer zu. Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß die vorstehenden Annahmen auch die Gräben längs der Abtragsböschungen nicht berücksichtigen.

Wegkörper I.

Legt man in Fig. 8, welche einen Auftragkörper vom Typus I darstellt, durch C zur Böschungsebene $AEHD$ die Parallelebene CLM und erweitert beide Böschungsebenen bis zur Schnittkante JK, so kann der Wegkörper wie folgt zusammengesetzt werden:

$$\frac{DCGH}{ABFE} = \text{Klotz}\,\frac{DCCK}{AMLJ} - \text{Prisma}\,\frac{HGK}{EFJ} + \text{Pyram.}\,\frac{C}{MBL}.$$

Die rechts stehenden Prismatoide haben für die angeschriebenen Grundflächen alle dieselbe Höhe l. Bezeichnet man die absoluten Werte der Inhalte der vorgenannten Grundflächen des Wegkörpers bezw. mit $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_0$, des Prismas mit $\varDelta$, der Pyramide mit δ[1]), so ergibt sich für das Volum V des Wegkörpers:

$$V = \tfrac{1}{2}[\mathfrak{O}_0 + \varDelta - \delta) + (\mathfrak{O}_1 + \varDelta)]\,l - \varDelta l + \tfrac{1}{3}\delta l$$

oder:

$$\text{(I)} \qquad V = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{O}_0 + \mathfrak{O}_1)\,l - \tfrac{1}{6}\delta l.$$

Man vernachlässigt also bei Anwendung der herkömmlichen Formel den Betrag $\frac{1}{6}\delta l$, d. h. *die Hälfte der obengenannten Pyramide.* Um $\mathfrak{O}_0$, $\mathfrak{O}_1$, V durch die Abmessungen der Profile auszudrücken, projiziere man die Punkte A, B, C, D in die betreffende Krone nach A', B', C', D' und bezeichne:

$$AA' = a, \quad BB' = b, \quad CC' = c, \quad DD' = d, \quad EF = HG = w,$$

so ist unter Benutzung des Böschungsverhältnisses β:

$$A'E = \beta a, \quad B'F = \beta b, \quad C'G = \beta c, \quad D'H = \beta d.$$

Durch Zerlegung des Profiles $ABFE$ in die Differenz des Trapezes $ABB'A'$ und des Dreieckspaares AEA', $BB'F$ findet man seinen Inhalt:

$$\text{(10)} \quad \mathfrak{O}_0 = \tfrac{1}{2}(a+b)(\beta a + w + \beta b) - \tfrac{1}{2}\beta aa - \tfrac{1}{2}\beta bb = \tfrac{1}{2}w(a+b) + \beta ab.$$

Um $\mathfrak{O}_1$ zu bilden, hat man hierin a und b bezw. durch d und c zu ersetzen:

$$\text{(11)} \qquad \mathfrak{O}_1 = \tfrac{1}{2}w(d+c) + \beta dc.$$

Planimetrische Konstruktionen zur Berechnung von δ vermeidend betrachte man den Wegkörper als Prismatoid mit den Grundflächen $\mathfrak{O}_0$, $\mathfrak{O}_1$ und der Höhe l und bestimme seinen Inhalt nach der bekannten Simpsonschen Formel (§ 1, (S))

$$V = \tfrac{1}{6}\left(\mathfrak{O}_0 + \mathfrak{O}_1 + 4\mathfrak{O}_{\frac{1}{2}}\right)l,$$

---

1) Den Mittelschnitt der Pyramide, also den 4. Teil von δ nennt Koppe „Ergänzungsfigur".

in welcher $\mathfrak{Q}_{\frac{1}{2}}$ den Inhalt des Mittelschnittes bedeutet, der sich, wie man leicht sieht, aus $\mathfrak{Q}_0$ ergibt, wenn man darin a durch $n=\frac{1}{2}(a+d)$ und b durch $p=\frac{1}{2}(b+c)$ ersetzt, also:

$$\mathfrak{Q}_{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}w(n+p)+\beta np,$$

so ist:

$$\mathfrak{Q}_0+\mathfrak{Q}_1-2\mathfrak{Q}_{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}\beta(a-d)(b-c) \text{ oder } 4\mathfrak{Q}_{\frac{1}{2}}=2(\mathfrak{Q}_0+\mathfrak{Q}_1)-\beta(a-d)(b-c),$$

mithin, wenn man diesen Wert in die Simpsonsche Formel bringt:

$$\text{(Ia)} \qquad V=\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}_0+\mathfrak{Q}_1)l-\tfrac{1}{6}\beta(a-d)(b-c)l.$$

Durch Vergleichung dieses Ergebnisses[1]) mit (I) erkennt man, daß $\delta=\beta(a-d)(b-c)$ ist, was sich auch direkt bewahrheiten läßt.

Zwischen a, b, c, d, w, β besteht übrigens eine Gleichung, die man erhält, indem man das Quergefälle des Geländes in jedem der beiden Grenzprofile bildet und die beiden Werte gleichsetzt, nämlich:

$$(b-a):[a\beta+w+b\beta]=(c-d):[d\beta+w+c\beta]$$

oder:

$$\text{(12)} \qquad w(b-a-c+d)=2\beta(ac-bd).$$

Wegkörper II.

Fig. 9 gibt das Bild eines *Auftrag*körpers vom Typus II.[2])

Die linkseitige Abtragböschungsebene DHS ist zur rechtseitigen Auftragböschungsebene $GCBF$ parallel. Erweitert man die erstere, so trennt sie vom Auftrage die Pyramide S, AKE ab, und es bleibt ein zwercher Klotz, Typus $\mathfrak{K}'$, übrig mit den Prismenkanten KE, BF, CG, DH, d. h. man hat folgende Zerlegung des Wegkörpers:

$$S\,\frac{ABFE}{D\;\;CGH}=\frac{KBFE}{DCGH}+\frac{S}{AKE}.$$

1) E. von Dambrowski, Inhaltsberechnung bei Erdbauten, Teubner 1876, gibt diese Formel für den speziellen Fall, wo das Gelände kein Quergefälle besitzt. Auf die Zerlegung dieses Typs in Prisma und Keil weist neuerdings Herr Chr. Nielsen hin in den Unterrichtsblättern für Math. u. Nat. 1903, IX Nr. 6. Ferner erschienen nach Druck vorliegender Arbeit zwei Aufsätze, deren Verfasser sich mit Ausdehnung des Koppeschen Satzes auf Prismatoide mit windschiefen Seiten befassen und solche zu Erdmassenermittelung benützen, nämlich Herr Ch. A. Vogler, Zeitschr. f. Vermessungswesen, Bd. XXXIV, S. 169 und Herr Ingenieur Puller, Zentralbl. d Bauverwaltung, Jahrg. XXV, S. 207. Solche Körper behandelt Herr Lucke unter dem Namen Zentralkörper (Leitf. der Stereometrie. Teubner 1890).

2) Das Gegenstück hierzu, einen Wegkörper II mit überwiegendem Abtrag, würde in Fig. 7 ein Querprofil, welches ST schneidet, zusammen mit dem Endprofil $DCGH$ begrenzen.

Wird der Überschuß des Auftrages über den Abtrag für die Station mit V bezeichnet, der absolute Inhalt des Auftragprofiles $ABFE$ mit $\mathfrak{D}_0$, des Dreiecks AKE mit δ, des zwerchen Trapezes $DCGH$, d. h. der Überschuß des Dreiecks TCG über THD, mit $\mathfrak{D}_1$, ferner die Höhe der Pyramide mit x, so ist

$$V = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{D}_0 - \delta) + \mathfrak{D}_1] l + \tfrac{1}{3}\delta x$$

oder:

(II) $$V = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_1) l + \delta\left(\tfrac{1}{2} l - \tfrac{1}{3} x\right).$$

Bei Anwendung der Erfahrungsformel (I) vernachlässigt man also den Unterschied zwischen der Hälfte eines Prismas von der Höhe l und der Pyramide von der Höhe x, beide über derselben Grundfläche δ.

Es soll die Formel (II) in den Abmessungen des Wegkörpers ausgedrückt werden. Wenn man wie oben die Punkte A, B, C, D, K in die Kronen projiziert und

$$AA' = a, \qquad BB' = b, \qquad CC' = c, \qquad DD' = d, \qquad KK' = k$$

setzt, so ist wieder (vergl. 10)

(10) $$\mathfrak{D}_0 = \frac{w}{2}(a + b) + \beta a b.$$

Zieht man durch D, K in den Profilen die Horizontalen DD^*, KK^*, welche CC', CG, BB' in D^*, G^*, C^* schneiden, so ist

$$\mathfrak{D}_1 = TCG - THD = DCG^* - DHGG^* = \tfrac{1}{2} w(c + d) - wd$$

oder

(13) $$\mathfrak{D}_1 = \frac{w}{2}(c - d).$$

Der Wert von δ ergibt sich aus dem Werte von $\mathfrak{D}_0$, wenn man $w = 0$ und k an Stelle von b schreibt, was man geometrisch durch Parallelverschiebung von BF in die Lage von KE erläutern kann. Also ist

(14) $$\delta = \beta a k.$$

Da $KB \perp\!\!\!\perp DC$, ist $KBK^* \cong DCD^*$, also $BK^* = CD^*$ oder $b - k = c + d$, also

$$k = b - c - d, \quad k + d = b - c.$$

Faßt man den Punkt S als Teilpunkt der Strecke EH ins Auge und denkt sich durch ihn die Stationslänge geführt, so findet man — und weiterhin mittels ähnlicher Dreiecke:

$$\frac{x}{l - x} = \frac{SE}{SH} = \frac{EK}{HD} = \frac{KK'}{DD'} = \frac{k}{d},$$

woraus

$$x = l \frac{k}{k + d}.$$

Hiermit erhält man schließlich

(IIa) $$V = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_1)l - \tfrac{1}{6}\beta l a \frac{(b-d-c)(b-c+2d)}{b-c}.$$

Wie bei Wegkörper I besteht auch hier zwischen a, b, c, d, w, β eine Gleichung, die *Quergefällrelation*, die man wie dort findet. Sie lautet hier:

(15) $$w(b-a-c-d) = 2\beta a(c+d).$$

Wegkörper III.

Der Wegkörper III (Fig. 10) ist ein zwercher Klotz, Typus $\mathfrak{K}''$, mit den Prismenkanten AE, BF, CG, DH. Zwei Gegenflächen, nämlich die Böschungsebenen, sind schlichte Trapeze; die beiden anderen, nämlich die Grenzprofile, sind zwerche Trapeze. Als Parallelogrammflächen treten die Wegfläche und die Geländefläche hervor.

Wir berechnen, wie bei (II), die für die Station erforderliche Masse, den Überschuß V des Auftrages über den Abtrag. Wie im § 2 gezeigt wurde, ist V nichts anderes als das Volum des zwerchen Klotzes. Bezeichnet man also die Inhalte der zwerchen Trapeze $ABFE$, $DCGH$ bezw. mit $\mathfrak{Q}_0$ und $\mathfrak{Q}_1$ und nimmt hierbei den Auftrag positiv, den Abtrag also negativ, so ist:

(III) $$V = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_1)l.$$

Die Erfahrungsformel ist für den Wegkörper III in aller Strenge genau. Das Endprofil von II stimmt in der Form überein mit den Grenzprofilen von III, also ist bei analoger Bezeichnung (vergl. 13)

$$\mathfrak{Q}_0 = \tfrac{1}{2}w(b-a), \quad \mathfrak{Q}_1 = \tfrac{1}{2}w(c-d).$$

Um die Quergefällrelation zu bilden, ziehe man in den Grenzprofilen die Horizontalen AJ und DK. Die Ebene $AJKD$ wird dann von den Böschungsebenen in den parallelen Kanten AD, JK geschnitten, die Geländeebene in den parallelen Kanten AD, BC. Der Körper

$$\begin{matrix} ABJ \\ DCK \end{matrix}$$

ist also ein Prisma und die Höhen in den Grundflächen sind gleich, d. h.

(16) $$a + b = c + d.$$

Dies ist die *Quergefällrelation*; sie ist hier von w und β unabhängig. Man kann sie zur Vereinfachung der Volumformel benutzen und findet folgende gleichberechtigte Werte für V:

(IIIa) $$V = \tfrac{1}{2}w(c-a)l = \tfrac{1}{2}w(b-d)l.$$

Es ist hier leicht, diese Formel aufzustellen, ohne die Begriffe des § 2 zu benützen. Man denke sich nämlich den Wegkörper wie folgt hergestellt: zunächst werde auf das Gelände $ABCD$ das obenerwähnte Prisma ABJ, DCK aufgetragen, sodann von dem hierdurch umgeformten (unebenen) Gelände der schlichte Klotz

$$\begin{matrix} AEFJ \\ DHGK \end{matrix}$$

abgetragen. Der Unterschied zwischen Prisma und Klotz ist dann die erforderliche (anzufahrende) Masse, oben mit V bezeichnet. Die Grundfläche des Prismas hat den Inhalt $\frac{1}{2}w(a+b) = \frac{1}{2}w(c+d)$, die Grundflächen des Klotzes bezw. wa, wd; die Höhen beider Körper sind gleich l, folglich ist:

$$V = \tfrac{1}{2}w(a+b)l - \tfrac{1}{2}[wa + wd]l = \tfrac{1}{2}w(b-d)l.$$

Wegkörper IV.

Erweitert man in Fig. 7 die linkseitige Abtragböschungsebene DHS bis zum Schnitte EK_0 mit dem Anfangsprofil, bringt ebenso die zu ihr parallele Auftragböschungsebene BFT in GK_1 zum Schnitte mit dem Endprofil, so zerlegen diese Böschungsebenen den Wegkörper in einen zwerchen Klotz, Typus $\mathfrak{K}''$, mit den Prismenkanten K_0E, BF, K_1G, DH, außerdem in die Pyramiden S, AK_0E und T, K_1GC.

Sei $\mathfrak{O}_0$ der absolute Inhalt des Anfangsprofiles $ABFE$, $\mathfrak{O}_1$ des Endprofils $DHGC$, δ_0 und δ_1 bezw. der Pyramidenbasis AK_0E und K_1GC, sei ferner x_0 und x_1 bezw. die zugehörige Pyramidenhöhe, so sind $\mathfrak{O}_0 - \delta_0$, $\mathfrak{O}_1 - \delta_1$ die absoluten Inhalte des schlichten Parallelflächenpaares genannten Klotzes, das wir als Grundflächenpaar wählen. Nach § 3 ist das Volum des Klotzes dann gleich dem halben Produkt aus der Differenz der absoluten Inhalte dieser Grundflächen in die Höhe l, wobei als Minuend die Auftragsgrundfläche zu nehmen ist, wenn das Volum als Überschuß des Auftrages über den Abtrag berechnet werden soll. Für den ganzen Wegkörper soll dieser Überschuß wieder mit V bezeichnet werden, dann ist:

$$V = \tfrac{1}{2}[(\mathfrak{O}_0 - \delta_0) - (\mathfrak{O}_1 - \delta_1)]l + \tfrac{1}{3}\delta_0 x_0 - \tfrac{1}{3}\delta_1 x_1$$

oder

$$\text{(IV)} \qquad V = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{O}_0 - \mathfrak{O}_1)l + \tfrac{1}{2}(\delta_1 - \delta_0)l + \tfrac{1}{3}\delta_0 x_0 - \tfrac{1}{3}\delta_1 x_1.$$

die genaue Massenformel, welche mit der Erfahrungsformel $\frac{1}{2}(\mathfrak{O}_0 - \mathfrak{O}_1)l$ zu vergleichen ist.

Projiziert man die Punkte A, B, C, D, K_0, K_1 bezw. nach $A', B', C', D', K_0', K_1'$ in die betreffende Krone und setzt:

$$AA' = a, \quad BB' = b, \quad CC' = c, \quad DD' = d, \quad K_0K_0' = k_0, \quad K_1K_1' = k_1,$$

on:

btrag-
te ge-
iegel-

samen

wenn
wird.
r, die

Lage
indet;

$+ a^2)]$
'aktor

Kleinere Mitteilungen.

Anfrage.

P. S., H. Wo findet man *Tafeln* des *Integrallogarithmus?* Ist Soldners Tafel, München 1809, brauchbar? In der Enzyklopädie der mathem. Wiss., Bd. II, S. 175, heißt es: „Tafeln sind von Bessel und Gauß berechnet worden.“ Wo stehen diese Tafeln? In Gauß' Werken, II, S. 438—443, finden sich nur einzelne Werte.

Bücherschau.

Schüßler, R., Orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Mit 29 Figurentafeln in besonderem Hefte. 8^0, VII u. 170 S. Leipzig 1905, B. G. Teubner. Preis geb. M. 7.

Das seltene Erscheinen von Lehrbüchern der darstellenden Geometrie, die von den ausgetretenen und schon etwas langweilig gewordenen Mongeschen Pfaden nach irgend einer Richtung abweichen, rechtfertigt wohl den Ausdruck, daß ich das vorliegende eigenartige Büchlein freudig begrüße. Sein Grundgedanke, sämtliche Konstruktionen im axonometrischen Bilde ohne Zurückgehen auf eine zweite orthogonale Projektion durchzuführen, sowie die Angabe von Wegen, auf denen man zu diesem Ziele gelangen kann, stammen freilich von C. Pelz. Dem Verfasser gebührt jedoch das Verdienst, die einfachen Lösungen, zu denen Pelz in seinen Abhandlungen gelangt ist, einmal so dargestellt zu haben, daß jeder ohne besondere Vorkenntnisse aus der darstellenden oder projektiven Geometrie sich mit ihnen bekannt machen kann, ferner ihre Anwendung auf die verschiedensten Aufgaben, insbesondere der Schattenkonstruktion, gezeigt zu haben. Daß der Verfasser mit Liebe und Sorgfalt an diesem Werkchen gearbeitet hat, ersieht man aus jeder Seite; es soll ja auch wohl, mehr als es der Schluß der Vorrede betont, einem Lieblingsgedanken zur Verwirklichung verhelfen, nämlich der orthogonalen Axonometrie wegen der Anschaulichkeit ihrer Bilder und Konstruktionen eine bevorzugtere Stellung im darstellend-geometrischen Unterricht zu erringen.

Was den Stoff anbetrifft, so behandelt der Verfasser nach Erklärung der Methoden zum Zeichnen axonometrischer Bilder die Darstellung der Grundgebilde, die Aufgaben über ihre Lagenbeziehungen und als Anwendung die Schattenbestimmung an ebenflächig begrenzten Körpern. Letztere sowohl als das S. 19 u. 20 erwähnte Konstruieren mit Punkten oder Linien, die außerhalb der Zeichenfläche liegen, ist der Beachtung zu empfehlen. Die „Aufgaben der Geometrie des Maßes“, insbesondere die über das Senkrechtstehen von Geraden und Ebenen werden nach C. Pelz durchgeführt, wobei bekanntlich der Satz über die Höhen eines Dreiecks die Hauptrolle spielt. Bei manchen Lösungen dieser Aufgaben sehe ich keinen Vorzug gegenüber der Benutzung einer zweiten orthogonalen Projektion.

Besonders eingehende Behandlung erfahren der Kreis und die Kegelschnitte. Bei der Darstellung der ersteren kommt der Satz zu wiederholter Verwendung, daß das Bild einer zur Kreisebene senkrechten und mit dem Radius gleich langen Strecke der linearen Exzentrizität der Bildellipse gleich ist. Vielleicht hat in diesem und manchem anderen Abschnitt (z. B. Kugel und Halbkugel) die Liebe zur Sache den Verfasser verführt, für eine und dieselbe Aufgabe zu viele Lösungsarten anzugeben, was ich vom pädagogischen Standpunkte aus für bedenklich halte, obgleich den fertigen darstellenden Geometer die wirklich hübschen Konstruktionen sicherlich erfreuen werden. Auch auf manchen der ganz elementaren Beweise von Sätzen sei aufmerksam gemacht; der Beweis des Satzes jedoch, daß jede Zentralprojektion eines Kegelschnittes wieder ein solcher ist, scheint mir noch einer Ergänzung zu bedürfen.

Eine ähnlich liebevolle Behandlung erfahren die Zylinder- und Kegelflächen 2. Grades, ihre ebenen Schnitte und Durchdringungen, die Kugel und die Drehflächen (insbesondere die 2. O.), wobei wieder auf die Schattenkonstruktionen ein Hauptgewicht gelegt wird. Für sehr lehrreich halte ich die auf Tafel 28 gezeichneten und S. 156 u. 157 erläuterten Bilder einer Hohlkehle. Auf S. 153 (zu Fig. 186b) wird versehentlich erwähnt, eine Kurve besitze in einem Wendepunkt eine Unstetigkeit der Krümmung, die Eigenschattengrenze der durch die Kurve (als Meridian) erzeugten Drehfläche daher auf dem zugehörigen Parallelkreis eine Ecke, während sie doch in dem Punkte die Erzeugende des (längs des Parallelkreises) umschriebenen Kegels berührt.

Besonders lobend muß noch der schönen und korrekten Ausführung der 29 beigegebenen Tafeln gedacht werden, die der Verfasser selbst gezeichnet hat.

Betreffs der Bezeichnungsweise sei erwähnt, daß der Verfasser Punkte mit kleinen lateinischen, gerade Linien (aber auch Flächen) mit großen lateinischen, Ebenen mit kleinen griechischen Buchstaben (ε^h, ε^v Spuren von ε) und den Schatten eines Gebildes durch den seinem Buchstaben oben angefügten Zeiger s bezeichnet; die Raumgebilde unterscheidet er von ihren Bildern durch den unten angefügten Zeiger r. Er befindet sich damit in ziemlicher Übereinstimmung mit den von C. Pelz (vgl. Zur klinog. Darst. d. Rotationsflächen, Sitzgsb. Böhm. Ges. Prag 1895, Fußnote 2) gebrauchten Bezeichnungen.

Wien, im Juni 1905. E. Müller.

H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, **Geometrisches Zeichnen.** Neu bearbeitet von Professor J. Vonderlinn, dipl. und staatlich geprüftem Ingenieur in Breslau. Dritte (der Neubearbeitung I.) Auflage. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Sammlung Göschen, Leipzig 1903. Pr. 80 Pf.

Das klar geschriebene, praktisch angelegte und mit guten Figuren ausgestattete Buch gibt ohne Beweis die wichtigsten Konstruktionen für den Kreis, die Kegelschnitte, die bekannteren höheren und transzendenten Kurven, ferner behandelt es die einfachen Bogenformen, geometrische Orna-

mente, Maßstäbe und das Vergrößern und Verkleinern von Figuren. An Stelle der wenig eleganten Hyperbel-Konstruktion auf S. 66 könnte die weit einfachere angeführt werden, die sich aus der Asymptoten-Gleichung $xy = \text{const.}$ ergibt. Zu Seite 96 wäre zu bemerken, daß nach der Auffassung der Mathematiker die Konchoide in jedem Falle durch den Pol hindurchgeht, wenn auch dem isolierten Punkt eine praktische Bedeutung nicht zukommt.

München, März 1905. KARL DOEHLEMANN.

Bemerkung zu der Kritik in Bd. 46, S. 495.

Solange ich noch selbst Erdmessungskommissär war, hielt ich es nicht für passend, auf die Kritik des Herrn Prof. Dr. Börsch über mein (erstes) „astronomisches Nivellement" durch Württemberg, Stuttgart 1901, zu erwidern; nachdem dies seit kurzem nicht mehr der Fall ist, möchte ich mir erlauben, mit einigen Worten auf die Sache zurückzukommen.

1. Herr Prof. Dr. Börsch sagt, die „relativen Lotabweichungen" (in der Richtung des Meridians) gegeneinander „dürften" „etwa mit einem mittleren Fehler von höchstens 0,7″ behaftet sein, der wohl auch noch für eine hinreichend genaue Konstruktion des Geoidprofils . . . genügen wird." Die gemessenen Polhöhen sind aber tatsächlich genauer als Herr Prof. Dr. Börsch angibt; der m. F. einer Polhöhe beträgt nicht $^1/_3$ bis $^1/_2$″, sondern $^1/_5$ bis $^1/_3$″, durchschnittlich sicher nicht über $^1/_4$″. Die Angabe des Herrn Kritikers wird in d. Z. Bd. 47, S. 508 berichtigt; es muß daselbst aber statt „etwa $^1/_4$ bis $^1/_3$ Sekunde" heißen „$^1/_5$ bis $^1/_3$ Sekunde." Dabei ist nicht zu vergessen, daß bei diesem m. F. die periodischen und zufälligen Teilungsfehler des Höhenkreises nicht zuvor eliminiert sind. Da Herr Prof. Dr. Börsch übrigens einen m. F. von im Max. 0,7″ in der (nichtellipsoidischen) relativen Lotkonvergenz zweier benachbarter Punkte noch zulassen will, der Fehler bei mir in der Tat aber wenig über die Hälfte beträgt, so ist auf die Genauigkeit der direkt gemessenen Polhöhen hier nicht weiter einzugehen. Ich meinerseits halte in einem „astronomischen Nivellement" Polhöhen mit $^1/_4$″ m. F. (in dem oben angegebenen Sinn) für ausreichend genau. Wenn mir ein größerer Höhenkreis oder ein Zenitfernrohr zur Verfügung gestanden hätte, hätte ich aber selbstverständlich mein kleines Instrument nicht verwendet, nicht um die Genauigkeit zu erhöhen, sondern um zu sparen an Arbeit und Kosten, obgleich diese geringer sind, als bei allen andern mir in dieser Beziehung bekannt gewordnen ähnlichen Arbeiten; mit 20 Punkten von $\pm$ 0,2″ m. Fehler in der Polhöhe auf einem bestimmten meridionalen Geoidprofil läßt sich mehr leisten, als mit 10 Punkten von $\pm$ 0,1″ m. F. Übrigens wird der Begriff der „hinreichenden Genauigkeit" in der Konstruktion eines Geoidprofils auch heute noch diskutabel sein. Auch auf dem zweiten von mir noch (1902 und 1903) ausgeführten württembergischen Geoid-Meridianprofil, auf etwa $8^1/_2{}^0$ E. Gr., habe ich in den direkten Polhöhen eine größere Genauigkeit als in dem ersten gar nicht angestrebt.

2. tadelt Herr Prof. Dr. Börsch, daß der „Endzweck der ganzen Arbeit" insofern nicht erreicht sei, als die Konstruktion des Groidprofils, obwohl

„sehr einfach“ zu erledigen, nicht ausgeführt sei. Ich hätte mich an die Konstruktion des Profils auch gewagt, wenn sie weniger einfach wäre; aber ich wollte alle vier Profile am Schluß der ganzen Arbeit zusammenstellen, wie ich wohl genügend deutlich mitgeteilt habe und wie auch Herr Prof. Dr. Börsch zitiert, und wobei dann die „wahre“ und die „korrigierte“ Geoidfläche getrennt und in Linien gleicher Erhebung über dem Referenzellipsoid dargestellt werden sollten.

3. Daß ich durch ungenaue Ausdrucksweise Herrn Prof. Dr. Börsch zu der Annahme Veranlassung gegeben habe, ich wollte entweder „ostwestliche“ Lotabweichungskomponenten oder ihren Einfluß auf die Azimutbestimmungen leugnen, bedaure ich. Ich hielt und halte es noch für zweckmäßig, statt mich auf die Bohnenbergersche einzige Azimutmessung zur Orientierung des die geodätischen geographischen Breiten liefernden Triangulierungsnetzes zu stützen, die Lage dieses Netzes dadurch zu bestimmen, daß auf einer nicht zu kleinen Anzahl von Punkten an verschiednen Stellen des Netzes (selbstverständlich nicht nur auf der Linie dieses ersten astronomischen Nivellements, sondern im ganzen Gebiet der Bohnenbergerschen Triangulierung) bei Gelegenheit der direkten Polhöhenmessungen auch direkte Azimutmessungen gemacht werden und daß diese Azimutmessungen mit den „geodätisch übertragnen“ (deren Unsicherheit ich nicht unterschätze) verglichen werden, um zu einem möglichst guten Wert des „Verdrehungswinkels“ β zu kommen. Vom „wirklichen“ Wert dieses Winkels β zu reden (S. 113) ist natürlich nicht statthaft; daß der (statt des Bohnenbergerschen) wirklich anzuwendende oder plausibelste gemeint war, brauche ich wohl nicht nachzutragen. Ich denke mir auf 12—15 schicklich gewählten Stationen unseres Netzes (— vorhanden sind davon bereits: Bussen, Solitude, Katzenbuckel; neuerdings Tübingen, Stuttgart —) Azimute weit entfernter und im Triangulierungsnetz ebenfalls festgelegter Zielpunkte direkt gemessen. Die Abweichungen a zwischen diesen direkt gemessenen Zahlen und den aus den Bohnenbergerschen Landesvermessungskoordinaten der Stand- und Zielpunkte zu berechenden Azimuten, setzen sich aus drei Teilen zusammen: 1. aus dem zu ermittelnden plausibelsten Wert von β (der, wenn auch nicht streng, doch sehr genähert als konstant in den a enthalten ist), der als Gesamtverdrehung des Bohnenbergerschen Koordinatensystems gegen den Meridian des Nullpunkts anzusehen ist; 2. aus den in verschiednen Teilen des Triangulierungsnetzes verschiednen Fehlern des Netzes in sich (gleichsam wechselnde Beträge β' der Verdrehung der einzelnen z. T. bekanntlich sehr schlecht verbundnen Netzstücke gegen einander); 3. aus den Beträgen $\eta \cdot \operatorname{tg} \varphi$, die mit den Lotabweichungskomponenten η senkrecht zum Meridian von Punkt zu Punkt wechseln.

Die mir im württembergischen Netz bis jetzt bekannten Abweichungen a zwischen direkt gemessnen und aus den linearen geodätischen Koordinaten berechneten Azimuten stimmen innerhalb ungefähr $7''$ überein; trotz der Fehler der alten Bohnenbergerschen Horizontalwinkel ein Zeichen dafür, daß auf dem Gebiet, auf dem bis jetzt direkte Azimutbestimmungen gemacht sind, große η nicht vorkommen (wie auch beträchtliche ξ nirgends vorhanden sind). Im ganzen glaube ich schon jetzt als zweckmäßigsten Wert von β die Zahl von etwa $12''$ angeben zu können, die sich aber selbstverständlich noch um mehrere $''$ ändern kann. Ob β um einige $''$ größer oder kleiner

angenommen wird, war für das erste astronomische Nivellement längs dem Meridian des Nullpunkts ganz gleichgültig; eine Veränderung in β um nur 5″ ändert aber für die nordöstlichsten und südöstlichsten Teile Württembergs, die durch das Geoidprofil auf 10° E. Gr. erfaßt werden sollten, die geodätischen geographischen Breiten und damit die (vorläufigen) ξ um mehr als 0,1″.
E. Hammer.

Neue Bücher.[1])

Geodäsie.

1. Doll, M. und Nestle, P., Lehrbuch der praktischen Geometrie. 2. erweiterte u. umgearb. Aufl. Leipzig u. Berlin, Teubner. M. 3.20; geb. M. 3.80.

Darstellende Geometrie.

2. Bernhard, Max, Darstellende Geometrie mit Einschluß der Schattenkonstruktionen u. der Perspektive. Als Leitfaden f. den Unterricht an technischen Lehranstalten, Oberrealschulen u. Realgymnasien, sowie zum Selbststudium hrsg. 2. verb. u. stark verm. Aufl. Stuttgart, Enderlen. geb. in Leinw.
3. Heydeman, W. J., Beginselen der beschrijvende meetkunde. Amsterdam, Ahrend & Zoon. geb. Fl. 5.60.

Logikrechnung.

4. Couturat, Louis, L'algèbre de la logique. (Scientia Nr. 24.) Paris, Gauthier-Villars. cart. Frs. 2.

Mechanik.

5. Alexander, T. and Thomson, A. W., 26 graduated exercises in Graphic Statics. London, Macmillan & Co. 10 s.
6. Appell, P. et Chappuis, J., Leçons de mécanique élémentaire à l'usage des élèves des classes de mathématiques A et B. Conformément aux programmes du 21 mai 1902. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 4.
7. Donadt, A., Lehrbuch der Mechanik in elementarer Darstellung f. technische Mittelschulen u. höhere Lehranstalten, insbes. zum Selbstunterricht m. Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. (5. Aufl. der Einleitung in die Mechanik v. H. B. Lübsen.) Leipzig, Brandstetter. M. 9; geb. M. 9.70.
8. Föppl, Aug., Vorlesungen über technische Mechanik. I. Bd. Einführung in die Mechanik. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. geb. M. 10.
9. Neumann, Ernst Rich., Studien über die Methoden v. C. Neumann u. G Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Gekrönte Preisschrift (Preisschriften der fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig, mathem.-naturw. Sektion Nr. XV.) Leipzig, Teubner. M. 10.
10. Routh, Edward John, The advanced part of a Treatise on dc Dynamics of a system of rigid bodies. Being part 2 of a Treatise on the whole subject. Whith numerous examples. 6th ed., revised and enlarged. London, Macmillan. 14 s.

Physik.

11. Baly, E. C. C., Spectroscopy. London, Longmans. 10 s. 6 d.
12. Bucherer, A. H., Elemente der Vektor-Analysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. geb. M. 2.40.
13. Geitler, Josef Ritter von, Elektromagnetische Schwingungen u. Wellen. („Die Wissenschaft" Heft 6.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 4.50; geb. M. 5.20.

1) Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1905.

14. Haber, F., Thermodynamik technischer Gasreaktionen. 7 Vorlesgn. München, Oldenbourg. geb. in Leinw. M. 10.
15. Hahn, Herm., Physikalische Freihandversuche. Unter Benutzung des Nachlasses v. Bernhard Schwalbe. I. Teil: Nützliche Winke. Maß u Messen. Mechanik der festen Körper. Berlin, Salle. M. 3.
16. Jäger, Gustav, Theoretische Physik, II, Licht u. Wärme. (Sammlung Göschen Nr. 77.) 3., verb. Aufl. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.
17. — —, dasselbe, III, Elektrizität u. Magnetismus. (Sammlung Göschen Nr. 78.) 3., verb. Aufl. Ebenda. geb. in Leinw. M. —.80.
18. Kohlrausch, F., Lehrbuch der praktischen Physik. 10. verm. Aufl. des Leitfadens der praktischen Physik. Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. in Leinw. M. 9.
19. Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen 3. umgearb. u. verm. Aufl. unter Mitwirkung zahlreicher Gelehrter u. mit Unterstützung der Königl. preußischen Akad. d. Wiss. hrsg. v. Richard Börnstein u. Wilhelm Meyerhoffer. Berlin, Springer. geb. M. 36.
20. Lorentz, H. A., Ergebnisse u. Probleme der Elektronentheorie. Vortrag. Berlin, Springer. M. 1.50.
21. Möller, M., Flut u. Witterung. Eine neue Theorie atmosphärischer Flut- u. Ebbebewegung, abgeleitet f. nördliche geographische Breiten u. deren Anwendung auf die Gestaltung der Witterung. Braunschweig, Limbach. M. 1.
22. Righi, Augusto, Il moto dei ioni nelle scariche elettriche. 2ª ediz. ampliata. Bologna. L. 3.
23. Thomson, J. J., Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autorisierte Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt v. Erich Marx. In 3 Lfgn. 1. Lfg. Leipzig, Teubner. M. 6.

Tafeln, Nomographie.

24. Láska, W., Wykłady Nomografii. Opracował i wydał Fr. Ulkowski. (Autogr.) Lwów 1904/05. Półrocze Letnie.
25. Wilda, Diagramm- und Flächenmesser. Vollständiger Ersatz f. das Planimeter zum schnellen und genauen Ausmessen beliebig begrenzter Flächen, Dampfdiagramme usw. Mit Gebrauchsanweisung. Hannover, Gebr. Jänecke. M. 2.

Verschiedenes.

26. Festschrift, Adolf Wüllner gewidmet zum siebzigsten Geburtstage 13. Juni 1905 von der Königl. technischen Hochschule zu Aachen, ihren früheren u. jetzigen Mitgliedern. Mit dem Bildnis A. Wüllners in Heliogravüre. Leipzig, Teubner. M. 8.
27. Godfrey, C. and Bell, G. M., A note book of Experimental Mathematics. London, Arnold. 2 s.
28. Habenicht, Bodo, Beiträge zur mathematischen Begründung einer Morphologie der Blätter. Berlin, Salle. M. 1.60.
29. Jahnke, E., Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik u. mathematische Physik. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 5.60.
30. Krazer, A., Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904. Herausg. von dem Schriftführer des Kongresses. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 18.
31. Löschner, Hans, Über Sonnenuhren. Beiträge zu ihrer Geschichte u. Konstruktion nebst Aufstellung einer Fehlertheorie. Graz, Leuschner & Lubensky. M. 5.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Appel et Chappuis, Leçons de mécanique élémentaire, s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 6

Bachmann, Paul, Zahlentheorie. 5. Teil. Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 17.

Bernhard, M., Darstellende Geometrie, s. N. B. 2.

Bucherer, A. H., Elemente der Vektor-Analysis, s. N. B. 12.

Contributions from the Jefferson Physical Laboratory of Harvard University for the year 1904. Vol. II. Cambridge, Mass.

Couturat, L'algèbre de la logique, s. N. B. 4.

Doll u. Nestle, Lehrbuch der praktischen Geometrie, 2. A., s. N. B. 1.

Donadt, A., Lehrbuch der Mechanik, s. N. B. 7.

Fenkner, Hugo; Arithmetische Aufgaben. Unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik, Chemie. Ausgabe A. Teil I. 5. verb. Aufl. Berlin, Salle. M. 2.20.

Föppl, A., Vorlesungen üb. technische Mechanik, I, 3. A., s. N. B. 8.

Geitler, von, Elektromagnetische Schwingungen und Wellen, s. N. B. 13.

Habenicht, B., Beiträge zur mathem. Begründung einer Morphologie der Blätter. Berlin, Salle. M. 1.60.

Hahn, H., Physikalische Freihandversuche, s. N. B. 15.

Hinton, C. Howard, The fourth dimension. London 1904, Swan Sonnenschein & Co.

Jäger, G., Theoretische Physik, II, III, s. N. B. 16, 17.

Jahnke, E., Vorlesungen über die Vektorenrechnung, s. N. B. 29.

Junker, Fr., Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. (Sammlung Göschen Nr. 146.) 2., verb. Aufl. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.

Kohlrausch, F., Lehrbuch der praktischen Physik, 10. A., s. N. B. 18.

Krazer, A., Verhandlungen des 3. internationalen Mathematiker-Kongresses, s. N. B. 30.

Kübler, J., Die natürliche Entwicklung der Materie im Weltraum u. die daraus hervorgehenden Weltgesetze. Leipzig 1904, Teubner. M. —.80.

Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen, 3. A., s. N. B. 19.

Lanner, Alois, Die wissenschaftlichen Grundlagen des ersten Rechenunterrichts. Wien u. Leipzig, Fromme. K. 1.20.

Láska, W., Wykłady Nomografii, s. N. B. 24.

Lindelöf, Ernst, Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 3.50.

Meyer, W. Franz, Differential- und Integralrechnung. II. Band: Integralrechnung. (Sammlung Schubert XI.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 10.

Schröder, Alfred, Zur Lösung des Schwerkraftproblems. Ein physikalischer Versuch. Als Manuskript gedruckt. Guscht (Neumark), Selbstverlag. M. —.50.

Schubert, H., Beispiel-Sammlung zur Arithmetik u. Algebra. (Sammlung Göschen Nr. 48.) 3., durchgesehene Aufl. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.

Smith, David Eugene. A portfolio of portraits of eminent Mathematicians. Descartes, Pythagoras, Archimedes, Fermat, Leonardo of Pisa, Euclid, Cardan, Leibnitz, Napier, Vieta, Newton, Thales. Chicago, The Open Court Publishing Company.

Thomson-Marx, Elektrizitäts-Durchgang in Gasen, s N. B. 23.

Wilda, Diagramm- und Flächenmesser, s. N. B. 25.

Wüllner-Festschrift, s. N. B. 26.

Zetzsche, K. Ed., Ebene und räumliche Geometrie. 4. Aufl. (Webers ill. Katechismen. Bd. 69.) Leipzig, Weber. geb. in Leinw. M. 4.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.
HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

Berichtigung: Auf Seite 285, Zeile 9 von oben muß es heißen: $\alpha_\lambda\ \beta_\lambda\ \gamma_\lambda$ statt $\alpha\lambda\ \beta\lambda\ \gamma\lambda$, d. h. λ ist ein Index, kein Faktor.

Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

F. Bernstein, F. Blake, E. Czuber, N. Delaunay, K. Doehlemann, P. Ernst, A. Grünwald, G. Holtsmark, M. Lerch, R. Mehmke, K. Nitz, B. J. W. Reuser, C. Runge, R. Schimmack, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, A. Timpe, Th. Weitbrecht, C. W. Wirtz, A. Wlassow, R. Wölffing.

Darstellung aller Elementarbewegungen eines starren Körpers von beliebigem Freiheitsgrad.

Untersuchungen, ausgeführt mit Unterstützung der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen

von ANTON GRÜNWALD in Bubentsch bei Prag.

'Ought we not first to study carefully the nature of the freedom which the body possesses? Ought we not to make an inventory of every distinct movement of which the body is capable? Until this has been obtained I do not see how we can make any progress in the dynamical part of our business.'
Sir Robert Ball.[1])

Wir stellen uns die Aufgabe, in Kürze für jeden Freiheitsgrad eines starren Körpers Modelle einfacher Mechanismen anzugeben, welche, in geeigneter Weise angebracht, dazu dienen können, die oft höchst unübersichtlichen, die Bewegungsfreiheit des Körpers einschränkenden Bedingungen zu ersetzen.

An der Grenzfläche der zusammengekoppelten Teile dieser Mechanismen soll nur die Wirkung von Widerstandskräften, welche in die Flächennormale fallen, in beliebig hohem Maße beansprucht, dagegen von Reibung und dgl. gänzlich abgesehen werden. Bei jedem Modelle soll an das System der Achsen und zugehörigen Parameter [Steigungen, $(2\pi)^{-1}$fachen Ganghöhen[2])] einerseits jener Schraubungen erinnert werden, welche das mit den instantanen Bewegungsbedingungen verträgliche lineare Schraubengebiet R_k erfüllen, sowie auch an die Schraubungen

1) Bezüglich der Literatur verweisen wir auf den „Treatise on the theory of screws" von Sir Robert Ball, Cambridge 1900, und auf die zwei Abhandlungen des Verfassers in der Zeitschrift für Mathematik und Physik („Sir Robert S. Balls lineare Schraubengebiete" im 48. Bd., 1. Heft, 1902, S. 49—108 mit zwei Figurentafeln und „Zur Veranschaulichung des Schraubenbündels" im 49. Bd., 2. Heft, 1903, S. 211—245 mit zwei Figurentafeln; Leipzig, B. G. Teubner.) Zur Einführung sei insbesondere die (in der Sammlung Schubert, Leipzig 1902 erschienene) „Liniengeometrie" Zindlers empfohlen. Von allgemeinen Gesichtspunkten aus: E. Study: „Geometrie der Dynamen", Leipzig 1903. Vgl. dort insbesondere S. 585 usw.

2) Der Parameter kann auch aufgefaßt werden als Entfernung jener Punkte von der Achse, deren Translationsstrahlen (Tangenten an die Bahnschraubenlinien dieser Punkte) mit der Achse die Winkel 45° einschließen.

des für die Bewegung unwirksamen linearen Reziprokalgebietes[1]) $P_{(6-k)}$, welchem die Widerstandsdynamen des Systems entnommen sind.

Es wird so für jeden Grad der Bewegungsfreiheit ein **vollständiges Inventar** (S. 270) aller Typen von instantanen Bewegungsmöglichkeiten zusammengestellt werden, wobei jeder Typus durch einen einfachen, genau beschriebenen **Bewegungsmechanismus** sich verwirklichen läßt. Für jeden Freiheitsgrad ordnen wir die Typen nach der Zahl der dem beweglichen Körper gestatteten von einander unabhängigen Translationen, da dieser Einteilungsgrund sich bei der praktischen Ausführung von Beweglichkeitsmodellen als der zweckmäßigste erweist. Vgl. die Tabelle S. 274.

Die von uns aufgezeichneten typischen Mechanismen gestatten es, einen Apparat — allerdings mit auswechselbaren Bestandteilen — aufzubauen, welcher alle (an einem starren Körper zulässigen und in einem bestimmten Augenblick die Bewegung bis auf jeden beliebigen Freiheitsgrad) beschränkenden Bedingungen zu ersetzen imstande ist.

So wenig es wohl gewöhnlich beachtet werden mag, bietet doch die tägliche Erfahrung und auch der menschliche Körper instruktive Beispiele von Beweglichkeiten — auch höherer Freiheitsgrade — dar, deren Verständnis wir fördern wollen[2]), indem wir in *elementarer* Weise in jenen neuen Abschnitt der Kinematik einführen, von welchem E. Study in seiner klassischen „Geometrie der Dynamen" bemerkt (S. 555), man sei in mancher Richtung über gewisse Beispiele und tastende Versuche, etwas Ordnung in die sich darbietenden Einzelheiten zu bringen, nicht hinausgekommen.

Freiheitsgrad I.

Jede Elementarbewegung eines starren Körpers kann durch eine Schraubenbewegung ersetzt werden, welche aus einer Drehung um eine

---

1) Reziprok heißen Schraubengebiete, welche zu einander polar sind bezüglich des (im linearen Schraubenraum R_{VI} enthaltenen) quadratischen Gebietes aller Geraden.

2) Wer denkt denn — um einen einfachen Fall zu wählen — z. B. daran, daß er bei einer Eisenbahnfahrt, indem er bei starr in beliebig schräger Richtung gehaltenem Unterarm die Faust bloß im Handwurzelgelenk dreht, in jedem Augenblick diese Faust nur *um Achsen* im festen Außenraum (und zwar unter Einhaltung von genau angebbaren Ganghöhen) *schraubt*, welche einen genau bestimmten Kegel zweiter Ordnung umhüllen und zu einer Fokalachse desselben senkrecht stehen? Wer denkt dabei daran, daß hierbei nur gewisse Dynamen unwirksam bleiben, deren Achsen denselben Kegel berühren und zur anderen Fokalachse senkrecht sind? [Es liegt der von uns unter 2) beim Freiheitsgrade III anzuführende Fall vor.]

: zu dieser Drehung proportionalen Translation (Parallel-
n der Achsenrichtung sich zusammensetzt.[1])
ıes Modell für die ausschließliche Zulassung einer solchen
bekannt

Schraubenmutter, welche um eine Spindel von der
dem Parameter $\mathfrak{p}$ beweglich ist. Ebensogut könnte bei
ıtter die Spindel bewegt werden. Insbesondere ergibt sich
ın Spezialfall $\mathfrak{p} = 0$ ein starrer Körper, welcher wie etwa
ıne zylindrische feste Achse G (unter Versicherung gegen
an derselben) einfach drehbar ist.

·echend $\mathfrak{p} = \infty$ haben wir einen **Schieber,** d. h. einen
ıtwa wie eine Schublade mit Hilfe prismatischer Grenz-
ısprechenden festen Lagern gleitet (Gleitstück im Schub-
ı seine Punkte verschieben sich parallel um gleich lange

Kombinationen mehrerer (höchstens 5) dieser einfachen
werden es uns gestatten, jeden möglichen Fall von
Bewegungsmöglichkeiten eines starren Körpers zu ver-

riff der Grassmannschen Schraube[3]), welche eindeutig
; durch einen „Stab" und ein zu ihm senkrechtes „Feld"
ıssendsten Weise, sowohl einer Schraubungsgeschwindigkeit
ıg" L (Rotationsgeschwindigkeit um die Stabachse G mit
Stablänge angegebenen Winkelgeschwindigkeit, verbunden
rallelverschiebung senkrecht zum Felde, d. h. parallel zu

ısles, „Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment
ırps solide libre dans l'espace" Paris 1893, Comptes rendus, vol. XVI,
2. Auch dessen schon 1830 in Férussacs Bulletin, vol. XIV, pag.
ienene Note. L. Poinsot, „Théorie nouvelle de la rotation des
villes Journal vol. XVI, pag. 9—129, 289—336. H. Wiener, „Die
ıng zweier endlicher Schraubungen zu einer einzigen" und „Zur
ıwendungen" in den Leipziger Berichten 1890 S. 13 u. 71. E. Study,
r Dynamen" Leipzig, 1903.

1'), 2) vgl. etwa m, m_0, m_∞ in der Fig. 1, wenn dort — entgegen
en Annahme — t festgehalten wird. Zu 2) auch die Bestandteile a
(Schubrahmen) und b Gleitstück der Fig. 2. Wir schreiben 2 statt etwa 1'' für den Schieberfall, da wir nach der Zahl der bei der Beweglichkeit gestatteten Translationen einteilen wollen.

3) H. Grassmann „Schraubenrechnung und Nullsystem" Halle 1899 und E. W. Hyde „The directional theory of screws" in den Annals of mathematics, vol. IV, N. 5, pag. 137, 1888 Mass. U. S. A. Im „The directional calculus" desselben Verfassers Boston, U. S. A. 1890 ist u. a. der Schraubenbegriff dargelegt. Er findet sich übrigens schon in der Ausdehnungslehre H. Grassmanns des Ä. 1862.

G und mit der durch den Feldinhalt dargestellten Geschwindigkeit) als auch einer Dyname A (Kraft auf einer Achse Γ, verbunden mit einem Drehmoment in dem zu Γ senkrechten Felde, wobei der Feldinhalt $\mathfrak{p}'$mal so groß ist als die Stablänge der Kraft) zugrunde gelegt werden.

Grassmanns „eingewandtes" Produkt der Schraube mit einem ebenen Blatte gibt den „Nullpunkt" der betreffenden Ebene bezüglich der durch die Schraube L dargestellten Schraubung R_I an. (Das Wort „Schraubung" bedeutet die Gesamtheit der durch eine Zahlgröße aus L ableitbaren Schrauben.) Das „äußere" Produkt einer Schraube mit einem Punkte p gibt das „Nullblatt" dieses Punktes, welches einen Teil der betreffenden Nullebene bildet und dessen Größe und Sinn bei der ersteren der beiden obigen Deutungen der Schraube die Translationsgeschwindigkeit von p auf dem durchgelegten zum Nullblatte (pL) senkrechten Stabe bestimmt, während es bei Annahme der letzteren Deutung der Schraube als Dyname A, das Moment (pA) der Dyname bezüglich des beliebigen Punktes, p vorstellt.

Das Grassmansche „äußere" Produkt einer Windung L und einer Dyname A gibt die Arbeitsgeschwindigkeit der Dyname A bezüglich der Windung L an.[1]) Es zeigt durch sein Verschwinden, daß in diesem Falle L und A linearen Reziprokalgebieten angehören, was bezüglich des Winkels ϑ der Achsen G und Γ von L und A und der Parameter $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ dieser Schrauben die Beziehung

$$\mathfrak{p} + \mathfrak{p}' = e \operatorname{tg} \vartheta$$

zur Folge hat, wenn man mit e den kürzesten Abstand von G und Γ bezeichnet.

Im obigen Falle 1) wird jede Windung L eindeutig dargestellt durch einen Stab l der Schraubenachse G und ein hierzu senkrechtes Feld f, dessen Inhalt $\mathfrak{p}$mal so groß ist als die Länge von l

$$L = l + f,$$

wobei das Vorzeichen des Parameters angibt, ob die Schraube „links" oder „rechts" gewunden ist. Im Falle 1') einer Drehungsachse ist insbesondere f und im Falle 2) eines Schiebers ist l zu Null geworden, während $\mathfrak{p}$ bei 1') den Wert 0, bei 2) den Wert ∞ annimmt.

Als Achse Γ einer Schraube A im linearen Reziprokalgebiete zu L, bezw. zu R_I, im „Schraubengewebe" P_V, kann jede Gerade des Raumes auftreten; der zugehörige Parameter $\mathfrak{p}'$ bestimmt sich aus der angegebenen Bedingung $\mathfrak{p} + \mathfrak{p}' = e \operatorname{tg} \vartheta$, wobei auch das Vorzeichen von ϑ zu beachten ist. Die senkrechten Transversalen der Achse G der Schraubung R_I sind als Achse Γ im „Schraubengewebe" P_V mit einem beliebigen Parameter belegbar. Zu P_V gehört auch das Feldbüschel parallel zu G. Jedem konstanten Werte von $\mathfrak{p}'$ entspricht ein zur Zentralachse G gehöriger linearer Komplex von Achsen Γ.

1) Vergl. Zindlers oben angeführte Liniengeometrie S. 109.

Im Gegensatz zum Falle 1) erschöpft im Falle 1′) sowohl als 2) die Schraube $L(=l$, bezw. $=f)$ samt den Schrauben ihres linearen Reziprokalgewebes das Gesamtschraubengebiet R_{VI} des Raumes nicht, sondern L (d. h. auch R_I) ist in P_V enthalten. Im Falle 2) ist jede zum Felde f parallele Achse Γ in P_V mit einem beliebigen Parameter versehbar; andere als zu f parallele Achsen Γ braucht man nicht anzuerkennen, es wäre denn, daß man ihnen den Parameter ∞ (neben der Stablänge 0) zuschriebe: Jedes Feld des Raumes gehört zu P_V.

Umgekehrt ist bei 1′) und 2) $L(=l$, bezw. $=f)$ das — wie bemerkt in P_V enthaltene — Reziprokalgebiet von P_V; als Ergänzung von P_V zum vollständigen VI-stufigen Schraubengebiet des Raumes, als ein „*ergänzendes* Gebiet“ von P_V ist dagegen im Falle 1′) f und im Falle 2) l brauchbar. Diese verschiedenen Begriffe eines „reziproken“ und eines „ergänzenden“ Gebietes sind bei allen linearen Schraubensystemen um so sorgfältiger zu unterscheiden, als sie oft, — aber wie wir schon jetzt bemerken — nicht immer gleichen Umfang haben; bei 1) hatten sie z. B. gleichen Umfang, die durch L bestimmte Schraubung R_I und das Gewebe P_V waren zugleich Reziprokal- und Ergänzungsgebiete von einander.

Freiheitsgrad II.

Als typischen Mechanismus zur Verwirklichung aller Elementarbewegungen stellen wir im allgemeinen Falle

1.

wo Achsen verschiedener Richtungen im zugehörigen linearen Schraubenbüschel R_{II} auftreten, eine Verallgemeinerung des gewöhnlichen (durch seine oft zulässige Benützung als Universalgelenk bekannten) Hookschen Schlüssels auf, nämlich den

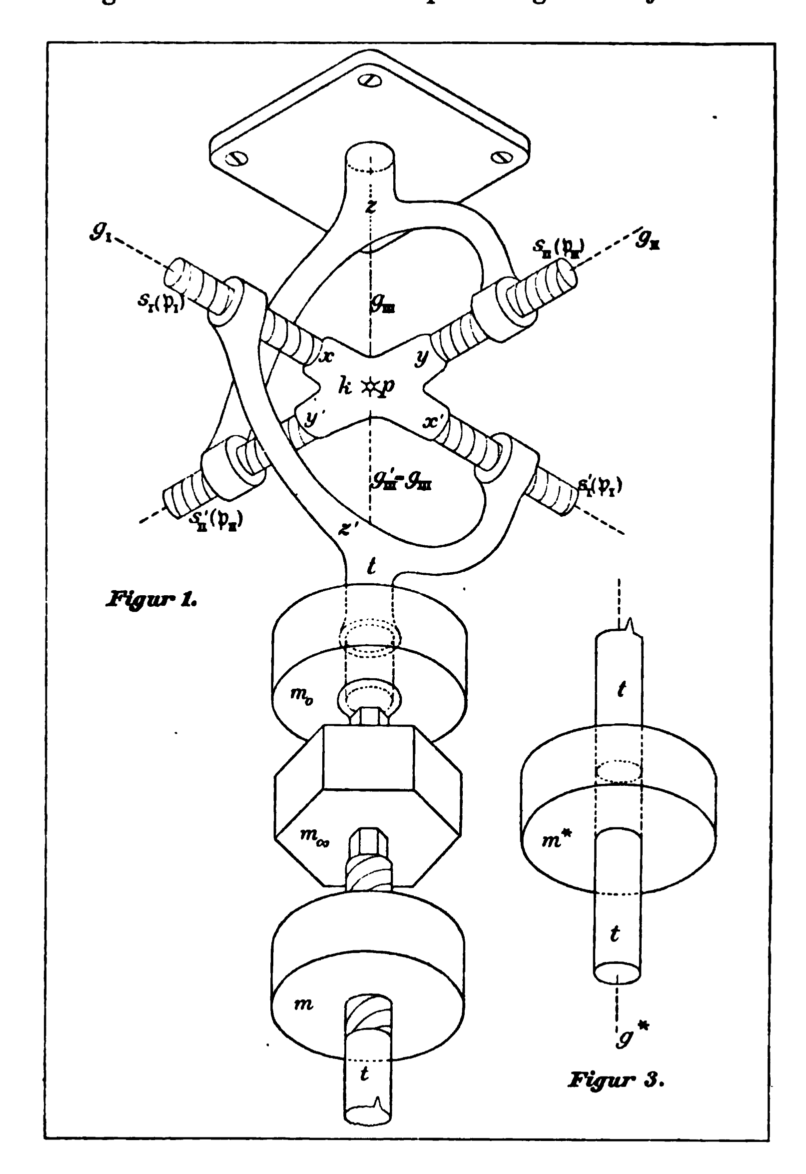
Schraubenzwilling (Figur 1).

Dieser besteht aus dem Kreuzkörper k und zwei Gabelkörpern mit den zylindrischen Schäften z und z'. Der Kreuzkörper trägt zwei Schrauben-Spindeln s_I (mit der Fortsetzung s'_I) und s_{II} (s'_{II}), deren beliebig wählbare Ganghöhen das $(2\pi)^{-1}$fache der „Hauptparameter“ $\mathfrak{p}_I$ und $\mathfrak{p}_{II}$ sind. Die im Arme xx' bezw. yy' des Kreuzkörpers zu denkenden Spindelachsen G_I (von $s_I s'_I$) G_{II} (von $s_{II} s'_{II}$) nehmen wir zueinander senkrecht[1]) und sich in p schneidend an.

Den Schraubenspindeln entsprechen Mutterlager in den beiden Gabeln, in welche sich der Kreuzkörper möglichst reibungslos ein-

1) Wenn wir noch weiter verallgemeinern und diese Forderung fallen lassen wollten, wobei $\mathfrak{p}_I$ und $\mathfrak{p}_{II}$ nicht mehr die Hauptparameter des Schraubenbüschels wären, so hätten wir wohl den Vorteil, durch geeignete Adjustierung des derart verallgemeinerten Instrumentes auch die später zu besprechenden zum Freiheitsgrade II gehörigen speziellen Mechanismen (Schraub-, bezw. Drehschieber und Muff) ersetzen zu können. Dieser Vorteil wäre zu teuer erkauft durch die geringe Übersichtlichkeit und schwierige Konstruktion der Mechanismen.

schrauben kann. Halten wir die eine Gabel z vollkommen *fest,* so hat die andere Gabel z' den Freiheitsgrad II; sie ist samt jedem mit ihrer Schaftstange z starr verbundenen Körper beweglich um jede Schraubung



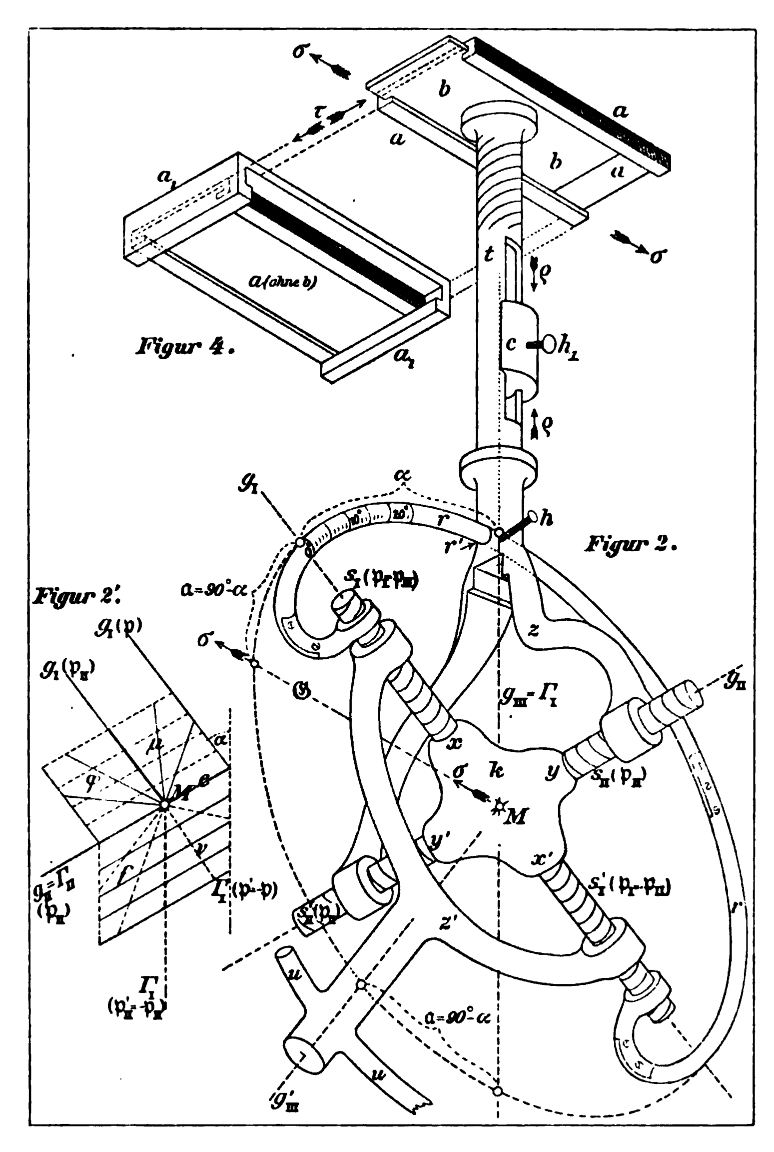
Figur 1.

Figur 3.

des durch die „Hauptschraubungen“ s_{II} (Achse G_I, Parameter $\mathfrak{p}_I$) und s_{II} (G_{II}, $\mathfrak{p}_{II}$) bestimmten linearen Schraubenbüschels R_{II}.

Sind die Parameter $\mathfrak{p}_I$ und $\mathfrak{p}_{II}$ der beiden Hauptschraubungen gleich, d. h. die Schraubenspindeln s_I und s_{II} entweder beide „rechts“

oder beide „links“ gewunden und von gleicher Ganghöhe, so nennen wir den Schraubenzwilling „gleichsteigend“. Wird insbesondere diese Steigung $\mathfrak{p}_{I} = \mathfrak{p}_{II} = 0$, so sind statt der Spindeln s_{I} und s_{II} und der



Figur 4.

Figur 2.

Figur 2'.

zugehörigen Mutterlager gewöhnliche Zapfen und Achsenlager angebracht zu denken, und wir haben es mit einem „gewöhnlichen“ Hookschen Schlüssel zu tun.

Wäre dagegen der eine Hauptparameter oder wären gar beide ∞,

so hätten wir uns die entsprechende Spindel durch ein Prisma mit Kanten parallel zur Spindelachse, verschiebbar in einem kongruenten Lager der Gabel, ersetzt zu denken und hätten einen Normalschraubschieber oder gar einen Doppelschieber vor uns, wie wir solche später in bequemeren Formen zu erwähnen haben werden.

Denken wir uns den Schraubenzwilling (Figur 1) mit einer Muskulatur[1]) umkleidet. Bei der Vorführung des Instrumentes helfen wir mit unserer eigenen Muskulatur aus, um einige der ∞^1 verschiedenen[2]) Instantanschraubungen wirklich auszuführen, welche bei fester Gabel z die bewegliche Gabel z' und jeden mit der letzteren starr verbundenen Körper aus der Anfangslage der Figur in eine benachbarte neue überführen. Die Achsen der so ausführbaren, zu unserem linearen Schraubenbüschel R_{II} gehörigen Schraubungen liegen auf einem *Zylindroide*[3]), welches G_{I} und G_{II}, die durch p gelegte x- und y-Achse, zu Haupterzeugenden hat und die (gegenseitige Entfernung der beiden symmetrisch zur xy-Ebene und auf der hierzu senkrechten z-Achse G_{III} gelegenen Zwickpunkte oder pinch-points der Fläche, die sog.) „Spannweite" $\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}}$ besitzt.

Von dieser Fläche mit der Gleichung

$$(x^2 + y^2)z = (\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}})xy$$

sind viele Konstruktionen angegeben worden. Eine der einfachsten ist wohl die durch Bestimmung ihrer Erzeugenden als kürzeste Transversale der auf G_{III} fallenden z-Achse und einer beliebigen Geraden des Strahlenbüschels mit dem Zentrum $(\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}}, 0, 0)$ in der Ebene $y - z = 0$. Letzteres Strahlenbüschel kann man übrigens ersetzen durch ein jedes andere, dessen Zentrum in einem beliebigen Punkte p_1 einer beliebigen Zylindroidkante G_1 (nur nicht auch auf G_{III}) liegt und dessen Ebene

---

1) Vgl. S. 239 Anm. 2 und z. B. den verwickelteren, auf S. 267 als Beispiel eines besonderen Freiheitsgrades V herangezogenen Fall der Gelenkigkeit und und Muskulatur der ausgestreckten Hand bei festem Schulterblatt, um die Nützlichkeit dieser wohl anfangs befremdlichen Hilfsvorstellung zuzugeben. Es sei hier insbesondere auf die interessante Studie „Kinematik im Tierreiche" S. 721 in F. Reuleaux' Kinematik II. Bd. (Braunschweig 1900) hingewiesen.

2) Indem wir etwa eine und dieselbe kleine Schraubung von z' um s_{I} der der Reihe nach mit verschiedenen Schraubungen um s_{II} zusammensetzen.

3) Wir müssen auf Anm. 1, S. 229 verweisen. Ein schönes Beispiel dieser Regelfläche 3. Grades, deren bei schiefer Parallelstrahlung auf die Ebene $G_{\mathrm{I}}G_{\mathrm{II}}$ entworfenes Bild eine Steinersche dreispitzige Hypozykloide ist, ziert das Titelblatt des oben erwähnten Ballschen Werkes (1900). In diesem Bilde erscheinen die Zylindroidkanten als Tangenten der dreispitzigen Steinerschen Zykloide. Bezgl. des Namens „Zylindroid" vergl. ebenda Seite 20 Anm.

p_1 mit der zu G_1 (bezüglich der Hauptkanten G_I und G_{II}) symmetrischen Erzeugenden G_2 der Fläche verbindet.

Um die auf alle beliebigen Zylindroidkanten G als Schraubenachsen im Büschel R_{II} entfallenden Parameter (und damit die Ganghöhen der Schraubungen um G) zu übersehen, trage man von einem Punkte, z. B. vom Anfange p aus auf Parallelen zu den Zylindroidkanten, also nur in den Richtungen der Ebene $z = 0$ die zugehörigen Schraubenparameter ab. Man erhält als Ort der Endpunkte die Parameterkurve

$$(x^2 + y^2)^3 - (\mathfrak{p}_I x^2 + \mathfrak{p}_{II} y^2)^2 = 0,$$

deren verschiedene Konstruktionen (direkte Auffindungen der obigen Endpunkte) und Gestalten der Verfasser an anderer Stelle[1]) angegeben hat. Wegen der Symmetrie der Parameterkurve gehören jene zu einander windschiefen Zylindroidkanten zu gleichen Parametern, welche bezüglich der Haupterzeugenden $G_I G_{II}$ symmetrisch liegen. Speziell die beiden gegen G_I und G_{II} unter 45^0 geneigten und gegen einander senkrechten, zu den Zwickpunkten gehörigen Zylindroidkanten, die „Zwickkanten" oder wegen ihrer größten Entfernung $e = (\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I)$ „äußersten" Kanten sind im Schraubenbüschel R_{II} mit dem Parameter $\frac{1}{2}(\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II})$ zu belegen.

Wie jedes Achsensystem eines linearen Schraubengebietes, bleibt auch unser Zylindroid die Achsenfläche jenes — wieder linearen — Schraubenbüschels, dessen auf die einzelnen Achsen (Zylindroidkanten) entfallende Parameter sich von den früheren nur um einen algebraischen Summanden unterscheiden, wobei aus der früheren Parameterkurve eine ihrer Konchoiden wird.[2])

Sind insbesondere die beiden Hauptparameter entgegengesetzt gleich[3]),

$$\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} = 0,$$

so haben wir uns die beiden Schrauben s_I, s_{II} am Schraubenzwilling (Fig. 1) von gleicher Ganghöhe, aber die eine links, die andere rechts gewunden zu denken. Die zum Parameter 0 gehörigen auf dem Zylindroide bezüglich der Haupterzeugenden $G_I G_{II}$ symmetrisch gelegenen Kanten $G_1 G_2$ sind in diesem Falle zu einander senkrechte Windschiefe. Durch Drehungen um diese könnte man die Gabel g'



---

1) In der ersten seiner auf S. 229, Anm. 1 erwähnten Abhandlungen in der Zeitschrift f. M. u. Ph., S. 68. Hierzu die dortigen Figuren 2', 3', 4' speziell auch 6, identisch mit der Linie 1 der Figur 71, S. 293 in Zindlers Liniengeometrie.

2) Die Figur 7 in der obigen Abh. d. Verf. veranschaulicht die dergestalt bei einem Zylindroid möglichen Parameterverteilungen. Ebenso die Linien 2, 3, 4 der eben erwähnten Figur Zindlers.

3) Parameterkurve ($\mathfrak{P}^*$) Fig. 6 ebenda, Zindlers Linie 1 der Fig. 71.

ebensogut wie durch den Schraubenzwilling in jede durch den letzteren erreichbare Nachbarlage bringen. Praktisch verwirklicht ist dieser Spezialtypus der Beweglichkeit II durch jede Türklinke, welche nicht bloß um ihre eigene Achse G_1, sondern auch samt dem Türflügel um die Verbindungsachse G_2 der Türangeln drehbar ist. Die gleiche Beweglichkeit der Türklinke und die gleichen Nachbarlagen könnte man erreichen, wenn man diese Klinke mit der Gabel s' eines mit $\mathfrak{p}_{II} = -\mathfrak{p}_I = \frac{e}{2}$ (e der kürzeste Abstand der Achsen $G_1 G_2$) als Hauptparameter versehenen Schraubenzwillings starr verbinden, die Achsen $G_I G_{II}$ des Kreuzkörpers in die gehörige Lage als Symmetrieachsen von G_1 und G_2 bringen, und die Gabel s vollkommen befestigen würde.

Ist dagegen einer der beiden Hauptparameter, etwa $\mathfrak{p}_I$, gleich Null[1]), so ist die eine Spindel s_I (s'_I) am Kreuzkörper durch einfache Zapfen, und sind entsprechend die Mutterwindungen in der Gabel s durch einfache Achsenlager, zu ersetzen. Ist der Wert von $\mathfrak{p}_{II}$ hierbei so geändert gedacht, d. h. die Spindel s_{II} und ihr Mutterlager derart gewunden, daß die algebraische Differenz der Hauptparameter dieselbe bleibt wie früher, so ist wohl die alte Parameterkurve in eine ihrer Konchoiden[2]) bezüglich des Anfanges p übergegangen, das als Achsenfläche zu denkende Zylindroid aber unverändert geblieben. Das zu R_{II} gehörige lineare Reziprokalgebiet, das „Schraubengebüsch" P_{IV} hat nun mit R_{II} ($\mathfrak{p}_I = 0$, $\mathfrak{p}_{II} \gtrless 0$) die den Stäben auf G_I (d. h. den Winkelgeschwindigkeiten bei einfacher Drehung um G_I) entsprechende ausgeartete Schraubung R_I gemein, umfaßt also zusammen mit R_{II} nicht mehr wie im allgemeinen Falle das gesamte Schraubengebiet R_{VI} des Raumes, sondern nur ein Schraubengewebe P_V, dasselbe, welches P_{IV} mit der Hauptschraubung der Spindel s_{II} (Achse G_{II}, Parameter $\mathfrak{p}_{II}$) verbindet. Die Reziprokalgebiete R_{II} und P_{IV} sind nicht mehr im allgemeinen Falle Ergänzungsgebiete zu einander bezüglich des Schraubenraumes.

Beim gleichsteigenden Schraubenzwilling (vgl. S. 235) ist die Regelschar G des zu R_{II} gehörigen Zylindroides gemäß

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} (\gtrless 0)$$

zum Büschel der Strahlen G mit dem Anfange p als Zentrum und in der Ebene $G_I G_{II}$ ($z = 0$) ausgeartet. Gemäß

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II}$$

wird die Parmeterkurve ein Kreis, alle zu den Büschelstrahlen G als

1) Hierzu die Parameterkurve Fig. 8′ der eben erwähnten Abhandlung des Verf. u. Zindlers Linie 3 in Fig. 71.

2) Vgl. S. 237 Anm. 2.

Achsen gehörigen und durch den gleichsteigenden Zwilling ausführbaren reellen Schraubenbewegungen haben denselben Parameter $\mathfrak{p}$.

Die häufigste Form, entsprechend

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} = 0,$$

ist der gewöhnliche Hooksche Schlüssel, der bei fester Gabel z der anderen z' eine einfache Drehung um jede zum Büschel $G_I G_{II}$ gehörige Achse zu erteilen geeignet ist.[1]) Sein lineares Schraubengebiet R_{II} ist zum Stabbüschel G geworden, also im reziproken Schraubengebüsch P_{IV} vollständig enthalten.

Genau wie dieser Schlüssel dient am menschlichen Körper bei *festem* Unterarmknochen das Handwurzelgelenk, welches dann alle Drehungen der Mittelhand (metacarpus) und damit eines in der Faust gehaltenen Gegenstandes um die durch das ideale Gelenkszentrum gehenden und zur Richtung des Unterarmes senkrechten Achsen — und in diesem Augenblicke um keine anderen — zuläßt.[2])

Ein anderes Beispiel: Bewegen wir die absichtlich *samt* Handwurzel (carpus) *starr* gehaltene Faust durch Drehung (Pronation oder Supination) um die ideale Achse G_I des Unterarmes bei gleichzeitiger Inanspruchnahme der Drehmöglichkeit um die Achse G_{II} des Ellenbogengelenkes! Ein gewöhnlicher Hookscher Schlüssel mit nach G_I und G_{II} gebrachten Kreuzarmen xx' und yy' würde bei starr mit dem Oberarmknochen verbundener Gabel z der mit z' (dem zweiten, in der Verlängerung des Oberarmes befindlichen Gabelschafte) starr verbunden gedachten Faust genau dieselbe Beweglichkeit sichern, d. h. genau dieselben Nachbarlagen erreichbar machen.

Die zu einem beliebigen Parameter $\mathfrak{p}'$ gehörigen Achsen Γ des

---

1) In der technischen Praxis wird der gewöhnliche Hooksche Schlüssel nur bei der sog. Cardanischen Aufhängung (z. B. eines Kompasses oder einer Uhr) mit fester, sonst stets mit einer um ihre Achse G_{III} einfach drehbaren Gabel z verwendet, welche diese Drehung auf die Schaftstange der Gabel z' zu übertragen hat (Fig. 1), auch wenn die Schaftachsen beider Gabeln einen Winkel ω mit einander einschließen. Diese Brauchbarkeit als Universalgelenk wird indessen für viele Zwecke dadurch beeinträchtigt, daß das Verhältnis der Drehgeschwindigkeiten beider Gabelstangen periodisch zwischen 1 und $\cos\omega$ schwankt; auch darf ω dem Werte 90^0 nicht zu nahe kommen. Vgl. F. Reuleaux, Theoretische Kinematik I. Bd. Braunschweig 1875. S. 386 und 612.

2) Nehmen wir die Drehbarkeit des Unterarmes (Pronation oder Supination) um seine ideale Achse z hinzu, so sind wir genau wie bei der eben (Anm. 1) geschilderten technischen Anwendung des Hookschen Schlüssels als Universalgelenk imstande bei festem Oberarm und ohne Beanspruchung des Ellbogengelenkes eine in der Hand auch schief gegen z gehaltenen Stange z' um ihre eigene Achse zu drehen. Häufig ist z' die Achse eines Hahnes, den wir drehen.

Reziprokalgebüsches P_{IV}, d. h. die Achsen jener *Stäbe,* welche als Kräfte gedeutet verbunden mit einem Drehmomente (Felde) um diese Achse, das $\mathfrak{p}'$mal so groß ist als die (durch die Stablänge gegebene Größe der) Kraft selbst, erfüllen für jeden konstanten Wert von $\mathfrak{p}'$ die *lineare Kongruenz* der Transversalen jener beiden Zylindroidkanten $G_1(\mathfrak{p})$ und $G_2(\mathfrak{p})$, welche zum Parameter $\mathfrak{p} = -\mathfrak{p}'$ gehören und demgemäß bezüglich der Haupterzeugenden G_I und G_{II} symmetrisch liegen. Zu reellem Parameter können hierbei auch imaginäre Leitstrahlen $G_1 G_2$ der Kongruenz und deshalb doch wieder reelle Kongruenzstrahlen gehören.[1] Diese Γ treffen das Zylindroid außer im Punkte $\mathfrak{p}_1$ auf G_1 und $\mathfrak{p}_2$ auf G_2 noch in einem reellen dritten Punkte p_0[2]), dort aber senkrecht zur durchgehenden Flächenkante.

Die Achsen Γ *aller bei unserem Schraubenzwilling unwirksamen Dynamen* schneiden *eine* Kante der zugehörigen Zylindroidfläche senkrecht.

Alle Γ erfüllen für alle möglichen Werte von obigem $\mathfrak{p}'$ den *quadratischen Komplex* der senkrechten Transversalen der Zylindroidkanten. (Im Falle $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II}$ des gleichsteigenden oder eines gewöhnlichen Hookschen Schlüssels treten hierbei an Stelle dieser Kanten Strahlen des Büschels $G_I G_{II}$.)

Durch jeden Punkt allgemeiner Lage geht ein Kegel 2. Ordnung von Achsen Γ des P_{IV}, dessen elliptische Basis auf dem Zylindroid des R_{II} durch jenen Rotationszylinder ausgeschnitten wird, welcher die z-Achse G_{III}, die Doppelkante des Zylindroids, und die durch p zu ihr gelegte Parallele zu diametral gegenüberliegenden Kanten hat (und welcher beim gleichsteigenden Zwilling und speziell beim gewöhnlichen Hookschen Schlüssel ein Orthogonalkegel ist). Der Kegel zerfällt, wenn sein Scheitel unendlich fern oder auf dem Zylindroide liegt (p_1) und zwar im letzteren Falle außer in das ebene Büschel der Normalen zur Kante G_1 des Punktes p_1 noch in dasjenige, dessen Ebene der Punkt p_1 mit der zu G_1 bezüglich G_I und G_{II} symmetrischen Kante G_2 verbindet. Das letztere Büschel wurde in der S. 236 erwähnten Zylindroidkonstruktion benutzt.

Der zu jeder Achse Γ in P_{IV} gehörige *Parameter* $\mathfrak{p}'$ kann stets in reeller Weise aus des Reziprokalrelation

$$\mathfrak{p} + \mathfrak{p}' = e \operatorname{cotg} \vartheta$$

(e sei die kürzeste Entfernung von Γ und G_{III}, und ϑ der Winkel dieser Geraden) gegen jene Schraube des R_{II} (mit dem Parameter $\mathfrak{p}$) berechnet werden, deren Achse parallel zu der Projektion von Γ auf die Hauptebene $G_I G_{II}$ ist.

---

1) In Zindlers „Liniengeometrie" ist eine solche *reelle* lineare Strahlenkongruenz mit imaginären, windschiefen Leitstrahlen in einer sehr übersichtlichen Figur (47 S. 175) dargestellt. Sie sind affin zu den Kongruenzen der Anm. 1 der nächsten Seite.

2) Vgl. die Transversalkonstruktion der Zylindroidkanten (S. 236) mit Hilfe eines Strahlenbüschels, dessen Zentrum ein beliebiger Flächenpunkt p_1 ist.

Zur z-Achse G_{III} selbst gehört im Gebüsche P_{IV} jeder beliebige Parameter $\mathfrak{p}'$; auch das Feld senkrecht zu dieser „Hauptachse des Gebüsches“ gehört zu P_{IV}, es ist das einzige Feld im Gebüsche. $G_I = \Gamma_I$ und $G_{II} = \Gamma_{II}$ sollen „Nebenachsen“ des P_{IV} heißen, sie gehören in P_{IV} zu den „Grundparametern“ $\mathfrak{p}'_I = -\mathfrak{p}_I$, bezw. $\mathfrak{p}'_{II} = -\mathfrak{p}_{II}$.

Im Falle $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II}$ eines gleichsteigenden Zwillings (und des gewöhnlichen Hookschen Schlüssels) gehört zum Spezialwerte $\mathfrak{p}' = -\mathfrak{p}_I = -\mathfrak{p}_{II}$ ($= 0$ beim Hookschen Schlüssel) eine *ausgeartete* Kongruenz von Achsen Γ, bestehend sowohl aus den Strahlen des Bündels mit dem Anfange p als Zentrum als auch aus allen Strahlen der Hauptebene $G_I G_{II}$. Allen übrigen Parameterwerten $\mathfrak{p}'$ entsprechen in diesem Falle zirkuläre lineare Kongruenzen[1]), welche durch *Rotation* der die G_{III} als Scheitelgerade enthaltenden Regelschar eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides [mit der anderen Scheitelgeraden G_I und der Verteilungskonstante[2]) $(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}_I)$] *um* G_{III} erzeugbar sind.

Die *bisherigen* durch unseren Schraubenzwilling und seine Abarten darstellbaren Fälle haben in R_{II} Achsen G *verschiedener* Richtungen und das Gemeinsame, daß im reziproken Gebüsche P_{IV} eine und nur eine Gerade Γ^*, nämlich gerade die zur z-Achse gewählte G_{III}, mit beliebigem Parameter versehen werden kann; wir nannten sie Hauptachse des Gebüsches; in dem nun noch für den Freiheitsgrad II zu erörternden Falle 2. bezw. 2'. werden alle Strahlen eines Parallelbüschels, im Falle 2''. sogar alle senkrechten Transversalen einer Geraden, im Falle 3. wiederum alle Strahlen eines Parallelbündels diese auszeichnende Eigenschaft teilen.

2.

Jene Beweglichkeit vom Freiheitsgrade II, bei welcher ein starrer Körper nicht um Achsen verschiedener Richtungen, sondern nur um die Parallelstrahlen einer Ebene schraubbar wird, können wir in typischer Weise durch die (schiefe) Schubschraube oder den (schiefen)

Schraubschieber (Figur 2)

erreichen. Dieser stellt nichts anderes als eine Schraubenmutter vor, deren Spindel in einer (zu ihrer Achse G_I) schiefen Richtung verschoben werden kann. Eine bequeme Form desselben erhalten wir aus dem Schraubenzwilling dadurch, daß wir von der in der Figur 1 gezeichneten Anfangslage ausgehend, die Gabel z' um G_{II} herum um

---

1) Kongruenzen, deren imaginäre windschiefe Leitstrahlen durch die Kreispunkte der Hauptebene $z = 0$ gehen.

2) Die Verteilungskonstante bedeutet die kürzeste Entfernung der unter 45° gegen die Zentralebene geneigten Paraboloidkante von der in dieser Schar enthaltenen Scheitelgeraden.

einen Winkel $\mathfrak{a}$ drehen, so daß die neue Lage von G_I mit G_{III} und der Ebene $\nu = G_{II} G_{III}$ den Winkel $\alpha = 90^0 - \mathfrak{a}$ einschließt.[1]) Hierauf machen wir die Spindel s_{II} dadurch unwirksam, daß wir den Kreuzkörper k mit der Gabel z starr verbinden. Statt zu diesem Zwecke beide Körper etwa bei s_{II} (s'_{II}) zusammenzulöten, benutzen wir einen an s_I und s'_I anschraubbaren Halbring r, welcher in einer passenden Ausnehmung r' an dem Schafte der Gabel z, worin er sonst gleiten könnte, mit Hilfe der Stellschraube h für beliebige Werte von α festgestellt werden kann.

Damit dies auch für $\alpha = 0$ möglich sei, ist einerseits zwischen den Gabelzinken beim Schafte z der nötige Raum gelassen worden und sind andererseits die verlängerten Enden von r in der Nähe der Anschraubstellen etwas verbogen. Um die Starrheit des Systems kz verläßlich zu wahren, wird der Querschnitt des Ringes r nicht nur größer als dies in der Figur der Übersichtlichkeit wegen geschah, sondern auch nicht wie dort kreisförmig, eher etwa in Form eines Rechteckes zu wählen sein, dessen längere Seiten zu G_{II} senkrecht stehen; auf der zu G_{II} senkrechten Grenzfläche des Halbringes ist dann auch leicht eine Gradeinteilung zur Einstellung für verschiedene α anzubringen.

Zum Ersatz für die so verlorene Schraubbarkeit um s_{II} bringen wir z in starre Verbindung mit dem Gleitstücke b, welches im festen zugehörigen Rahmen a beweglich ist, also dem System die zum Felde der Ebene $G_{II} G_{III}$ senkrechte Translation σ (Parallelverschiebbarkeit) sichert.

Ist hierbei speziell der Parameter $\mathfrak{p}_I$ von s_I (s'_I) Null, d. h. die Gabel z' um die Achse G_I von s_I (s'_{II}) einfach drehbar, was etwa durch die zylindrische Abglättung der Kontaktstellen der Spindel s_I (s'_I) und der Gabel z' nebst Anbringung von zylindrischen Wülsten als Hindernis gegen eine Seitenverschiebung der Gabel zu erreichen ist, so nennen wir unsere Vorrichtung *Drehschieber*. Wenn wir den Schraubschieber für $\alpha = 0$ einstellen, d. h. so, daß die Schraubenachse G_I nach G_{III} fällt, also zur gestatteten Translation senkrecht wird, können wir ihn als *aufrechte Schubschraube*, bezw. aufrechtes Schubrad ($\mathfrak{p}_I \gtrless 0$, bezw. $\mathfrak{p}_I = 0$) bezeichnen.

Indem wir die zulässige Schraubung und die durch ein zu σ senkrechtes Feld f dargestellte Schiebung in verschiedenen Verhältnissen zusammensetzen, erhalten wir alle Schraubungen des zugehörigen für die Beweglichkeit charakteristischen linearen Schraubenbündels R_{II}. Die Achsen G desselben sind die zu G_I parallelen Strahlen der Ebene $\mu = G_I G_{II}$, d. h. durch Komponierung der gestatteten Grundbewegungen

---

1) Wir nehmen hier $\alpha \gtrless 0^0$; $\alpha = 0^0$ soll sogleich unter 2'., $\alpha = 90^0$ unter 2'' erörtert werden.

schrauben wir stets — bei festem Schubrahmen a — die Gabel z' und jeden mit ihr starr verbundenen Körper um eine Achse G des obigen Parallelbüschels und zwar schrauben wir um diese Achse mit einer Ganghöhe $\mathfrak{h} = 2\pi\mathfrak{p}$, welche wie der Parameter $\mathfrak{p}$ selbst nach der einen Seite von G_I zu-, nach der anderen abnimmt, proportional der Entfernung e von G und G_I; denn es gilt

$$\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I = e \operatorname{tg} \alpha,$$

das „Parametergefälle“ $\frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I}{e}$ ist gleich der Tangente des Einstellwinkels α.

Da $\alpha \gtrless 0$[1]), gibt es im Büschel auf der einen Seite von G_I in der Entfernung $e = (-)\,\mathfrak{p}_I \operatorname{cotg} \alpha$ (entsprechend $\mathfrak{p} = 0$) *einen* Strahl G_0, um welchen als Achse die Beweglichkeit unseres Schraubschiebers der Gabel z' eine einfache Drehung gestattet.

Die gleichen Bewegungen eines Körpers wie durch den *Schraub*schieber, kann man also ebenfalls durch einen für dasselbe α eingestellten *Dreh*schieber erhalten, welcher bei gleicher Schubrichtung (σ) mit seiner Drehungsachse G_I nach G_0 gebracht wird: Beide Vorrichtungen in dieser Parallelstellung bieten dem starren Körper die gleichen Nachbarlagen, die gleiche Beweglichkeit, nur sind die beiden unteren Gabeln beider an anderen Stellen des beweglichen Körpers festgemacht.

Das *Reziprokalgebüsch* P_{IV} hat zu Achsen Γ alle (zum Felde f der Ebene $\nu = G_{II} G_{III}$ parallelen, also) zu σ senkrechten Geraden, jede behaftet mit einem Parameter $\mathfrak{p}'$, welcher entgegengesetzt gleich ist dem Parameter $\mathfrak{p}$ der von ihr getroffenen Geraden G des obigen als Achsenort zu R_{II} gehörigen Parallelbüschels $G_I G_0$ in der Ebene $\mu = G_I G_{II}$. Von allen Geraden der Ebene μ, oder auch nur parallel zu ihr, zählen nur die (senkrechten gemeinsamen Transversalen aller Strahlen des Parallelbüschels, nämlich die) in μ gelegenen Parallelen Γ^* zu G_{II} als Achsen Γ der an z' unwirksamen Dynamen, jede belegbar mit jedem beliebigen Parameter. Zu P_{IV} gehört auch das Büschel der zu G_I parallelen Felder φ; diese stellen die bezüglich z' unwirksamen Drehmomente vor. Jedem konstanten Werte von $\mathfrak{p}'$ entsprechen in P_{IV} als zugehörige Achsen Γ die zu f parallelen Transversalen jener Achse G im obigen Parallelbüschel, welche im Gebiete R_{II} zum Parameter $\mathfrak{p} = -\mathfrak{p}'$ gehört. Unwirksam sind hiernach von den einfachen Kräften ($\mathfrak{p}' = 0$) nur jene zu f parallelen — d. h. zu σ senkrechten — Kräfte Γ_0, welche G_0 schneiden.

1) Vergl. S. 242 Anm. 1.

Ein hierher passendes Beispiel ist die Drehung der Pappendeckelblätter eines Bilderbuches, welches ein Kind im Eisenbahnwagen auf einem schrägen Pulte liegen hat und umblättert. Setzt man die Translation σ des Wagens mit der Drehbewegung eines Blattes um die im Buchrücken gelegene Achse G_0 in verschiedenen Verhältnissen zusammen, so kann man in einem bestimmten Augenblick dem Pappendeckel dieselbe Beweglichkeit sichern, d. h. dieselben Nachbarlagen zugänglich machen, wenn man sich den Wagen und das Pult wegdenkt und das Blatt starr mit der Gabel z' eines durch σ und $G_I = G_0$ völlig orientierten Drehschiebers verbindet, dessen Rahmen a man feststellt.

2'.

Insbesondere bei dem für $\alpha = 0$, also „aufrecht" eingestellten Schraubschieber (aufrechte Schubschraube) gelangt G_I nach G_{III}, und es gehört im Gebiete R_{II} zu allen Achsen G des Parallelbüschels (von G_I in $\mathfrak{E} = \mu = \nu = G_I G_{II} = G_{II} G_{III}$) derselbe Parameter; das Feld f liegt jetzt in der Ebene $\mu = \nu = \mathfrak{E}$ und ist hiernach R_{II} und P_{IV} gemeinsam, weshalb beide Gebiete jetzt im Gegensatze zum allgemeinen Falle 2. in einem Gewebe R_V enthalten sind.

Als Achsen Γ von Dynamen des Reziprokalgebüsches P_{IV}, welche bezüglich der Gabel z' unwirksam sind, treten alle[1]) zu $\mathfrak{E}$ parallelen Geraden auf. Ist e der Abstand einer solchen Geraden von $\mathfrak{E}$ und ϑ ihr Winkel mit G_I, so gilt

$$\mathfrak{p}' + \mathfrak{p}_I = e \operatorname{tg} \vartheta,$$

woraus sich für jede solche Achse der Parameter $\mathfrak{p}'$ ergibt.

Zu einem bestimmten Werte dieses Parameters $\mathfrak{p}'$ gehören als Achsen Γ die Strahlen einer besonders ausgearteten linearen Kongruenz mit in unendlicher *Ferne* (an f) *zusammengerückten* Leitlinien:

Ihre Strahlen erhalten wir durch Parallelverschiebung in der Richtung G_{II} (oder einer anderen Richtung von $\mathfrak{E}$) aus den Kanten einer gleichseitig-parabolischen Regelschar, nämlich der zu $\mathfrak{E}$ parallelen auf einem (jeden) Paraboloide mit G_{II} (oder einer anderen in $\mathfrak{E}$ zu G_{II} parallelen Γ^*) und einer diese schneidenden Geraden $\mathfrak{G}$ — von der zu $\mathfrak{E}$ senkrechten Richtung σ — als Scheitelgeraden und mit der Verteilungskonstante[2])

$$\mathfrak{p}' + \mathfrak{p}_I.$$

Die zu $\mathfrak{p}' = 0$ gehörige unter diesen Kongruenzen gibt uns die sämtlichen in endlicher Entfernung befindlichen *einfachen* Kräfte an, welche auf die Gabel z' ebensowenig wirken können als die $\mathfrak{p}' = \infty$ entsprechenden Felder φ (Drehmomente) der zu G_I parallelen Ebenen.

---

1) Außer den nicht in $\mathfrak{E}$ gelegenen Parallelen zu G_{II}, welche wir als zum Parameter ∞ gehörig nicht als eigentliche Achsen ansehen, während die derart in $\mathfrak{E}$ liegenden Γ^* zu *beliebigem* Parameter gehören.

2) Vergl. S. 241 Anm. 2.

Insbesondere zum Parameter $\mathfrak{p}_I' = -\mathfrak{p}_I$ gehören alle Geraden der Ebene $\mathfrak{E}$ und alle im Raume zu G_I gelegten Parallelen, wobei wieder wie bei 2. die in der Ebene $\mathfrak{E}$ (μ bei 2.) zu G_{II} gelegten Parallelen Γ^* mit beliebigem Parameter belegbar sind.

Für $\mathfrak{p}_I \gtrless 0$ paßt hierher als bequemste Form der

aufrechten Schubschraube

die aus der Figur 1 entnommene Schraubenmutter m, angebracht (etwa wie beim oberen Teile der Fig. 2) an dem mit Windungen versehenen Teile der mit b starr verbundenen Zylinderstange t, wenn b im Schubrahmen a als Gleitstück beweglich und die Richtung der Stangenachse (t) zur Gleitrichtung σ senkrecht steht. m hat gegen a die verlangte Beweglichkeit.

Aufrechtes Schubrad m_0.

Für $\mathfrak{p}_I = 0$ könnten wir den als Rad um t (an dem glatten Zylinderteil Fig. 2) drehbaren Muff m_0 aus der Figur 1 verwenden, wenn wir die Verschiebungen in der Richtung ϱ der Achse von t verhinderten. Letzteres tun wir etwa einmal durch einen Wulst und nach der anderen Seite hin durch einen in der Richtung ϱ durch eine Nut an t geführten Gleitkörper c. Letztere Anordnung hat für uns u. a. den Vorteil, daß wir m_0 später als Muff m^* am Stift t verwenden und in den Figuren 2 und 4 mehrfach schieben können, falls wir c emporheben und dort etwa durch die Stellschraube h fixieren.

Als zu $\mathfrak{p}_I = 0$ hierher passende Beispiele haben wir: Eine um die Angelachse G_0 drehbare Tür in einem in der Richtung σ verschiebbaren Eisenbahnwagen, da G_0 zu σ senkrecht steht, oder ein Riegel mit wagrechter Prismenführung, angebracht am Flügel eines Haustores.

2″.

Muff am Stift.

Der Fall $\alpha = 90^0$ beim Schraubschieber macht die Gabel s' der Figur 2 um die durch M in der Richtung σ gelegte Achse $\mathfrak{G}$ — unter Hinzunahme der Translation — mit beliebigem Parameter schraubbar ($\mathfrak{G} = G^*$), also drehbar (gemäß $\mathfrak{p} = 0$ und dem Stabe l auf G^*) *und* parallel verschiebbar (entsprechend $\mathfrak{p} = \infty$ und dem Felde f senkrecht zu G^*). Diese Beweglichkeit ist sicherlich bequemer veranschaulicht durch einen hohlzylindrischen Muff m^* (Fig. 3), einen Körper mit zylindrischer Ausbohrung[1]), der um einen angepaßten zylindrischen Stift t sich bewegen kann wie ein Ring am Finger. Ebensogut kann man natürlich den Muff fest und den Stift beweglich denken.

---

1) Dieser Körper kann etwa der in Fig. 1 als Drehrad verwendeten hohlzylindrischen Scheibe m_0 kongruent sein.

Andere Achsen G als G^* kommen beim hierhergehörigen Schraubenbüschel R_{II} nicht vor.

Die Achsen Γ des Reziprokalgebüsches P_{IV} reduzieren sich auf die zu beliebigem Parameter gehörigen senkrechten Transversalen Γ^* der Achse G^* von m und t. Das Feldbüschel parallel G^* gehört auch zu P_{IV}. R_{II} und P_{IV} ergänzen sich zum Schraubengebiete des Raumes.

3.

Endlich kann jede der beiden ein Schraubenbüschel R_{II} bestimmenden Grundschrauben ein Feld sein und es wird R_{II} zum Feldbüschel, wo man von gar keinen eigentlichen Schraubenachsen G zu sprechen hat. Zu P_{IV} gehören als Achsen Γ alle mit beliebigem Parameter belegbaren zur Achse des Feldbüschels R_{II} *parallelen Geraden*, sowie alle Felder: R_{II} ist in P_{IV} enthalten. Als Beispiel diene ein Riegel mit Prismenführung an einer Schublade oder ein Schubfenster im beweglichen Eisenbahnwagen. Unser typischer Repräsentant soll der

Doppelschieber

sein, den wir erhalten, wenn wir den Rahmen a, in welchem ein Gleitstück b in der Richtung σ verschiebbar ist (Fig. 4, dort ohne b), selbst als — etwa in der zu σ senkrechten Richtung τ bewegliches — Gleitstück in einem festen Rahmen a_1 verwenden. Jedem an b befestigten Körper Z kann man nun bequem eine jede aus den Translationen σ (b in a) und τ (b samt a in a_1) zusammengesetzte, zur Doppelrahmen-Normalen ϱ senkrechte Schiebung erteilen und nur eine solche.

Hiermit sind alle möglichen Fälle einer Beweglichkeit II erschöpft, wir gehen über zum

Freiheitsgrad III.

1.

Sollen Achsen G *aller* Richtungen in dem für die Beweglichkeit charakteristischen „Schraubenbündel" R_{III} vorkommen, so verwenden wir als typischen Repräsentanten den

Schraubendrilling

(Fig. 1, m an z', k, z), welchen wir aus einer zu beliebigem Parameter gehörigen Schraubenmutter m dadurch erhalten, daß wir sie an der Schaftstange t der Gabel z' des Schraubenzwillings (an der Stelle, wo t mit einem gemäß $\mathfrak{p}_{III}$ ansteigenden Gewinde versehen ist) möglichst reibungslos beweglich machen; m und jeder damit verbundene Körper erfreut sich nun der gewünschten Freiheit III, indem er um die sich in p senkrecht schneidenden (Hauptachsen oder) Achsen der Haupt-

schrauben $G_I(\mathfrak{p}_I)$, $G_{II}(\mathfrak{p}_{II})$, $G_{III}(\mathfrak{p}_{III})$ beweglich wird. Setzen wir diese zulässigen Hauptschraubungen in verschiedenen Verhältnissen zusammen, so erhalten wir Schrauben um Achsen G aller Richtungen.

Zu jeder Richtung gehört nur eine Achse G. Diese geht im Falle *verschiedener* Hauptparameter $\mathfrak{p}_i$ ($i = \mathrm{I, II, III}$) allerdings nicht mehr wie die Hauptachsen G_i, die Achsen unseres Koordinatensystems, durch den Ursprung p; wir werden die Lagen aller G alsbald besprechen, können uns aber auf den durch p zu den G gelegten Parallelen sogleich den in R_{III} jeweilig auf die zugehörige G entfallenden Parameter $\mathfrak{p}$ vom Anfange p aus abtragen und erhalten so die Parameterfläche[1])

$$(\mathfrak{P}) \ldots (x^2 + y^2 + z^2)^3 - (\mathfrak{p}_I x^2 + \mathfrak{p}_{II} y^2 + \mathfrak{p}_{III} z^2)^2 = 0$$

als Ort aller Endpunkte.

Zum mittleren der nach ihrer algebraischen Größe geordnet gedachten Hauptparameter $\mathfrak{p}_{II}$ gehört nicht G_{II} allein, sondern ein Büschelpaar mit G_{II} (der y-Achse) als gemeinsamem Strahle; die Zentren M und N dieser reellen sog. „Basisbüschel" liegen auf G_{II} im Abstande

$$e_{II} = \pm \sqrt{-(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I)}$$

vom Anfange p und ihre Ebenen μ, bezw. ν

$$(\mathfrak{p}_{III} - \mathfrak{p}_{II}) x^2 - (\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I) z^2 = 0$$

gehen durch G_{II} symmetrisch zu den Koordinatenebenen.

Als Achsenort gehören hierher die Kongruenzen Waelschs[2]) $K(G)$, die „linke" Kongruenz, erfüllt von den Achsen G des R_{III}, um welche s' geschraubt werden kann, und die „rechte" Kongruenz $K(\Gamma)$ der unwirksamen Dynamen im Reziprokalgebiete P_{III}. Beide sind zueinander bezüglich der Koordinatenebenen symmetrisch. Wenn wir feststellen, daß bei der Spiegelung einer Schraube $G(\mathfrak{p})$ an einer Ebene nicht bloß die Achse in ihr Spiegelbild übergeht, sondern auch

1) Fig. II in der Abhandlung des Verfassers in der Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 49, Heft 2 gibt ein *Bild* dieser Fläche. Ebenda S. 218 wird die Konchoidenschar der ($\mathfrak{P}$) bezüglich des Mittelpunktes p besprochen, welche zu jenen linearen Schraubenbündeln R_{III} gehören, die sich aus dem unseren durch Hinzufügung gleicher algebraischer Summanden zu den Parametern der Schrauben mit den alten Achsen G ergeben. Bezüglich der direkten Konstruktion der auf ($\mathfrak{P}$) fallenden Endpunkte auf den durch M gelegten Parallelen vergleiche S. 105 im 48. Band dieser Zeitschrift, 1. Heft. Wir gebrauchen das Wort „Parameterfläche" in ganz anderem Sinne als Study.

2) E. Waelsch „Über eine Strahlenkongruenz beim Hyperboloide", Wiener Sitzungsberichte 1887, 95. Band, S. 781.

der Parameter $\mathfrak{p}$ den entgegengesetzten Wert annimmt, so können wir sagen:

Die Reziprokalbündel R_{III} und P_{III} sind bezüglich der Hauptebenen symmetrisch. Beide haben im allgemeinen, durch *Verschiedenheit* der Hauptparameter gekennzeichneten Falle nur die Achsen $G_i = \Gamma_i$ $(i = \mathrm{I, II, III})$ der Hauptschrauben gemein, wobei die zugehörigen Hauptparameter $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}'_i$ der Reziprokalbündel durch die Gleichungen $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}'_i$ verbunden sind. R_{III} und P_{III} sind daher ergänzende Gebiete voneinander bezüglich des Schraubenraumes und sind es nur dann nicht, wenn einer dieser Hauptparameter Null wird, da sie im letzteren Falle die dann zum Stabe ausgeartete Hauptschraube gemein haben; im letzteren Falle liegen R_{III} und P_{III} in einem „Gewebe" R_V.

Die zum Hauptparameter $\mathfrak{p}'_{II}$ im P_{III} gehörigen reellen Basisbüschel, die beiden „rechten" $M(\nu)$ und $N(\mu)$, haben im Vergleiche mit zu jenen des R_{III}, den beiden „linken" $M(\mu)$ und $N(\nu)$ vertauschte Zentren *oder* Ebenen.

Die *einfachste Konstruktion* der Geraden $\genfrac{}{}{0pt}{}{G}{\Gamma}$ der Kongruenz $\left\{\begin{matrix} K(G) \\ K(\Gamma) \end{matrix}\right\}$, welche als *Achsen im Schraubenbündel* $\left\{\begin{matrix} R_{III} \\ P_{III} \end{matrix}\right\}$, d. h. als zu bestimmten Parametern gehörige Achsen von $\left\{\begin{matrix} \text{Schraubungen} \\ \text{Dynamen} \end{matrix}\right\}$ auftreten, welche $\left\{\begin{matrix} \text{durch die Beweglichkeit} \\ \text{auf die Bewegung} \end{matrix}\right\}$ des mit der Gabel z' starr verbundenen Körpers $\left\{\begin{matrix} \text{gestattet} \\ \text{unwirksam} \end{matrix}\right\}$ sind, ist die Konstruktion als kürzeste Transversale zweier beliebiger Strahlen der verschiedenen, zum mittleren Hauptparameter $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{p}_{II} \\ \mathfrak{p}'_{II} = -\mathfrak{p}_{II} \end{matrix}\right\}$ gehörigen $\left\{\begin{matrix} \text{„rechten"} \\ \text{„linken"} \end{matrix}\right\}$ Basisbüschel $\left\{\begin{matrix} M(\nu) \text{ und } N(\mu) \\ M(\mu) \text{ und } N(\nu) \end{matrix}\right\}$.

Die zu einem bestimmten Parameter $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}' \end{matrix}\right\}$ in $\genfrac{}{}{0pt}{}{R_{III}}{P_{III}}$ gehörigen Achsen $\left\{\begin{matrix} G \\ \Gamma \end{matrix}\right\}$ erfüllen hierbei die $\left\{\begin{matrix} \text{linke} \\ \text{rechte} \end{matrix}\right\}$ Regelschar des — bei Geltung der Gleichung $\mathfrak{p} + \mathfrak{p}' = 0$ mit dem Träger der zu $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{p}' \\ \mathfrak{p} \end{matrix}\right\}$ gehörigen Reziprokalachsen identischen — *Hyperboloides* $F(\mathfrak{p})$

$$F(\mathfrak{p}) = (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I)\,x^2 + (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{II})\,y^2 + (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{III})\,z^2 + (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I)(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{II})(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{III}) = 0,$$

welches für alle zwischen den extremen Hauptparametern $\mathfrak{p}_I$ und $\mathfrak{p}_{III}$ gelegenen Werte von $\mathfrak{p}$ reell ist. Einige der Gestalten dieser zu *verschiedenen* Werten von $\mathfrak{p}$ gehörigen, sog. „gleichbündigen" Hyperboloide hat der Verfasser nebst dem Bilde der von ihnen eingehüllten *Hydeschen Brennfläche* an anderer Stelle gegeben.[1]) Letztere Fläche wird

1) In der zweiten auf S. 229, Anm. 1 erwähnten Abhandlung des Verf. im 49. Bd. dieser Zeitschrift, 2. Heft. Die dortigen Figuren IV bis X sind Gestalten gleich-

von allen G und Γ doppelt berührt und außerdem noch doppelt durchsetzt.

Die „Gleichbündigkeit" zweier Hyperboloide ist hierbei rein geometrisch am einfachsten dadurch gekennzeichnet, daß beide Flächen 2. Ordnung ihre *Kreisschnittsebenen* (μ, ν) und das zu diesen Kreisschnittsebenen senkrechte *Fokalachsen*-Quadrupel (die Lote zu μ und ν durch M und N) gemein haben.

Statt des oben zur Transversalenkonstruktion der $\left\{\begin{matrix} G \\ \Gamma \end{matrix}\right\}$ benutzten Büschelpaares ($\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\text{II}}$, analog $\mathfrak{p}'_{\text{II}} = -\mathfrak{p}_{\text{II}}$) könnte man dort auch die $\left\{\begin{matrix} \text{rechte} \\ \text{linke} \end{matrix}\right\}$ Schar eines beliebigen der gleichbündigen Hyperboloide benutzen.

Durch jeden Raumpunkt gehen drei Achsen G und Γ, deren Parameter zu den drei Hyperboloiden $F(\mathfrak{p})$ gehört, welche den Punkt enthalten, entsprechend den drei Werten der obigen in $\mathfrak{p}$ kubischen Gleichung. Alle drei sind reell für die Punkte innerhalb und nur eine ist reell für Punkte außerhalb der Brennfläche: Diese drei $\left\{\begin{matrix} G \\ \Gamma \end{matrix}\right\}$ können konstruiert werden als gemeinsame Kanten jener beiden Orthogonalkegel, welche von den Loten aus dem Raumpunkte auf die Strahlen der beiden Büschel $\left\{\begin{matrix} M(\nu) \text{ und } N(\mu) \\ M(\mu) \text{ und } N(\nu) \end{matrix}\right\}$ erfüllt werden.

Ein einfaches Beispiel hierher gehöriger Beweglichkeit bietet die Faust eines in einem drehbaren Ringelspielwagen Sitzenden, wenn er dieselbe bei schräg gehaltenem starren Unterarm nur um eine beliebige der (zur Unterarmachse senkrechten) Achsen des Handwurzelgelenkes dreht. Sei $MN = G_{\text{II}}$ die durch das Handwurzelzentrum M gehende, zur Unterarmachse senkrechte Transversale der Ringelspielachse G und N ihr Schnittpunkt mit der letzteren. M und N sind die Zentren der Basisbüschel in den Ebenen μ (Ebene der Achsen des Handwurzelgelenkes) und ν (Ebene MG); G_{I} und G_{II} sind die Geraden, welche senkrecht zu $MN = G_{\text{II}}$ durch den Mittelpunkt p der Strecke MN (Länge $2e_{\text{II}}$) in den Richtungen der Halbierenden des Winkels α von μ und ν gezogen werden. Weist man G_{II} den Parameter $\mathfrak{p}_{\text{II}} = 0$, G_{I} und G_{III} aber die Parameter $\mathfrak{p}_{\text{I}} = -e_{\text{II}} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$, bezw. $\mathfrak{p}_{\text{III}} = e_{\text{II}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ (nach den Gleichungen S. 247) zu und orientiert einen Schraubendrilling gemäß den so angegebenen Hauptschrauben $G_i(\mathfrak{p}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, so könnte man nach starrer Verbindung der Schraubenmutter m

---

bündiger Hyperboloide, welche die Hydesche Fläche Fig. XI einhüllen. Von der letzteren Fläche hat E. W. Hyde: „On a surface of the sixth order which is touched by the axes of all screws reciprocal to three given screws" in den Annals of Mathematics, II. ser., vol. 2, N 4, Juli 1901, Mass. U. S. A. die ausführliche Diskussion und die Zeichnungen der drei Hauptschnitte gegeben. E. Study schmückt das Titelblatt seiner *„Theorie der Dynamen"* (Leipzig 1903) mit dem Bilde dieser Fläche. („Brennfläche einer aplanaren Kettenkongruenz" zu S. 489 etc.) Vergl. Anm. 1 S. 250.

mit dem festen Erdboden, der Faust durch Verbindung mit der Gabel z' dieselbe Beweglichkeit sichern, welche sie vordem bloß infolge der Funktionsfähigkeit der Handwurzelgelenke und der Ringelspielachse besaß.

Durch die Orientierung und vollzogene Hauptparameterbestimmung des Drillings ist die Frage nach der Lage aller Schraubenachsen G und Dynamenachsen Γ, sowie nach deren Parametern mit beantwortet und damit erst dem Bedürfnis nach Übersicht sämtlicher gestatteter Bewegungen genügt.

Ist einer der drei Hauptparameter Null, so wird die entsprechende zum Stabe ausgeartete Hauptschraube den Reziprokalgebieten R_{III} und P_{III} gemeinsam; beide Schraubenbüudel sind dann in einem Gewebe R_V enthalten. Die um die Achse G_{III} von Z in der Figur 1 drehbare Scheibe m_0 zeigt gegen die feste Gabel z diese Beweglichkeit.

Wird $\mathfrak{p}_{II} = \frac{1}{2}(\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{III})$ angenommen, so werden die Ebenen μ, ν der Basisbüschel zueinander senkrecht und stellen neue Symmetrieebenen der sich als Brennfläche ergebenden Hydeschen Sternballfläche dar, deren zweiter Hauptschnitt eine Astrois ist.[1])

Sind speziell zwei der Hauptparameter $\mathfrak{p}_i$ einander gleich, etwa

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} \; (\gtrless \mathfrak{p}_{III}),$$

so wird der Schraubendrilling „gleichsteigend" bezüglich G_I und G_{II}, welche sich in ihrem Büschel von den anderen Paaren Senkrechter gar nicht mehr auszeichnen; die gleichbündigen $F(\mathfrak{p})$ werden Umdrehungsflächen, erzeugbar durch Rotation der Kanten des zu $G_I(\mathfrak{p}_I)$ und $G_{III}(\mathfrak{p}_{III})$ gehörigen Zylindroids um seine Haupterzeugende G_{III}. Hierbei umhüllen sie die Hydesche Rotationsfläche.[2]) Die Parameterfläche entsteht dann durch Rotation aus einer Parameterkurve. Vergl. S. 237, Anm. 1.

Ist hierbei insbesondere $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} = 0$, d. h. der Drilling ein gewöhnlicher, aber um G_{III} schraubbarer Hookscher Schlüssel, so hat R_{III} mit P_{III} das die Drehungen des Schlüssels darstellende Stabbüschel R_{II} gemein, und beide sind zusammen in jenem Schraubengebüsche enthalten, welches R_{II} mit den Schraubungen beliebigen Parameters um G_{III} verbindet.

Ist endlich

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} = \mathfrak{p}_{III},$$

so ist der Drilling „vollkommen" gleichsteigend, alle Achsen $\begin{Bmatrix} G \\ \Gamma \end{Bmatrix}$ der $\begin{Bmatrix} R_{III} \\ P_{III} \end{Bmatrix}$ sind mit dem gleichen Parameter $\begin{Bmatrix} \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I \\ \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_I' = -\mathfrak{p}_I \end{Bmatrix}$ belegte Gerade

1) Vergl. in der Abhandlung des Verfassers im 49. Bd. dieser Zeitschr., 2. Heft die Fig. XIV zu diesem Sonderfalle. Dort ist S. 236 auch im allgemeinen Falle beliebiger $\mathfrak{p}_i$ eine kinematische Konstruktion der drei Hydeschen Hauptschnitte (Fig. XIII) gefunden worden.

2) Deren Meridianschnitt ebenda Fig. XV Kinematische Konstruktion S. 245.

... m_r in Prismenführung verschiebbaren ... der planare Drilling zum Planschrauber ... $z = 0$ zusammen, und wir erhielten den ... ähnenden Spezialfall von Schraubbarkeit ... $\mathfrak{p}_{\rm I}$ in einer Ebene $(z) = 0$. Wir können ... *verschiedener endlicher* Hauptparameter ... Fall des Unendlichwerdens von $\mathfrak{p}_{\rm I}$ (oder gar ... beim normalen Schraubdoppelschieber ... (S. 259, Fall 4) Berücksichtigung. Vgl. die

... eine Parameterfläche (S. 247, Anm. 1) über-

2.

... weglichkeit charakteristischen Schrauben- ... en G der verschiedenen zu einem ebenen ... vor, wobei aber nicht mehr wie bei 1′ (S. 251) ... Direktionsfeld der Achsen Γ des reziproken ... $P_{\rm III}$ gehörigen Feld φ identisch werden ... typisches Modell zur Verwirklichung dieser

...raubzwillings-Schieber.

... unserem Schraubschieber (Figur 2 und S. 241) vor, ... nung der Stellschraube h und des Halbrings r — ... reien und so dem Kreuzkörper k die früher vor- ... eglichkeit gegen die Gabel s zurückgeben, den ... als dem von $s_{\rm I}$ gleich:

$$\mathfrak{p}_{\rm I} = \mathfrak{p}_{\rm II}$$

... n so als *gleichsteigend* vorausgesetzten Schrauben- ... n zb in a) in der gemäß α[1]) adjustiert gezeichneten ... ken. Durch ein etwa am Fortsatze u von s' an- ... ht oder durch sonstige z. B. elastische Unterstützung ... Bequemlichkeit s' in dieser Lage ein stabiles Gleich- ... ffen. s' hat gegen den festen Rahmen a die verlangte

... bemerken wir nun im $R_{\rm III}$ die zu $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\rm II}$ gehörigen ... sen des Büschels $G_{\rm I} G_{\rm II}$ durch den Mittelpunkt M des ... k in der Ebene μ der Spindelachsen $G_{\rm I} G_{\rm II}$ desselben; ... Achsen der aus $s_{\rm II}$ $(\mathfrak{p}_{\rm II})$ und dem (zur Translation σ des

... er Figur 2 ist der Winkel α (vergl. S. 242) beliebig fest; die Fälle ... $\alpha = 0^\circ$ sollen später unter 2′ bezw. 2″ erörtert werden.

Die Parameterfläche reduziert sich auf die Parameterkurve des zum Drilling k gehörigen linearen Schraubenbündels $R_{II}[G_I(\mathfrak{p}_I), G_{II}(\mathfrak{p}_{II})]$, da es Achsen anderer Richtung als senkrecht zu G_{III} nicht gibt.

Es kommen nur jene Achsen G im Schraubenbündel R_{III} vor, welche in den Ebenen $z = \text{const.}$ (Grenzlage der gleichbündigen Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$) liegen, und zu einer der beiden in eine solche Ebene fallenden Kanten des Zylindroids von R_{II} parallel sind.[1]) Sie gehören zum gleichen Parameter wie die parallelen Zylindroidkanten in R_{II}. Die Γ gehen aus den G durch Spiegelung an der Ebene $z = 0$ hervor und verhalten sich analog zum Spiegelbilde des obigen Zylindroides, wobei man zugleich mit der Spiegelung zum negativen Parameter überzugehen hat, so daß jedes der beiden in eine Ebene $z = \text{const.}$ fallenden Parallelbüschel Γ zu einem der dorthin fallenden Parallelbüschel G normal steht und den entgegengesetzten Parameter von dem der Achsen G des anderen Parallelbüschels hat. Beide Parallelbüschelpaare sind nur reell, wenn die Ebene $z = \text{const.}$ zwischen den beiden Grenzebenen

$$z = \pm \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I)$$

liegt, wo die Büschel beider hineinfallender Paare von G (und normal hiezu von Γ) in eine der zu $G_I G_{II}$ symmetralen Richtungen zusammenrücken.

Das **Feld** $f = \varphi$ der Parallelebenen $z = \text{const.}$ ist R_{III} und P_{III} gemeinsam, so daß beide in einem Gewebe R_V liegen.

Die beiden Grenzebenen stellen die Überbleibsel der reellen Teile der Hydeschen Brennfläche vor. Als die eine Symmetrieebene der letzteren haben wir $z = 0$ anzusehen, während von den beiden anderen nur die parallele Lage zu $G_I G_{III}$, bezw. $G_{II} G_{III}$ feststellbar ist.

Wird einer der beiden Hauptparameter, etwa $\mathfrak{p}_I$, $= 0$, so haben R_{III} und P_{III} das Büschel der zu G_I in der Ebene $z = 0$ $(G_I G_{II})$ parallelen Stäbe noch außer dem Felde dieser Ebene gemein, R_{III} und P_{III} liegen in einem Gebüsche R_{IV}.

Als Beispiel gehört hierher ein hohlprismatischer Ring verschiebbar an einer prismatischen Türklinke, wobei auch Klinke und Türflügel um ihre Achsen $G_1 G_2$ drehbar sind. Die Hauptachsen $G_I G_{II}$ sind hierbei durch beliebige Parallelverschiebung der Symmetralen von $G_1 G_2$ in der eigenen Ebene, welche von G_I und G_{II} um $\frac{e}{2}$ abstehen möge, zu erhalten und es ist (vgl. S. 238) $\mathfrak{p}_{II} = -\mathfrak{p}_I = \frac{e}{2}$.

1) Diese Zylindroidkanten schließen mit G_I den durch $\sin 2\vartheta = \frac{2z}{\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I}$ bestimmten Winkel ϑ ein und den zwei sich ergebenden ϑ-Werten entsprechend findet man den zugehörigen Parameter aus der Gleichung $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I \cos^2\vartheta + \mathfrak{p}_{II} \sin^2\vartheta$.

Würden wir $\mathfrak{p}_{I} = \mathfrak{p}_{II} \gtrless 0$, den bei m_{∞} in Prismenführung verschiebbaren Drilling gleichsteigend annehmen, so würde der planare Drilling zum Planschrauber (S. 257), es fielen beide Grenzebenen in $z = 0$ zusammen, und wir erhielten den später noch unter Typus 2″ (S. 256) zu erwähnenden Spezialfall von Schraubbarkeit um alle Achsen gleicher Ganghöhe (Pr. $\mathfrak{p}_{I}$) in einer Ebene $(z) = 0$. Wir können deshalb für unseren Typus 1′ den Fall *verschiedener endlicher* Hauptparameter ($\mathfrak{p}_{I} \gtrless \mathfrak{p}_{II}$) reservieren, denn auch der Fall des Unendlichwerdens von $\mathfrak{p}_{I}$ (oder gar auch noch von $\mathfrak{p}_{II}$) findet später ohnedies beim normalen Schraubdoppelschieber (S. 258, Fall 3′) und Schieberdrilling (S. 259, Fall 4) Berücksichtigung. Vgl. die Schlußbemerkung bei 2″ S. 257.

In den nun folgenden Fällen ist eine Parameterfläche (S. 247, Anm. 1) überhaupt nicht mehr zu gebrauchen.

2.

Kommen in dem für die Beweglichkeit charakteristischen Schraubenbündel R_{III} nur Schraubenachsen G der verschiedenen zu einem ebenen Felde φ parallelen Richtungen vor, wobei aber nicht mehr wie bei 1′ (S. 251) das zu R_{III} gehörige Feld f (Direktionsfeld der Achsen Γ des reziproken Bündels P_{III}) mit dem zu P_{III} gehörigen Feld φ identisch werden soll, so verwenden wir als typisches Modell zur Verwirklichung dieser Bewegungen den (schiefen)

Schraubzwillings-Schieber.

Dieser liegt schon in unserem Schraubschieber (Figur 2 und S. 241) vor, falls wir — durch Entfernung der Stellschraube h und des Halbrings r — die Spindel $s_{II}(s'_{II})$ befreien und so dem Kreuzkörper k die früher vorhanden gewesene Beweglichkeit gegen die Gabel z zurückgeben, den Parameter $\mathfrak{p}_{II}$ von s_{II} als dem von s_{I} gleich:

$$\mathfrak{p}_{I} = \mathfrak{p}_{II}$$

annehmen und den so als *gleichsteigend* vorausgesetzten Schraubenzwilling (z' an k an zb in a) in der gemäß α[1]) adjustiert gezeichneten Lage belassen denken. Durch ein etwa am Fortsatze u von z' angebrachtes Gewicht oder durch sonstige z. B. elastische Unterstützung können wir zur Bequemlichkeit z' in dieser Lage ein stabiles Gleichgewicht verschaffen. z' hat gegen den festen Rahmen a die verlangte Beweglichkeit.

Vor allem bemerken wir nun im R_{III} die zu $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{II}$ gehörigen Schraubenachsen des Büschels $G_{I} G_{II}$ durch den Mittelpunkt M des Kreuzkörpers k in der Ebene μ der Spindelachsen $G_{I} G_{II}$ desselben; ebenso die Achsen der aus s_{II} ($\mathfrak{p}_{II}$) und dem (zur Translation σ des

1) In der Figur 2 ist der Winkel α (vergl. S. 242) beliebig fest; die Fälle $\alpha = 90^{0}$ und $\alpha = 0^{0}$ sollen später unter 2′ bezw. 2″ erörtert werden.

Schiebers b senkrechten) Felde f der Ebene $\nu = G_{II} G_{III}$ abzuleitenden Schrauben des Parallelbüschels zu G_{II} in ν (Figur 2', dort sind die G voll, die Γ gestrichelt).

In R_{III} gehören zu $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{II}$ die Strahlen der „linken Basisbüschel" $M(\mu)$ und $N(\nu)$, wenn mit N der unendlich ferne Punkt von G_{II} und mit μ die Ebene $G_I G_{II}$ bezeichnet wird. Hieraus folgt, daß im Reziprokalgebiet P_{III} zum Parameter $\mathfrak{p}' = -\mathfrak{p}_{II}$ die Strahlen der „rechten Basisbüschel" $M(\nu)$ und $N(\mu)$ gehören, welche im Gegensatz zu den vorigen in der Figur 2' durch gestrichelte Linien angedeutet sind. Das linke Büschelpaar geht ins rechte über bei einer Spiegelung an einer der beiden Symmetrieebenen von μ und ν; hierbei spiegelt sich $G_I(\mathfrak{p}_{II})$ nach $\Gamma_I(-\mathfrak{p}_{II})$ ab.

Hieraus ergibt sich die Konstruktion aller Achsen $\begin{cases} G \\ \Gamma \end{cases}$ im $\begin{cases} R_{III} \\ P_{III} \end{cases}$ als zum Felde $\begin{cases} \varphi \\ f \end{cases}$ der Ebene $\begin{cases} \mu \\ \nu \end{cases}$ parallele Gerade, welche die Strahlen des Büschels $\begin{cases} M(\nu) \\ M(\mu) \end{cases}$ senkrecht schneiden, und es folgt:

Die in unserem Falle ausgeartete Kongruenz $\begin{cases} K(G) \\ K(\Gamma) \end{cases}$ von Achsen $\begin{cases} G \\ \Gamma \end{cases}$ des Schraubenbündels besteht aus den zur Tangentialebene $\begin{cases} \mu \\ \nu \end{cases}$ parallelen *Tangenten des Kegels* 2. Ordnung $\mathfrak{K}_d$, welcher die Lote durch M zu μ und ν zu Fokalachsen hat.[1]) Mit anderen Worten:

Alle $\begin{cases} G \\ \Gamma \end{cases}$ *berühren den festen Kegel* $\mathfrak{K}_d$ und sind *senkrecht zu den Fokalachsen* desselben.

---

1) Fokalachsen sind Gerade, durch welche zwei (imag.) Tangentialebenen des Kegels gehen, welche auch den unendlich fernen (absoluten) Kugelkreis berühren. Oder: Gerade mit durchlegbaren durchwegs zu einander senkrechten Paaren konjugierter Ebenen. In den derzeit vorliegenden Darstellungen außer in E. Studys „Geometrie der Dynamen" scheint dieser Kegel $\mathfrak{K}_d$ (Reyes Kathegorie d der Spezialkegel 2. O. *mit zwei zu den Fokalachsen senkrechten Tangentialebenen* $\mu\,\nu$) als Brennfläche der ausgearteten Kongruenz $\begin{cases} K(G) \\ K(\Gamma) \end{cases}$ von Achsen $\begin{cases} G \\ \Gamma \end{cases}$ nicht Beachtung gefunden zu haben. Dies ist umso auffallender, als er offenbar als Rudiment der kegelförmigen Partie der Hydeschen Brennfläche (vgl. S. 248) in der Umgebung der reellen Knotenpunkte M und N anzusehen ist, wenn nämlich der Mittelpunkt p der gleichbündigen Hyperboloide auf G_{II} in die Ferne rückt, wobei G_I und G_{III} dies ebenfalls in den Symmetrieebenen von μ und ν tun. (Die auf $G_I G_{II}$ bei diesen Grenzübergang entfallenden Hauptparameter haben wir uns von $\mathfrak{p}_{II}$ nach verschiedenen Seiten um derartige stets wachsende Differenzen abweichend zu denken, daß der Quotient dieser Differenzen gleich $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$ bleibt, wenn α den Winkel von μ und ν bedeutet.)

Ordnet man die Achsen $\begin{cases} G \\ \Gamma \end{cases}$ nach den ihnen im Schraubenbündel zukommenden Parametern, so ergibt sich:

Zu jedem Parameterwerte $\begin{Bmatrix} \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}' = -\mathfrak{p} \end{Bmatrix}$ gehört ein hyperbolisches Paraboloid $F(\mathfrak{p})$, dessen $\begin{Bmatrix} \text{linke} \\ \text{rechte} \end{Bmatrix}$ Regelschar von den Schraubenachsen $\begin{cases} G \\ \Gamma \end{cases}$ dieses Parameters $\mathfrak{p}$ erfüllt ist. Jedes dieser Paraboloide ist dem Kegel $\mathfrak{K}_d$ längs einer Hyperbel $\mathfrak{C}$[1]) umschrieben und besitzt Scheitelgerade $G_I(\mathfrak{p})$ und $\Gamma_I(\mathfrak{p}' = -\mathfrak{p})$, welche aus den Berührungskanten G_I und Γ_I des $\mathfrak{K}_d$ mit μ und ν durch Parallelverschiebung um

$$e = (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{II}) \operatorname{cotg} \alpha$$

hervorgehen.

Eines dieser „gleichbündigen“ Paraboloide gehört zum Werte $\mathfrak{p} = 0$, die Erzeugenden der $\begin{Bmatrix} \text{linken} \\ \text{rechten} \end{Bmatrix}$ Schar desselben sind $\begin{Bmatrix} \text{jene Achsen, um welche die Gabel } s' \text{ des Schraubenzwillings-Schiebers } (\alpha) \text{ einfach drehbar ist.} \\ \text{die Träger der einfachen Kräfte, welche nicht imstande sind, auf die Gabel } s' \text{ zu wirken.} \end{Bmatrix}$ Fällt der Nullwert des Parameters auf $\mathfrak{p}_{II}$, so treten an Stelle dieser $\begin{Bmatrix} \text{linken} \\ \text{rechten} \end{Bmatrix}$ Schar die beiden $\begin{Bmatrix} \text{linken} \\ \text{rechten} \end{Bmatrix}$ Basisbüschel; der diesen gemeinsame Stab auf G_{II} ist dann auch den Bündeln R_{III} und P_{III} gemein, weshalb sich die letzteren nicht mehr zum Schraubengebiet des Raumes ergänzen, sondern in einem Gewebe R_V liegen.

Außer dem Felde $\begin{cases} f \\ \varphi \end{cases}$ der Ebene $\begin{cases} \nu \\ \mu \end{cases}$ ist kein anderes mehr in $\begin{cases} R_{III} \\ P_{III} \end{cases}$ enthalten, d. h. keine andere als die zu f senkrechte Translation σ ist der Gabel s' gestattet, und jedes Drehmoment wirkt auf die Gabel s' außer dem einzigen Momente φ in der Ebene μ der Spindelachsen des Kreuzkörpers.

Ein einfaches hierher gehöriges Beispiel wurde S. 230 Anm. 2 erwähnt.

2'.

Stellen wir insbesondere den Schraubzwillings-Schieber (Figur 2) für $\alpha = 90^0$ ein, d. h. bringen wir G_I in die zu σ parallele Lage $\mathfrak{G}$,

---

1) Zwei solche „gleichbündige“ Paraboloide $F(\mathfrak{p})$ durchdringen sich in einer Hyperbel $\mathfrak{C}$, deren Ebene zur Hauptachse G_{II} senkrecht steht und welche die Spuren von μ und ν zu Asymptoten hat. Diese treten an die Stelle der bezüglich μ und ν konzyklischen sphärischen Kurven 4. Ordnung $\mathfrak{C}$, in welchen sich beim vorigen Falle zwei gleichbündige Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ durchsetzten.

so wird das Feld $\begin{cases} f \\ \varphi \end{cases}$ der Ebene $\begin{cases} \nu \\ \mu \end{cases}$ senkrecht zu $\begin{cases} G_{\mathrm{I}} \\ G_{\mathrm{III}} = \Gamma_{\mathrm{I}} \end{cases}$, es entfällt also auf diese Achse im Bündel $\begin{cases} R_{\mathrm{III}} \\ P_{\mathrm{III}} \end{cases}$ jeder beliebige Parameter.

Wir können mit dem so erhaltenen Instrumente, dem

normalen Schraubzwillings-Schieber ($\alpha = 90^0$),

jene Fälle der Beweglichkeit III herstellen, bei welchen *alle Achsen* $\begin{cases} G \\ \Gamma \end{cases}$ des $\begin{cases} R_{\mathrm{III}} \\ P_{\mathrm{III}} \end{cases}$ dieselbe kürzeste Transversale $\begin{cases} \Gamma_{\mathrm{I}} \\ G_{\mathrm{I}} \end{cases}$ haben. Der obige Kegel $\mathfrak{K}_d$ ist in dieses Paar Senkrechter $G_{\mathrm{I}}\Gamma_{\mathrm{I}}$ ausgeartet. Alle gleichbündigen Paraboloide $F(\mathfrak{p})$ werden für alle Werte $\mathfrak{p}$ gleichseitig mit G_{I} und Γ_{I} als gemeinsamen Scheitelgeraden und der Verteilungskonstante (vgl. S. 241 Anm. 2) $\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}$.

Der Nullfall von $\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}$ hat die gleichen Folgen wie oben bei 2; er gehört zum gewöhnlichen, an b befestigten Hookschen Schlüssel, dessen Gabelstangenachsen gemäß $\alpha = 90^0$ auf dieselbe Gerade G_{III} fallen.

Auf $\begin{cases} G_{\mathrm{I}} \\ \Gamma_{\mathrm{I}} \end{cases}$ entfällt im $\begin{cases} R_{\mathrm{III}} \\ P_{\mathrm{III}} \end{cases}$ jeder beliebige Parameter, sie ist die einzige Gerade von dieser Eigenschaft $\begin{pmatrix} G_{\mathrm{I}} = G^* \\ \Gamma_{\mathrm{I}} = \Gamma^* \end{pmatrix}$ im Bündel.

Die gleiche Beweglichkeit hat bei vollkommen festgestellter Gabel z auch die Gabel z' eines modifizierten Hookschen Schlüssels, dessen *eine* Spindel $s_{\mathrm{I}}(s'_{\mathrm{I}})$ am Kreuzkörper k durch einen zylindrischen Stift ersetzt wurde, welcher in den hohlzylindrischen Gleitlagern von z' innerhalb eines gewissen Spielraumes drehbar *und* verschiebbar ist. Die Stiftachse spielt dieselbe Rolle wie soeben $G_{\mathrm{I}} = G^*$ ($\mathfrak{p}$ beliebig) und die andere Spindelachse an k jene von $G_{\mathrm{II}}(\mathfrak{p}_{\mathrm{II}})$.

Ebenso ist es etwa mit einem Ring, den man bei fester Mittelhand am untersten Fingerglied drehen und verschieben kann ($G_{\mathrm{I}} = G^*$), während der Finger selbst sich um die durch die Fingerwurzeln gehende Achse $G_{\mathrm{II}}(\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} = 0)$ bewegt.

Zu $\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} = 0$ gehört hier auch die Beweglichkeit der *Klinke einer Tür*, welche in ihren Angeln noch um ein gewisses Stück gehoben werden kann. $G_{\mathrm{I}} = G^*$ Angelachse, G_{II} parallel zur Klinkenachse durch den zur letzteren nächsten Punkt von G_{I}.

2″.

Stellen wir andererseits den Schraubzwillings-Schieber — bei wie oben ($\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}$) gleichsteigenden Schraubspindeln des Kreuzkörpers — *gemäß* $\alpha = 0$ ein, also derart, daß (Figur 2) G_{I} in die Lage $G_{\mathrm{III}} = G_{\mathrm{I}}$ kommt, die Translationsrichtung σ zur Ebene $\mathfrak{E}$ der Spindelachsen am Kreuzkörper k *senkrecht* wird, so werden *alle Geraden* $\begin{cases} G \\ \Gamma \end{cases}$ der Ebene $\mathfrak{E}$ Achsen des Schraubenbündes $\begin{cases} R_{\mathrm{III}} \\ P_{\mathrm{III}} \end{cases}$, belegt mit dem gleichen Parameter $\begin{Bmatrix} \mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} \\ \mathfrak{p}' = -\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = -\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} \end{Bmatrix}$.

Andere Achsen oder Achsen anderen Parameters kommen nicht vor. Den für $\alpha = 0$ eingestellten Schraubzwillings-Schieber nennen wir deshalb einen mit Bezug auf $\mathfrak{E}$ als Hauptebene und $\mathfrak{p}_I$ als Parameter orientierten

Planschrauber.

Eine andere Form desselben stellt auch die längs der Stange t an z' verschiebbare Scheibe m_∞ am gleichsteigend gedachten Zwilling der Figur 1 vor.

Das Feld von $\mathfrak{E}$ wird den Reziprokalbündeln R_{III} und P_{III} gemeinsam, so daß beide in einem Gewebe enthalten sind, ja sogar im Nullfalle des Parameters geometrisch identisch werden. Letzterer Fall trifft zu bei den Handwurzelbewegungen der Faust im Eisenbahnwagen, wenn wir den Unterarm starr in der Richtung der Fahrt ausgestreckt halten.

Der Fall 2'' ist ebensogut als ein besonderer Fall von 1' als von 2 (nicht aber von 2') anzusehen; vgl. S. 251. Wollte man den allgemeinen Fall 1' ($\mathfrak{p}_I \gtrless \mathfrak{p}_{II}$) auch hier unterbringen, so hätte dies keine Schwierigkeit; es dürften aber die Spindeln $s_I s_{II}$ am Kreuzkörper der Figur 2 nicht gleichsteigend angenommen werden, was wir jedoch bei 2 (2', 2'') durchweg taten und woran wir festhalten wollen. Vgl. S. 251 Anm. 3.

3.

Kommen nur Achsen einer Richtung im Bündel R_{III} vor und liegen diese nicht in einer Ebene[1]), so erfüllen alle G ein *Parallelstrahlenbündel* und der Parameter jeder G kann durch lineare Interpolation aus den Parametern dreier nicht in einer Ebene gelegenen Strahlen des Bündels erhalten werden. Zur Verwirklichung benützen wir den schiefen (zu α gehörigen)

Schraub-Doppelschieber.

Diesen erhalten wir in der Figur 2, wenn wir einerseits mit Hilfe des Halbringes r und der Stellschraube h wie beim Schraubschieber (S. 241) den Kreuzkörper k *starr* mit der Gabel z verbinden[2]), andrerseits aber die Beweglichkeit dadurch erweitern, daß wir den Schubrahmen a des Gleitstückes b selbst wieder als Gleitstück in der Richtung τ im festen Rahmen a_1 der Figur 4 verwenden.

Ebenso wie G_I im Schraubenbündel R_{III} zu dem Parameter $\mathfrak{p}_I$ gehört, ist die mit der Gabelstange G_{III} zusammenfallende Achse Γ_I

---

1) Letzterer Fall soll unter 3'' betrachtet werden.

2) Hierbei kann wieder wie beim einfachen Schraubschieber mit Hilfe der Gradeinteilung am Halbringe r der Winkel α von G_I mit $\Gamma_I = G_{III}$ beliebig festgestellt werden; die Fälle $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^\circ$ kommen sogleich unter 3' und 3'' zur Besprechung.

im Reziprokalbündel P_{III} mit dem entgegengesetzten Parameter $\mathfrak{p}'_I = -\mathfrak{p}_I$ zu belegen. Zum $\begin{Bmatrix} R_{III} \\ P_{III} \end{Bmatrix}$ gehören alle zu $\begin{Bmatrix} \Gamma_I \\ G_I \end{Bmatrix}$ parallelen Felder; beiden Bündeln R_{III} und P_{III} ist also stets das zu G_{II} senkrechte Feld $\mathfrak{f}$ der Ebene $\mathfrak{E} = G_I \Gamma_I$ gemein, R_{III} und P_{III} liegen in einem Gewebe R_V. Wegen dieses Feldes $\mathfrak{f}$ gehört zum Parameter $\begin{Bmatrix} \mathfrak{p}_I \\ \mathfrak{p}'_I = -\mathfrak{p}_I \end{Bmatrix}$ im Bündel $\begin{Bmatrix} R_{III} \\ P_{III} \end{Bmatrix}$ nicht $\begin{Bmatrix} G_I \\ \Gamma \end{Bmatrix}$ allein, sondern *alle* zu $\begin{Bmatrix} G_I \\ \Gamma_I \end{Bmatrix}$ *parallelen* Geraden $\begin{Bmatrix} G(\mathfrak{p}_I) \\ \Gamma(\mathfrak{p}'_I) \end{Bmatrix}$ der Ebene $\mathfrak{E}$. Alle übrigen Achsen Γ in P_{III} sind parallel zu Γ_I, wie die G des R_{III} zu G_I, gehören aber zu anderem Parameter:

Alle zum beliebigen konstanten Parameter $\begin{Bmatrix} \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}' = -\mathfrak{p} \end{Bmatrix}$ gehörigen Achsen $\begin{Bmatrix} G\text{, um welche bei festem Rahmen } a_1 \text{ die Gabel } s' \text{ geschraubt werden kann,} \\ \Gamma\text{, welche bezüglich der Gabel } s' \text{ unwirksame Dynamen vorstellen,} \end{Bmatrix}$ sind parallel zu $\begin{Bmatrix} G_I \\ \Gamma_I \end{Bmatrix}$ und *liegen in einer* zu $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{p}_I)$ *parallelen Ebene* $\mathfrak{E}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{E}(\mathfrak{p}')$, welche aus $\mathfrak{E}$ durch Parallelverschiebung in der Richtung G_{II} um das Stück

$$e = (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I) \operatorname{cotg} \alpha$$

hervorgeht.

Auf eine dieser Ebenen $\mathfrak{E}_0$ entfällt der Nullwert des Parameters $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' = 0$, ihr Parallelbüschel $\begin{Bmatrix} G \\ \Gamma \end{Bmatrix}$ enthält die bezüglich s' $\begin{Bmatrix} \text{gestatteten} \\ \text{unwirksamen} \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} \text{Drehungsachsen.} \\ \text{einfachen Kräfte.} \end{Bmatrix}$

3'.

Bei der Einstellung des Schraub-Doppelschiebers für $\alpha = 0$, in welchem Falle er

normaler Schraub-Doppelschieber

genannt werden kann, weil die erlaubten Schiebungen zur Schraubenachse normal stehen, fällt G_I mit Γ_I zusammen: *Alle* Achsen $\begin{Bmatrix} G \\ \Gamma \end{Bmatrix}$ des Bündels sind zu dieser Richtung parallel überall im Raum verteilt und mit *demselben* zum Kreuzkörper k der Figur 2 gehörigen Parameter $\begin{Bmatrix} \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I \\ \mathfrak{p}' = -\mathfrak{p}_I \end{Bmatrix}$ zu belegen. Wir können auch die Mutter m aus der Figur 1 an den mit Gewinden versehenen Teil von t in der Figur 2 bringen, dann hat m[an $t(tb)$ in a in a_1] die verlangte Beweglichkeit. Die Reziprokalbüschel R_{III} und P_{III} haben das ganze Feldbüschel parallel zur Richtung der Achsen gemein und liegen im Gebüsche P_{IV}, welches R_{III} (oder P_{III}) mit dem zur Achsenrichtung senkrechten Felde verbindet.

Speziell für den Nullwert von $\mathfrak{p}_I$ beim normalen *Dreh-Doppel-*

schieber werden beide Bündel identisch mit dem Stabbündel der Achsenrichtung. Für diesen Fall könnten wir auch in der Figur 2 den Stellkörper c derart herabstellen (Stellschraube h_1), daß der aus Figur 1 an den glatten Teil der Stange t in der Figur 2 unter c gebracht zu denkende Drehkörper m_0 nicht mehr in der Stangenrichtung verschiebbar wird: m_0 [an (tb) in a in a_1].

Hierher gehört auch die Beweglichkeit eines schweren Körpers mit ebener Basisfläche, welche auf einer horizontalen Eisfläche ruht, von welcher der Körper nicht abgehoben werden soll; statt zu letzterem Zwecke die Schwerewirkung zu beanspruchen, würde man diesen Körper besser zwischen zwei planparallele Eisflächen legen.

3″.

Die Einstellung des Schraub-Doppelschiebers für $\alpha = 90^0$ (G_{I} nach $\mathfrak{G}$) würde die Gabel z' schraubbar mit beliebigem Parameter — also dreh- und schiebbar — machen um jede zu G_{I} parallele Achse G^* der Ebene $\mathfrak{E} = G_{\mathrm{I}} G_{\mathrm{III}}$, ganz gleichgültig, welches der Parameterwert $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}$ bei $s_{\mathrm{I}}(s'_{\mathrm{I}})$ an der Achse G_{I} sein mag. Deshalb könnte man sich (gemäß $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = 0$) bei $s_{\mathrm{I}}(s'_{\mathrm{I}})$ auch eine gewöhnliche zylindrische Drehachse mit ihren Zapfen in z' eingelagert denken. Andere Achsen G als diese G^* gibt es nicht.

Die Achsen Γ der unwirksamen Dynamen gehören ebenfalls zu beliebigen Parametern ($\Gamma = \Gamma^*$) und liegen in $\mathfrak{E}$ zu den G senkrecht. Andere Achsen Γ von unwirksamen Dynamen als diese Γ^* gibt es ebenfalls nicht. Das Feld $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{E}$ ist R_{III} und P_{III} gemeinsam, weshalb beide in einem Gewebe R_{V} enthalten sind.

Hierher gehört z. B. Beweglichkeit eines Muffes m^* (Figur 3), dessen Stift t (etwa die Stange der Gabel z bei der Figur 2) in normaler Stellung mit dem Gleitstücke b verbunden wird, wenn b in seinem *fest* gedachten Rahmen a in der Richtung σ gleitet. Die Achsen G des R_{III} werden die Parallelen zur Achse G^* des Stiftes in der durch G^* senkrecht zu σ gelegten Ebene:

Das typische, diese Bewegung möglich machende Instrument könnte man hiernach als

Muffschieber

bezeichnen. m^*, aus Figur 3 an $t(tb)$ in Figur 2 gebracht, wobei k, r, z' weggedacht werden können, gibt wohl die einfachste Form desselben.

4.

Endlich können einem Körper alle Translationen, aber keine Drehungen gestattet sein. Dies ist durch den

Schieberdrilling

verwirklicht, welchen man erhält, indem man den zweiten Rahmen a_1 des Doppelschiebers aba_1 (Figur 4) selbst noch in einer etwa zu den dortigen Richtungen $\sigma\tau$ senkrechten dritten Richtung ϱ beweglich macht; z. B. dadurch, daß man a_1 horizontal an einem gewöhnlichen Aufzug befestigt oder sich einen dritten Rahmen a_2 konstruiert, in dessen prismatischer Höhlung mit zu ϱ parallelen Flächen a_1 samt a und b gleiten kann. Auch der in der Figur 2 an t zu anderen Zwecken angebrachte und durch prismatische Nutflächen in der Richtung ϱ verschiebbare Körper c hat [in (zb) in a in a_1] gegen a_1 diese Beweglichkeit. Reziprok sind nur alle Drehmomente, R_{III} ist hier ebenso wie P_{III} identisch mit dem Bündel aller Felder des Raumes.

Freiheitsgrad IV.

Hier können wir die vorkommenden Fälle am bequemsten nach jenen beim Freiheitsgrade II ordnen. Die Achsen G und Γ tauschen nun ihre Rollen, ebenso die Zeichen R und P der Reziprokalgebiete und die Zeichen $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}'$; d. h. es ist der bei IV im R_{IV} auftretende Komplex von Achsen G, die mit gewissen Parametern $\mathfrak{p}$ belegt sind, geometrisch identisch mit dem oben bei II als Ort der unwirksamen zu $\mathfrak{p}'$ gehörigen Dynamenachsen Γ im P_{IV}.

Zur Übersicht aller Achsenlagen könnten wir uns darauf beschränken, die Hauptelemente des reziproken Schraubenbündels P_{II} anzugeben, da wir dann unseren obigen Ausführungen gemäß nicht bloß mit der Lage aller Achsen Γ der unwirksamen Dynamen des P_{II} und deren Parametern, sondern auch mit der Lage aller Achsen G (der bei der Beweglichkeit erlaubten Schraubungen im Schraubengebüsche R_{IV} und deren Ganghöhen vertraut sind. Wir wollen indessen stets der Vollständigkeit wegen in Kürze auch auf die Lage aller gestatteten Schraubenachsen und deren Parameter hinweisen, damit bei jedem Mechanismus kein besonderes Nachsuchen nötig sei.

1.

Zur Verwirklichung des allgemeinsten Falles hierher gehöriger Beweglichkeit benützen wir den

Muff am Zwilling

(Figur 1 m^* an (tz') an k an z), d. h. einen Körper m^*, welcher ähnlich wie vordem in der Figur 3, nun in der Figur 1 um die Achse G'_{III} (Verlängerung von G_{III}) der zylindrischen Schaftstange t der Gabel z' dreh- und schiebbar ist; hierbei setzen wir wieder die Gabel z als fest voraus.

Die Spindelachsen $G_I = \Gamma_I$ und $G_{II} = \Gamma_{II}$ am Zwilling sind die sogenannten „Nebenachsen" (vgl. S. 241) unseres für die Beweglichkeit charakteristischen Gebüsches R_{IV}, belegt mit den bezüglichen durch die Spindelwindungen gegebenen Parametern $\mathfrak{p}_I$ bezw. $\mathfrak{p}_{II}$.

Die Achsen Γ des reziproken Schraubenbündels P_{II} gehen aus denen des oben (bei II_1 S. 236) beschriebenen auch hier zu k gehörigen Zylindroides durch Spiegelung an der Hauptebene $G_I G_{II}$ hervor, wobei alle Parameter den entgegengesetzten Wert annehmen. Insbesondere erhalten wir durch Spiegelung der zum Parameter Null gehörigen beiden Zylindroidkanten $\Gamma_0 \Gamma_0'$ jenes einzige Geradenpaar, dessen Kräfte auf einen mit dem Muffe m starr verbundenen Körper gar keine Wirkung ausüben können.

Der „Muff m^* am Zwilling" (Figur 1) ist schraubbar um jede Gerade G des quadratischen Komplexes der senkrechten Transversalen der Kanten Γ des durch Spiegelung erhaltenen Zylindroides.

Zu einem bestimmten Parameter $\mathfrak{p}$ gehören die Transversalen der beiden zu $\mathfrak{p}' = -\mathfrak{p}$ gehörigen Kanten des Spiegelzylindroides.[1]) Speziell für $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} = 0$ erhalten wir:

Dem Muff am Zwilling sind die *Drehungen* um die Transversalen G_0 der beiden Geraden $\Gamma_0 \Gamma_0'$ gestattet, sonst keine.

Dieses Paar von Windschiefen $\Gamma_0 \Gamma_0'$ kann auch imaginär werden; für $\mathfrak{p}_I = 0$ (oder $\mathfrak{p}_{II} = 0$) ist es an der Hauptachse G_I (bezw. G_{II}) des Zylindroides zusammengerückt, und die erlaubten Drehungsachsen G_0 berühren in diesem Falle das Zylindroid[2]) längs dieser Hauptkante.

Hierher, und zwar speziell zu $\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} = 0$, $(\mathfrak{p}_I \gtrless 0)$, gehört das Beispiel eines gewöhnlichen hohlzylindrischen Ringes, der am passenden zylindrischen Türklinkengriff sich drehen und verschieben kann, während auch die Klinke selbst und die Tür um ihre betreffenden Achsen drehbar sind. Die Nebenachsen in R_{IV} sind hierbei aus den beiden Symmetralen der windschiefen Tür- und Klinken-Achse durch Parallelverschiebung in der eigenen Ebene [so weit, bis ihr Schnittpunkt auf die (verlängerte) Achse des zylindrischen Griffes gelangt] zu erhalten.

Ist der benützte Zwilling gleichsteigend:

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II},$$

so sind auf diesen Körper ausschließlich die zum Parameter $\mathfrak{p}_I' = -\mathfrak{p}_I$ gehörigen Schraubungen um die Achsen Γ des Büschels $\Gamma_I \Gamma_{II}$ un-

---

1) Diese Transversalen schneiden von selbst eine dritte Zylindroidkante senkrecht. Vgl. S. 236 u. 240.

2) D. h. auch dessen gleichseitiges Tangentialparaboloid mit der Verteilungskonstanten (vgl. S. 241 Anm. 2) $(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I)$ und der betreffenden Hauptkante nebst G_{III} als Scheitelgerade.

wirksam; einfache Kräfte dieser Eigenschaft gibt es gar nicht, außer es sei gerade

$$\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} = 0,$$

d. h. der Schraubenzwilling ein gewöhnlicher Hookscher Schlüssel. Auf den an diesem wie oben angebrachten Muff m^* können natürlich die Kräfte des Büschels $\Gamma_{\mathrm{I}}\Gamma_{\mathrm{II}}$ — und diese allein — nicht wirken.

Im Falle $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}$ wird der aus der Figur 3 um die Stange t der Gabel s' (in der Figur 1) geschoben zu denkende Muff m^* mit diesem Parameter schraubbar, — also im Falle $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} = 0$ drehbar — um jede Achse G, welche entweder durch den Schnittpunkt p der Spindelachsen des Kreuzkörpers geht (Strahlenbündel p) oder in der Ebene $\mathfrak{E}$ dieser Spindelachsen liegt. Zu den anderen Parameterwerten $\mathfrak{p}$ gehören zirkuläre lineare Kongruenzen von gestatteten Achsen G (vgl. S. 241 Anm. 1). Diese Kongruenzen sind enthalten im quadratischen Komplexe der senkrechten Transversalen der Strahlen des Büschels $\Gamma_{\mathrm{I}}\Gamma_{\mathrm{II}}$. Durch jeden Raumpunkt geht ein Orthogonalkegel dieses Komplexes.

Für $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = \mathfrak{p}_{\mathrm{II}} = 0$ gehört hierher die Beweglichkeit der *Faust* bei festem Oberarm unter Benützung des Ellbogengelenkes, der Drehung (Pronation oder Supination) des Unterarmes um die ideale Eigenachse, sowie unter Inanspruchnahme der Achsen des Handwurzelgelenkes. Der Faust sind alle instantanen Drehungen um Achsen erlaubt, welche entweder durch das Zentrum p des Handwurzelgelenkes gehen oder in jener Ebene $\mathfrak{E}$ liegen, welche p mit der Achse des Ellbogengelenkes verbindet.

Während bei dieser allgemeinsten Beweglichkeit IV die Muffachse (G'_{III}) die einzige Gerade vorstellt, um welche Drehungen und Schraubungen des (mit m verbundenen) Körpers möglich sind, erfüllen die mit dieser Eigenschaft begabten Geraden G^* in den folgenden Fällen

2. (spez. 2′) ein Parallelbüschel,

2″. die Gesamtheit aller senkrechten Transversalen einer Geraden, ein sogenanntes „Normalnetz“,

3. ein Parallelstrahlenbündel.

Bei 2 und speziell 2′, 2″ werden *alle* Schraubenachsen G zu einem ebenen *Felde* φ *parallel*, bei 3 sogar (zu allen Feldern eines Büschels parallel also) alle *gleichgerichtet* sein; es wird im Gegensatze zum eben geschilderten Falle 1 auch Drehmomente geben, welche bezüglich des starren Körpers mit der Beweglichkeit IV unwirksam sein werden.

2.

Zur Verwirklichung der übrigen Fälle des Freiheitsgrades IV können wir den schiefen

Kreuz-Doppelschieber

benützen, den wir aus dem in der Figur 2 dargestellten, an b befestigten Schraubschieber erhalten, indem wir ihn nicht nur (wie bei III_3 S. 257)

durch Hineinschieben des Rahmens a in den anderen, festen Rahmen a_1 (der Figur 4) wie dort zum Schraub-Doppelschieber machen, sondern auch noch unter sonstiger Beibehaltung der gezeichneten Lage den Halbring r entfernen, so daß jetzt die *beiden* gleichsteigenden Schrauben des Kreuzkörpers wirkungsfähig werden. (Letzteres wie beim Schraubzwillings-Schieber III_2 S. 253).

Es sei bei der in der Figur 2 gezeichneten Lage der Winkel α des Apparates beliebig[1]) angenommen und es sei ferner zur Bequemlichkeit das Gleichgewicht der Gabel z' in dieser Stellung (α), wo wir die Beweglichkeit illustrieren wollen, stabil gemacht. Letzteres kann etwa durch ein am Stangenfortsatze u der Gabel z' in verschiedenen Stellungen fest anschraubbares Gegengewicht oder durch anderweitige, etwa elastische Unterstützung erreicht werden.

Zum Reziprokalgebüsch P_{II} der unwirksamen Dynamen gehört offenbar die mit dem Parameter $\mathfrak{p}'_{\text{I}} = -\mathfrak{p}_{\text{I}}$ belegte Achse $\Gamma_{\text{I}} = G_{\text{III}}$ und das Feld (Drehmoment) φ der Ebene $\mu = G_{\text{I}} G_{\text{II}}$ des Kreuzkörpers k, also auch *jede zu* Γ_{I} *parallele Achse* Γ *der Ebene* $\nu = \Gamma_{\text{I}} G_{\text{II}}$. Sei e der Normalabstand dieser Γ von Γ_{I}, so entfällt auf sie im P_{II} der gemäß

$$\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}'_{\text{I}} = -e \operatorname{tg} \alpha$$

zu bestimmende *Parameter* $\mathfrak{p}'$. Auf *einen* Strahl Γ_0[2]) des Parallelbüschels der Γ der Ebene ν entfällt der Nullwert des Parameters; Γ_0 ist die einzige Gerade, auf welcher Kräfte angenommen werden dürfen, welche — ebenso wie unter den Drehmomenten das einzige der Ebene $\mu = G_{\text{I}} G_{\text{II}}$ — nicht auf z' wirksam sind.

Γ_0 wäre mit Γ_{I} zusammengefallen, wenn wir einen gewöhnlichen Hookschen Schlüssel (mit gewöhnlichem Achsenlager an den Gabeln, $\mathfrak{p}_{\text{I}} = \mathfrak{p}_{\text{II}} = 0$) in der in Figur 2 gezeichneten, demselben Winkel entsprechenden Lage bei starrer Verbindung seiner oberen Gabel mit b verwendet hätten. Dies wäre hier nicht einmal eine Beschränkung der Allgemeinheit, da man den so adjustierten Apparat nur um $e = \mathfrak{p}'_{\text{I}} \cot \alpha$ in der Richtung G_{II} verschoben denken muß, um seine untere Gabel genau gleichbeweglich zu machen wie jene (z') des für allgemeines $\mathfrak{p}_{\text{I}}$ konstruierten Apparates. Anders ist es im folgenden Falle 2', wo ($\mathfrak{p}_{\text{I}} \gtrless 0$) keine Dyname anderen Parameters als $\mathfrak{p}'_{\text{I}}$ in P_{II} vorkommt; hier wird der Hooksche Schlüssel nicht verwendbar, außer wenn $\mathfrak{p}_{\text{I}} = 0$ ist, wo ein ganzes Parallelbüschel unwirksamer Kräfte auftritt.

Die Gabel z' des Kreuzdoppelschiebers ist *schraubbar* um *jede*[3]) zur Ebene $\mu = G_{\text{I}} G_{\text{II}}$ parallele Achse G und zwar mit einem Para-

1) Erst in den folgenden Fällen 2' des aufrechten Kreuz-Doppelschiebers und 2'' des (dort bequemer benützbaren) Doppelstiftes soll $\alpha = 0°$ bezw. $90°$ genommen werden.

2) Γ_0 ist bestimmt durch $e = \mathfrak{p}'_{\text{I}} \cot \alpha = -\mathfrak{p}_{\text{I}} \cot \alpha$ gemäß $\mathfrak{p} = 0$.

3) Man beachte die sogleich folgende kleine Einschränkung!

meter, welcher entgegengesetzt gleich ist jenem der von G getroffenen Γ des Parallelbüschels zu Γ_I in ν, um die zu G_{II} parallelen Geraden G^* in ν mit beliebigem Parameter; um die nicht in ν gelegenen Parallelen zu G_{II} dagegen überhaupt nicht.

Letzteres schließt eine Einschränkung der obigen Behauptung ein; sie wäre es nicht, wenn wir sagen wollten: der Parameter wäre hier ∞, von solchen Geraden als eigentlichen Achsen zu sprechen, lehnen wir aber ab.

Die Achsen G der gestatteten Schraubungen eines *bestimmten* Parameters $\mathfrak{p}$ erfüllen hiernach in obigem ausgearteten linearen Komplexe die lineare Kongruenz der zu μ parallelen Transversalen jener Γ, welche zu $\mathfrak{p}' = -\mathfrak{p}$ gehört. Γ_0 z. B. gehört zu $\mathfrak{p}' = 0$:

Der Gabel z' sind alle *Drehungen* um die zu μ parallelen Transversalen von Γ_0 gestattet, sonst keine.

2'.

Der aufrechte Kreuzdoppelschieber ($\alpha = 0$).

Wir stellen den Kreuzdoppelschieber für $\alpha = 0$ ein. Unwirksam bezüglich z' sind jetzt bei festem Rahmen a_1 (Fig. 2 und 4) nur alle Dynamen von dem einzigen Parameter $\mathfrak{p}'_I = -\mathfrak{p}_I$[1]), deren Achsen parallel zu $\Gamma_I = G_I = G_{III}$ in der Ebene $\Gamma_I G_{II} = \mu = \nu = \mathfrak{E}$ liegen, und das Drehmoment (Feld) $f = \varphi$ dieser Ebene. Unwirksame einfache Kräfte gibt es nicht.

Nur falls gerade $\mathfrak{p}_I = 0$, sind alle obigen unwirksamen Dynamen selbst zu einfachen Kräften des Parallelbüschels der Γ geworden. P_{II} ist dann in R_{IV} enthalten, während sich beim schiefen Kreuzschieber R_{II} und P_{II} ergänzten. Da in diesem Falle der Kreuzkörper eines gewöhnlichen Hookschen Schlüssels verwendet wird, könnten wir den Kreuzschieber für $\mathfrak{p}_I = 0$ auch aufrechten (Hookschen) Schlüsselschieber nennen.

Das für die Beweglichkeit charakteristische Schraubengebüsch R_{IV} besagt, daß folgende Bewegungen zulässig sind: die Gabel z' und jeder mit ihr starr verbundene Körper wird bei festem Rahmen a_1 parallel verschiebbar in allen zu Γ_I senkrechten Richtungen und *schraubbar* um *jede zur Ebene $\mathfrak{E}$ parallele Gerade G* — mit der einzigen Einschränkung bezüglich der zu G_{II} parallelen Geraden, welche nicht als Achsen zählen können (weil ihr Parameter ∞), wenn sie nicht in $\mathfrak{E}$ liegen; dafür aber, wenn sie in $\mathfrak{E}$ liegen (sie bilden das Büschel der G^*) eines jeden beliebigen Parameters fähig sind.

---

1) Es ist im Auge zu behalten, daß $\mathfrak{p}_{II} = \mathfrak{p}_I$, die Spindeln am Kreuzkörper k der Figur 2 gleichsteigend sind!

Die Achsen G ordnen sich nach dem ihnen zukommenden Parameter $\mathfrak{p}$ in lineare parabolische Kongruenzen, deren Leitlinien längs der durch das Feld f dargestellten unendlich fernen Geraden von $\mathfrak{E}$ zusammengerückt sind. Die Strahlen einer solchen zu einem bestimmten $\mathfrak{p}$ gehörigen Kongruenz sind durch Parallelverschiebung in einer zu $\mathfrak{E}$ gehörigen Richtung aus der zu $\mathfrak{E}$ parallelen Schar jenes gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides erhältlich, welches G_{II} nebst der etwa durch M zu $\mathfrak{E}$ gelegten Senkrechten $\mathfrak{G}$ zu Scheitelgeraden hat und die Verteilungskonstante[1] $(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I)$ besitzt.

Die hierbei zu $\mathfrak{p} = 0$ gehörige Kongruenz enthält die Achsen aller der Gabel z' erlaubten Drehungen.

Speziell zum Parameter $\mathfrak{p}_I$ gehören als Strahlen einer ganz besonders ausgearteten Kongruenz *alle* zu Γ_I $(= G_I = G_{III})$ parallelen Achsen des Raumes und *alle* in der Ebene $\mathfrak{E}$ gelegenen Geraden; bezüglich der zu G_{II} parallelen G^* unter den letzteren wurde schon bemerkt, daß sie eines jeden beliebigen Parameters fähig sind.

Wegen des gemeinsamen Feldes f liegen R_{IV} und P_{II} in einem Gewebe R_V, ja im Nullfalle von $\mathfrak{p}_I$ — wo der gleichsteigende Zwilling des Instrumentes im gewöhnlichen Hookschen Schlüssel ist und als erlaubte Drehachsen alle zu Γ_I parallelen Strahlen im Raume, sowie alle Geraden von $\mathfrak{E}$ auftreten — ist P_{II} in R_{IV} enthalten.

Dieselbe Beweglichkeit wie der beschriebene aufrechte Kreuzschieber hätte auch in der Figur 1 der prismatische Körper m_∞ gegen z, falls die Spindel s_{II} (s'_{II}) an G_{II} durch einen in Zylinderlagern der Gabel z dreh- *und* gleitbaren Stift t ersetzt würde.

Auch würde m_∞ in der Figur 1 so beweglich, falls z ohne Eintauschung der Spindel gegen den Stift nicht festgemacht, sondern mit der Schaftstange der Gabel z in der Richtung ϱ an den Rahmen a der Figur 4 starr angebracht würde, wenn a im festen Rahmen a_1 gleiten kann.

Würde man dagegen die Spindel s_{II} (s'_{II}) der Figur 1 bei fest belassener Gabel z durch eine prismatische, in den Ausnehmungen von z bloß in der Eigenrichtung verschiebbare Stange ersetzen $(\mathfrak{p}_{II} = \infty)$, so hätte der aus der Figur 3 um die Stange t der Gabel z' geschoben gedachte Muff m^* gegen die feste Gabel z genau dieselbe hierher gehörige Beweglichkeit. $(G_I G_{III} = \mathfrak{E}$, der Parameter $\mathfrak{p}_I$ gehört zu allen Geraden G dieser Ebene und zu den Parallelen zu G_I im Raume; die Parallelen zu $G'_{III} = G_{III}$ in $\mathfrak{E}$ spielen die Rolle obiger G^*, um welche mit beliebigem Parameter geschraubt werden kann).

1) Vergl. S. 241 Anm. 2!

2″.

Der Doppelstift.

Er wird aus dem Zwilling der Figur 1 erhalten, indem *beide* Spindeln am Kreuzkörper gegen zylindrische in den Gabelarmlagern dreh- und innerhalb eines gewissen Spielraumes verschiebbare Stifte ausgewechselt werden. Bei fester Gabel z erfreut sich z' der Freiheit, welche nur dadurch beschränkt ist, daß die erlaubten Schraubungen (im R_{IV}) reziprok sein sollen gegen die Schraubungen um $G_{III} = \Gamma_I$.

Auf Γ_I gelegene Kräfte sind also ebenso unwirksam auf z' wie das hierzu senkrechte Drehmoment.

Schraubbar ist z' mit *beliebigem* Parameter nur um jede senkrechte Transversale G^* von Γ_I, sonst um keine. Von Translationen sind nur die zu G_{III} senkrechten gestattet.

Die gleiche Beweglichkeit hat in der Figur 2 (und 4) die Gabel z' gegen a_1, falls der Kreuzdoppelschieber für $\alpha = 90^0$ eingestellt wird.

Andere Beispiele: Machen wir bei fester Gabel z die Stange t an der anderen Gabel z' bei einem gewöhnlichen Hookschen Schlüssel gleichzeitig zur Anfangsstange eines ebensolchen Hookschen Schlüssels unter Parallelstellung beider Kreuzkörperebenen, so hat die neue Gabel z'' am letzteren genau die gleiche Beweglichkeit gegen z, wie z' gegen z beim obigen Doppelstifte. Wir wollen diese Verbindung zweier Hookscher Schlüssel besonders in der Anfangslage, wo die Schaftstangen der Gabeln z z' z'' die Gerade $G_{III} = \Gamma_I$ zur gemeinsamen Zylinderachse haben, ein

Hooksches Schlüsselpaar

nennen. Ebenso beweglich wäre bei festem Schulterblatt die Faust an der ausgestreckten Hand bei Inanspruchnahme der Drehbarkeit um die Achsen des Handwurzelgelenkes und des Kugelgelenkes beim Schulterblatte, falls man beim letzteren 1. jede Drehung des Oberarmes um die Achse von der Richtung der ausgestreckten Hand ebenso ausschließen könnte, als 2. die Drehung des Unterarmes (Pronation oder Supination) um dieselbe Achse. Die Drehbarkeit im Ellbogengelenk *könnte* ebenfalls als überzählig ausgeschlossen werden, aber dies *müßte nicht* geschehen, da die instantanen Drehungen um dieselbe im System ohnehin durch Verbindung anders gestalteter Drehungen ersetzt werden können.

3.

Der Muffdoppelschieber.

Wir erhalten ihn, indem wir den Stift t der Figur 3 bei Belassung der Richtung ϱ seiner Achse G^* starr mit dem in a befindlich zu

denkenden Gleitstücke b verbinden (Fig. 2), wobei a noch im festen Rahmen a_1 der Figur 4 verschiebbar ist. Der um t angebrachte Muff m^* erfreut sich dann der Beweglichkeit beliebigen Parameters um alle zur Achse des Stiftes t parallelen Achsen G^* des Raumes. *Unwirksam sind nur die Drehmomente* der zu G_I parallelen Ebenen, während die übrigen Momente ebenso wie alle übrigen Dynamen und Kräfte Wirkung haben.

Auch die zu anderem Zwecke in der Figur 2 bei c angebrachte Stellschraube h_1 hat gegen a_1 (Fig. 4) die Beweglichkeit eines Muffdoppelschiebers, wenn a in a_1 geschoben ist. (h_1 in c an (tb) in a in a_1.)

Freiheitsgrad V.

Um diese durch ein Schraubengewebe R_V gekennzeichnete Beweglichkeit zu verwirklichen, beachten wir, daß R_V reziprok sein muß zu einer festen Schraubung P_I.

1.

Wir benutzen die

Schraubenmutter m am Doppelstift

der Figur 1 bei fester Gabel s (vergl. den Fall 2″ bei IV, S. 266; wo beide Spindeln am Zwilling der Figur 1, s_I (s'_I) und s_{II} (s'_{II}) durch Stifte ersetzt zu denken sind). Wirklich ist bezüglich der — an t mit dem Parameter $\mathfrak{p}_I$ ansteigenden — Mutter m in der dargestellten Lage nur die Dyname P_I um die Achse $G'_{III} = G_{III} = \Gamma_I$ mit dem Parameter $\mathfrak{p}'_I = -\mathfrak{p}_I$ reziprok, d. h. auf m wirkt eine an Γ_I angebrachte Kraft nur dann nicht, wenn sie *untrennbar verbunden* ist mit einem $\mathfrak{p}'_I$ mal größeren Drehmomente um diese Achse Γ_I.

Statt des Doppelstiftes könnte man um dieselben Instantanschraubungen zu erzielen, auch ein Hooksches Schlüsselpaar (vergl. S. 266) verwenden, wenn die erste Gabel s fest und m um die Endstange s'' der zweiten Gabel schraubbar ist.[1])

m ist schraubbar um *jede*[2]) *Gerade* G des Raumes und zwar mit dem aus der Reziprokalrelation

$$\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'_I = \mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I = e \operatorname{tg} \vartheta$$

(e die kürzeste Entfernung von G und Γ_I, ϑ der Winkel dieser Ge-

---

1) Die so durchgeführte Herstellung der Beweglichkeit V ist — als das einzige Beispiel einer Verwirklichung von Beweglichkeit bei einem höheren Freiheitsgrade — schon angegeben worden in der bekannten Physik von Thomson und Tait.

2) Man beachte die sogleich folgende kleine Einschränkung!

raden) berechneten Parameter $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I + e \operatorname{tg} \vartheta$. Die Orte der Achsen G gleichen Parameters $\mathfrak{p} = \text{const.}$ sind hiernach lineare Komplexe mit Γ_I als Zentralachse. Insbesondere um die senkrechten *Transversalen* von Γ_I ist s' schraubbar mit *jedem* Parameter; die übrigen windschiefen Senkrechten zu Γ_I lassen wir nicht als Achsen gelten, weil sie zum Parameter ∞ gehören würden; von den instantanen Translationen sind nur die zu Γ_I senkrechten erlaubt.

1'.

Rad m_0 am Doppelstifte.

Wird $\mathfrak{p}_I' = \mathfrak{p} = 0$, so verwenden wir ebenso beim Doppelstift der Figur 1 (ersetzbar durch ein Hooksches Schlüsselpaar) statt m den radartig um t beweglichen Drehkörper m_0.

Die reziproke Dyname P_I ist zur einfachen Kraft auf Γ ausgeartet, diese allein wirkt nicht auf m_0.

Beweglich ist m_0 um *jede* Gerade des Raumes mit dem Parameter $\mathfrak{p} = e \operatorname{tg} \vartheta$, hierbei wieder um die senkrechte Transversale G^* von Γ_I mit beliebigem Parameter, um die windschiefen Senkrechten zu Γ_I dagegen nicht mit endlichem Parameter. Erlaubt sind dieselben zu Γ_I senkrechten, instantanen Translationen wie oben.

Ein schönes hierher gehöriges Beispiel bietet am menschlichen Körper die Faust m_0 an der ausgestreckten Hand, wenn das Schulterblatt festgehalten wird. Das Ellbogengelenk und die Unterarmdrehung um die ideale Eigenachse (Pronation oder Supination) ist hierbei gar nicht notwendig, da ihre Wirkungen schon ohnedies durch die Gelenkigkeit des Handwurzel- und des Kugelgelenkes am Schulterblatt erreicht werden. Die Achsen des Handwurzelgelenkes und die zu ihnen parallelen durch den Mittelpunkt p des Kugelgelenks am Schulterblatte wirken wie die Gelenke am gewöhnlichen Hookschen Schlüsselpaar, die Drehbarkeit im Schultergelenke um die Achse der ausgestreckten Hand tritt an Stelle der Drehbarkeit der Radscheibe m_0 beim (Doppelstifte in Figur 1 oder beim vertretenden) Schlüsselpaare.

Die als hier nicht notwendig bezeichneten Gelenke wirken nur akzessorisch, d. h. sie *können* mit herangezogen werden, um eine bestimmte Nachbarlage der Faust zu erreichen; geschieht dies aber, so ist durch die Nachbarlage der Faust nicht wie sonst die Anteilnahme aller wirkenden Gelenke genau bestimmt, sondern diese Anteile kann man in der mannigfaltigsten Weise zusammenstellen, um dieselbe Nachbarlage zu erreichen.[1])

1) Das Schulterblatt mußten wir feststellen. Wäre es in der Armrichtung parallel verschiebbar, was (am besten bei der etwas seitlichen, sog. „Fechter-

Hierher gehört auch das Beispiel eines gewöhnlichen hohlzylindrischen Ringes, der am passenden zylindrischen Türklinkengriff sich drehen und verschieben kann, während die Klinke selbst und die Tür um ihre betreffenden Achsen drehbar sind, *wenn* hierbei die Tür *auch noch* an ihren Angeln innerhalb eines gewissen Spielraumes gehoben werden kann. Die Rolle von Γ_I spielt hierbei die kürzeste Transversale der Angelachse und der Achse des zylindrischen Griffes.

2.

Prisma (m_∞) am Doppelstifte.

Ist dagegen $\mathfrak{p}_I' = \mathfrak{p}_I = \infty$, so benutzen wir beim Doppelstifte oder dem vertretenden gewöhnlichen Hookschen Schlüsselpaare an der Stange der letzten beweglichen Gabel den prismatischen Körper m_∞ zur Verwirklichung der Bewegung.

Die einzige unwirksame Dyname ist jetzt zum *Drehmomente* um die gemeinsame Achse Γ_I der Gabelstangen ausgeartet, eigentliche Achsen unwirksamer Dynamen gibt es nicht mehr.

Beweglich ist m_∞ und zwar mit beliebigem Parameter um alle zu Γ_I senkrechten (im allgemeinen auch windschiefen) Geraden G^* des Raumes, dagegen nicht um Achsen anderer Richtungen. Gestattet sind ferner *alle* Translationen.

Ein am Doppelstifte (Fig. 1) statt der betrachteten m, m_0, m_∞ um t beweglicher Muff m^* (Fig. 3) würde z. B. schon einen zum

Freiheitsgrad VI

gehörigen, also vollkommen beweglichen

Muff am Doppelstifte

darstellen. Er wäre, genau als ob der übrige Apparat nicht vorhanden wäre, um jede Achse des Raumes mit jedem Parameter schraubbar und in jeder beliebigen Richtung parallel verschiebbar.

Jede Dyname (Kraft, Drehmoment) würde dagegen auf ihn von Einfluß sein.

Wir stellen nun noch die sämtlichen typischen Vorrichtungen zur Verwirklichung aller möglichen Beweglichkeit jedes beliebigen Freiheitsgrades zusammen. Links und rechts in der gleichen Zeile haben hierbei — links das für die Beweglichkeit charakteristische und rechts das am Körper unwirksame — Schraubengebiet *geometrisch die gleiche Gestalt.*

stellung" des Rumpfes und des übrigen Körpers) durch die Muskulatur des Schulterblattes geschieht, so würde schon dadurch allein und ohne weitere Rumpfbewegung die Faust vollkommen, d. h. in allen Schraubungen des Raumes beweglich werden, es wäre ihr keine einzige Nachbarlage mehr unzugänglich.

Freiheitsgrad

0.
Vollkommen befestigter Körper.

VI.
Vollkommen beweglicher Körper.

Freiheitsgrad

I.
(Seite 230.)

1. **Schraubenmutter,** an der Spindel geführt, $\mathfrak{p}$ der Parameter. (Fig. 1 *m* an festgedachter Stange.)

Speziell

1'. *Rad,* an der Nebenachse drehbar ($\mathfrak{p} = 0$) und (Fig. 1 m_0 an festgedachter Stange *t*).

2. **Schieber,** im Gleitstück, im Schubrahmen (Seite 231) Fig. 2 und 4. *b* in *a* oder *a* in a_1) oder mittels anderer Prismenführung verschiebbar ($\mathfrak{p} = \infty$; in der Fig. 1: m_∞ an festgedachter Stange *t*).

V.
(Seite 267.)

1. **Schraubenmutter am Doppelstifte** (*m* in Fig. 1 mit dem Parameter $\mathfrak{p}_I$ steigend an *z'* an *k* an *z*, wenn die Spindeln bei *k* durch gleitende Stifte ersetzt sind).

Speziell

1'. *Rad am Doppelstifte* ($\mathfrak{p}_I = 0$) (m_0 in Fig. 1 an *z'* an *k* an *z*, wenn statt der Spindeln an *k* Stifte da sind).

2. **Prisma am Doppelstifte** ($\mathfrak{p}_I = \infty$) (Seite 269) (m_∞ in Fig. 1 an *z'* an *k* an *z*, wenn statt der Spindeln an *k* Stifte da sind).

Freiheitsgrad

II.

1. **Schraubenzwilling** (Seite 233). (Fig. 1. *z'* an *k* an *z*, $\mathfrak{p}_I \mathfrak{p}_{II}$ als Hauptparameter'.

2. **Schiefer Schraubschieber** (Schiefe Schubschraube; S. 241). (Fig. 2. *z'* an (kzb)[1]) in *a*, Einstellwinkel $\alpha \gtrless 0 \left\{\begin{matrix} \alpha = 0^\circ \text{ führt zu } \mathfrak{Z}' \\ \alpha = 90^\circ \;\;„\;\; „\;\; \mathfrak{Z}'' \end{matrix}\right\}$)

IV.

1. **Muff am Zwilling** (Seite 260) (m^* aus der Fig. 3 an die verlängerte Stange *t* in Fig. 1 geschoben).

2. **Schiefer Kreuzdoppelschieber** (Seite 262) (Fig. 2. *r* entfernt; *z'* an *k* an (zb) in *a* in a_1 Einstellwinkel $\left\{\begin{matrix} \alpha = 0^\circ \text{ führt zu } \mathfrak{Z}' \\ \alpha = 90^\circ \;\;„\;\; „\;\; \mathfrak{Z}'' \end{matrix}\right\}$).

---

1) Derart in Klammer gesetzte Zeichen sollen andeuten, daß die betreffenden Bestandteile starr verbunden worden sind, z. B. ist hier *k* mit *z* mittels *r* und *h*, und *z* und *b* aus einem Stück.

Speziell:

2'. *Aufrechte Schubschraube* ($\alpha=0$, S. 244). (Auch m, aus der Fig. 1 an den mit Windungen versehenen Teil der Stange t in der Figur 2 gebracht, hat gegen a diese Beweglichkeit. m an (tb) in a.) Parameter 0: Aufrechtes Schubrad.

2''. *Muff am Stift* (S. 245). Aus 2 für $\alpha = 90^0$. (Fig. 3. m^* an t dreh- und schiebbar.)

3. **Doppelschieber** (Seite 246). (Fig. 2 und 4. b in a in a_1.)

Speziell:

2'. *Aufrechter Kreuzdoppelschieber* ($\alpha = 0$, S. 264). Wenn der Parameter am Kreuzkörper 0: Aufrechter (Hookscher) Schlüsselschieber.

2''. *Doppelstift* (S. 266). Aus 2 für $\alpha = 90^0$. (Fig. 1. z' an k an z, wenn statt der Spindeln an k' Stifte sind, welche in den Gabellagern auch gleiten können.)

3. **Muffdoppelschieber** (Seite 266). (Muff m^* aus Fig. 3 an den glattzylindrischen Teil der Stange t (tb) in Fig. 2 unter c gebracht, wobei kz' usw. entfernt gedacht werden können: m^* an (tb) in a in a_1.)

Freiheitsgrad III.

1. **Schraubendrilling** (Seite 246). (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I \mathfrak{p}_{II} \mathfrak{p}_{III}$). (Fig. 1. m an z' an k an z.)

Speziell:

2†. *Flacher Drilling*[1]) (Seite 251). (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$, $\mathfrak{p}_{II}$; $\mathfrak{p}_{III} = \infty$.) (Fig. 1 m_∞ an z' an k an z.)

2. **Schiefer Schraubzwillingsschieber** (Seite 253). (Fig. 2. r entfernt. z' an k an (zb) in a. Einstellwinkel α $\left\{\begin{matrix}\alpha = 90^0 \text{ führt zu } 2' \\ \alpha = 0^0 \;\;\text{ „ } \;\text{ „ } 2''\end{matrix}\right\}$).

1) Vergl. S. 251, Anm. 3. Er ist ein dadurch verallgemeinerter Planschrauber (S. 256, 2''), daß die Parameter $\mathfrak{p}_I \mathfrak{p}_{II}$ an $G_I G_{II}$ im Falle 2' (Fig. 2, $\alpha = 0$) ungleich zugelassen werden.

Speziell:

2'. *Normaler Schraubzwillingsschieber* ($\alpha = 90^0$, Seite 255).

2''. *Planschrauber* ($\alpha = 0^0$, Seite 256).
(Auch als flacher Drilling (1') für $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II}$ anzusehen. Fig. 1: m_∞ an z' an k an z, falls $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II}$.)

3. **Schiefer Schraubdoppelschieber** (Seite 257). (Fig. 2. Einstellwinkel α durch r und h fixiert. $\left\{\begin{matrix}\alpha = 0 \text{ führt zu } z' \\ \alpha = 90^0 \text{ ,, ,, } z''\end{matrix}\right\}$. z' an (k, z, b) in a in a_1).

3'. *Normaler Schraubdoppelschieber* (Seite 258). ($\alpha = 0$, alle Parameter $\mathfrak{p}$ gleich. Auch m, aus der Figur 1 an den mit Gewinden versehenen Teil der Stange t in Figur 2 gebracht, ist gegen a_1 (Fig. 4) derart beweglich: m an (tb) in a in a_1.)

Normaler Drehdoppelschieber (Seite 258). ($\alpha = 0$, alle Parameter $\mathfrak{p}$ = *Null*. m_0 (aus Fig. 1) drehbar um t (Fig. 2, c an m_0 herabgestellt), falls tb in a_1 geschoben (Fig. 4), ist gegen a_1 derart beweglich: m an (tb) in a in a_1.)

3''. *Muffschieber* (Seite 259). (Für $\alpha = 90^0$ aus dem Schraubdoppelschieber 3; bezw. auch m^*, aus der Figur 3 an $t\,(tb)$ in Figur 2 gebracht; dort c emporgestellt, um Spielraum zu schaffen: m^* an (tb) in a in a_1).

4. **Schieberdrilling** (Seite 259). (Fig. 2. c bei unbenutzter Stellschraube h_1 in (tb) in a in a_1.)

Im Wesen haben wir also bei den Freiheitsgraden I und V nur *zwei* Typen (1, 2), bei II und IV *drei* (1, 2, 3), beim Freiheitsgrade III dagegen *vier* Typen (1, 2, 3, 4) von Mechanismen *nötig* gehabt, aufgestellt nach der Zahl der beim beweglichen Körper auftretenden unabhängigen Translationen.

Es hätte keine Schwierigkeit, diese zur Herstellung aller typischen instantanen Bewegungsmöglichkeiten eines starren Körpers dienenden Mechanismen in einem Apparate zu vereinigen, indem einfach die Spindeln am Kreuzkörper k (Fig. 1 u. 2) nebst den ausgebohrten Teilen der betreffenden Gabelzinken auswechselbar gestaltet und die Körper m aus der Figur 1 auch an die Schaftstange der Gabel z' in Fig. 2 anbringlich gemacht würden.

Wir haben nur der besseren Übersicht wegen die Illustration der Haupttypen mit Hilfe der *zwei* Grundformen des Apparates (Figuren 1 und 2) vorgezogen.

Andere Möglichkeiten von Elementarbewegungen, die einem starren Körper in einem bestimmten Augenblick gestattet wären, außer den durch unsere typischen Mechanismen herstellbaren, gibt es nicht. Die

notwendigen[1]) *Typen* stellen wir nun noch in einer Tabelle zusammen, wobei wir die — [oben durch Striche (2′, 2″, 3′...) rechts oben bei der Typuszahl $\mathfrak{n}$ (1, 2, 3 ...) angedeuteten] — Spezialtypen fortlassen, da dieselben nichts anderes leisten, als die dann noch übrigbleibenden Typen auch, wenn wir sie nämlich besonders — für *Spezialwerte* z. B. 0°, 90° von α — einstellen oder die Hauptparameterwerte $\mathfrak{p}_i$ (i = I, II, III) bei Belastung der Endlichkeit derselben speziell *abändern*. Hierbei wollen wir bei jeder Typuszahl $\mathfrak{n}$ (in arabischer Ziffer) des Freiheitsgrades $\mathfrak{f}$ (in römischer Ziffer) beifügen:

Die Zahl $\mathfrak{t}$ der bei der betreffenden Beweglichkeit gestatteten von einander unabhängigen Translationen,

die Zahl $\mathfrak{d}$ der bei der betreffenden Beweglichkeit unwirksamen voneinander unabhängigen Drehmomente,

die Zahl $\mathfrak{r}$ der bei der betreffenden Beweglichkeit voneinander unabhängigen Achsenrichtungen von Bewegungsschrauben,

die Zahl $\mathfrak{l}$ der bei der betreffenden Beweglichkeit voneinander unabhängigen Achsenrichtungen unwirksamer eigentlicher Dynamen.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{f}^*$ eine Hilfszahl (positiv, ganz), welche $= \mathfrak{f} - 3$, *oder* aber, wenn sie nämlich negativ würde, statt dessen 0 ist, und mit $\mathfrak{v}^*$ eine Hilfszahl (positiv, ganz), welche $= 3 - \mathfrak{f}$, *oder* aber, wenn sie nämlich negativ würde, statt dessen 0 ist, so haben wir folgende Beziehungen in der Tabelle:

$$\left|\begin{aligned} \mathfrak{t} &= -1 + \mathfrak{n} + \mathfrak{f}^* \\ \mathfrak{d} &= -1 + \mathfrak{n} + \mathfrak{v}^* \\ \mathfrak{r} &= 1 + \mathfrak{f} - \mathfrak{n} - \mathfrak{f}^* \\ \mathfrak{l} &= 7 - \mathfrak{f} - \mathfrak{n} - \mathfrak{v}^* \end{aligned}\right| \qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{t} + \mathfrak{r} &= \mathfrak{f} \\ \mathfrak{d} + \mathfrak{l} &= 6 - \mathfrak{f} \end{aligned}\right\}$$

Die Einführung der von uns hier gewählten Typusnummern $\mathfrak{n}$ (in arabischen Ziffern) erscheint durch deren angegebene Beziehungen zu den bemerkenswerten Zahlen $\mathfrak{t}$ ($\mathfrak{d}$; $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{l}$) gerechtfertigt.

Damit ist auch die Abweichung einerseits von der eigenen Numerierung der Fälle in der (1902 in dieser Zeitschrift, 48. Bd. 1. Heft erschienenen) Abhandlung über „Lineare Schraubengebiete“ wie auch zum Teile von der Einteilung E. Studys in seiner bewundernswerten (1903 in Leipzig erschienenen) „Geometrie der Dynamen“ begründet.

---

1) Die speziellen in den allgemeinen enthaltenen Typen haben wir oben ausführlich besprochen; *gerade sie* finden in der Technik die meiste Anwendung oder werden sie vielleicht am ehesten finden — wie in der Regel gerade das Studium und die Anwendung besonderer Fälle der allgemeinen Betrachtung vorangeht.

Freiheitsgrad $\mathfrak{f}$	Typus $\mathfrak{s}$	Hilfszahl $\mathfrak{f}^*$	Hilfszahl $\mathfrak{s}^*$	Name des typischen Apparates	Seitennummer in der Abhandlung	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{s}$	$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{l}$
0	1	0	3	Vollkommen *fester* Körper		0	3	0	3
I	1	0	2	**Schraubenmutter** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$)	230	0	2	1	3
	2			**Schieber**	231	1	3	0	2
II	1	0	1	**Schraubenzwilling** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I, \mathfrak{p}_{II}$)	233	0	1	2	3
	2			**Schraubschieber** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$. Einstellwinkel α)	241	1	2	1	2
	3			**Doppelschieber**	246	2	3	0	1
III	1	0	0	**Schraubendrilling** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I, \mathfrak{p}_{II}, \mathfrak{p}_{III}$)	246	0	0	3	3
	2			**Flacher Drilling** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I \mathfrak{p}_{II}$) **Schraubzwillingsschieber** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$. Einstellwinkel α)	251 253	1	1	2	2
	3			**Schraubdoppelschieber** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$. Einstellwinkel α)	257	2	2	1	1
	4			**Schieberdrilling**	259	3	3	0	0
IV	1	1	0	**Muff am Zwilling** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I, \mathfrak{p}_{II}$)	260	1	0	3	2
	2			**Kreuzdoppelschieber** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$. Einstellwinkel α)	262	2	1	2	1
	3			**Muffdoppelschieber**	266	3	2	1	0
V	1	2	0	**Mutter am Doppelstifte** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$)	267	2	0	3	1
	2			**Prisma am Doppelstifte**	269	3	1	2	0
VI	1	3	0	Vollkommen *freier* Körper	269	3	0	3	0

Da jetzt diese „linearen Schraubengebiete" samt den nun vorgelegten Ausführungen als *Einleitung* in das Studium des Studyschen Werkes — besonders für Leser, welche mit der Graßmannschen *Ausdehnungslehre* vertraut sind — gelten können, geben wir noch eine Zusammenstellung der Typusbezeichnungen und der Sonderfälle, sowohl bei Study als auch in den „linearen Schraubengebieten" nebst Angabe der Seitenzahlen in beiden Abhandlungen.

E. Study hat als der *erste* alle Spezialfälle gehörig hervorgehoben, während in des Verfassers „Linearen Schraubengebieten" der sog. „allgemeine Fall" bei jedem Freiheitsgrade ebensowenig eine Nummer erhielt als die durch ∞-werden seiner Hauptparameter sich ergebenden Sonderfälle hervorgehoben wurden.

Vorliegende Abhandlung		E. Studys „Geometrie der Dynamen" (1903)		Die „linearen Schraubengebiete" in dieser Zeitschrift (1902, 48. Bd. 1. Hft.)	
I 1 (S. 230)	V 1 (S. 267)	Ia (S. 540)	Va (S. 553)	I (S. 62)	V (S. 62)
2 (S. 231)	2 (S. 269)	b (S. 541)	b (S. 553)	... für $\mathfrak{p}_I = \infty$ aus dem Hauptfall	
II 1 (S. 233)	IV 1 (S. 260)	IIa (S. 541)	IVa (S. 549)	II (S. 67)	IV (S. 81)
2 (S. 241)	2 (S. 262)	b { α (S. 542)	b { α (S. 550)	2* (S. 66)	2* (S. 67)
2' (S. 244)	2' (S. 264)	β (S. 542)	β (S. 552)	... (S. 66, 67)	
2'' (S. 245)	2'' (S. 266)	c (S. 543)	c (S. 552)	1* (S. 65)	1* (S. 66)
3 (S. 246)	3 (S. 266)	d (S. 543)	d (S. 553)	... für $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} = \infty$ aus dem Hauptfall	
III 1 (S. 246)		IIIa (S. 543)		III (S. 95)	
2† (S. 251)		b { β (S. 546)		... für $\mathfrak{p}_{III} = \infty$ aus dem Hauptfall	
2 (S. 253)		α (S. 545)		4* (S. 90)	
2' (S. 255)		c (S. 547)		3* (S. 87)	
2'' (S. 256)		b γ (S. 547)		(S. 91 — Eine Besonderheit)	
3 (S. 257)		d { α (S. 548)		2* (S. 86)	
3' (S. 258)		β (S. 549)		(S. 87)	
3'' (S. 259)		e (S. 549)		1* (S. 86)	
4 (S. 259)		f (S. 549)		... für $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} = \mathfrak{p}_{III} = \infty$ aus dem Hauptfall	

Über die Elastizität der Erde bei Berücksichtigung ihrer variablen Dichte.

Von G. Herglotz in Göttingen.

Die elastische Nachgiebigkeit des Erdkörpers wurde zuerst von Lord Kelvin (Phil. Trans. 1863) in den Bereich der Diskussion gezogen, und für sie aus der Theorie der Meeresfluten eine obere Grenze bestimmt. Die Dichtezunahme gegen das Erdinnere hin wurde dabei außer acht gelassen und die Erde als homogen vorausgesetzt. Auf diese Lücke wies Darwin hin (Mess. of Math. 1878) und versuchte gleichzeitig eine Schätzung des Einflusses der Inhomogeneität auf diese obere Grenze zu machen, indem er sich plausibler Annahmen über die Art dieses Einflusses bediente. Später stellte Love (Treatise on elasticity I.) bloß das als wahrscheinlich hin, daß eine Dichtezunahme gegen den Erdmittelpunkt, in Analogie zu den Ergebnissen der Laplaceschen Theorie der flüssigen Erde, die scheinbare Festigkeit derselben gegen äußere deformierende Kräfte vergrößere.

Eine wichtige Anwendung fand die Theorie der elastischen Erde, als S. Newcomb (Monthly notices 1892) die Nichtübereinstimmung der berechneten und beobachteten Periode der Polschwankungen auf die durch Umlagerung der Rotationsachse erzeugten elastischen Deformationen zurückführte. Die genauere theoretische Ausführung dieses Gedankens durch S. S. Hough (Phil. Trans. 1896) ergab, daß die Chandlersche Periode herauskommt, wenn man der Erde ungefähr die Nachgiebigkeit des Stahles zuerteilt. Die hierbei eingeschlagene Methode besitzt jedoch einen Mangel, der darin besteht, daß zunächst das Vergrößerungsverhältnis der Eulerschen Periode für eine homogene Erde berechnet wurde, und mit diesem dann die für eine inhomogene starre Erde gültige Eulersche Periode multipliziert wurde, um dieselbe Größe für die nichtstarre Erde zu erhalten, während man strenge genommen jene Periode zugrunde zu legen hätte, die der Elliptizität $\frac{1}{232}$ einer im Gleichgewicht befindlichen flüssigen homogenen Erde zukommt. Diesen Mangel zu beseitigen, hätte man die durch Verlagerung der Rotationsachse erzeugten elastischen Deformationen unter der Voraussetzung der Inhomogeneität bestimmen müssen. Schon der Umstand, daß die Gleichgewichtstheorie einer flüssigen homogenen Erde für die Abplattung und Elliptizität $\left(=\frac{C-A}{C}\right)$ den gleichen Wert $\frac{1}{232}$ ergibt, während die beobachteten Werte $\frac{1}{298}$ bezw. $\frac{1}{305}$ sind, läßt erkennen, daß man unter Voraussetzung der Homogeneität nicht zu einer einwurfsfreien Schätzung der Nachgiebigkeit der Erde gelangen dürfte.

Es ist daher im folgenden das elastische Gleichgewicht einer inhomogenen der eigenen Schwere unterworfenen Kugel, die durch äußere Kräfte deformiert wird, untersucht worden. Es ergab sich dabei, daß die Dichtezunahme gegen den Erdmittelpunkt die scheinbare Festigkeit erhöht. Speziell beträgt für die Erde bei der Nachgiebigkeit des Stahles, und bei Zugrundelegung des Rocheschen Dichtigkeitsgesetzes, die durch die fluterzeugende Kraft entfernter Körper bewirkte Hebung oder Senkung des Erdbodens im Falle der Inhomogeneität etwa 0·80 von der im Falle der Homogeneität statthabenden. (Darwin schätzte diesen Bruchteil auf 0·97.) Es kann daher Lord Kelvins obere Grenze für die Nachgiebigkeit der Erde noch etwas weiter herabgedrückt werden.

Was nun die Bestimmung der Verlängerung der Eulerschen Periode angeht, so beseitigte die Berücksichtigung der Inhomogeneität den erwähnten der Theorie von Hough anhaftenden Mangel. Es liefert nämlich das Rochesche Gesetz für das Gleichgewicht der flüssigen Erde die Abplattung $= \frac{1}{297}$ und die Elliptizität $= \frac{1}{305.3}$, welche Werte

mit den beobachteten äußerst nahe übereinstimmen, und welche zugleich diejenigen sind, welche der Rechnung in Strenge zugrunde zu legen sind. Ferner fand sich das Vergrößerungsverhältnis der Eulerschen Periode gleich 1·57 statt des für die homogene Erde bestimmten Verhältnisses 1·47. Dadurch wird die Eulersche Periode für eine Erde vom Elastizitätsgrade des Stahles um etwa 1 Monat länger als die von Hough bestimmte, und daher läßt sich auch mit Rücksicht auf die Periode der Polschwankungen, die obere Grenze für die Nachgiebigkeit, durch Berücksichtigung der Inhomogeneität weiter heruntersetzen.

Zum Schlusse wurde auch noch die von E. Wiechert über die Dichtigkeitsverteilung im Erdinnern aufgestellte Hypothese an Stelle des Rocheschen Gesetzes angewandt. Für dieselbe ergab sich der von dem vorigen nur wenig verschiedene Wert 1·59 für das Vergrößerungsverhältnis der Eulerschen Periode. Soll dieses Verhältnis den durch die Beobachtungen geforderten Wert von 1·39 erhalten, so hat man bei Zugrundelegung des Wiechertsche Dichtegesetzes der Erde die Elastizitätskonstante $e = 11{\cdot}68.10^{11}$ (cgs) zu erteilen, während die Annahme einer homogenen Erde auf die Elastizitätskonstante $e = 9{\cdot}19.10^{11}$ führt.

I. Über die Deformation einer elastischen, gravitierenden und inhomogenen Kugel durch äußere Kräfte.

Zunächst handelt es sich darum, die von Thomson[1]) und Darwin angegebenen Resultate bezüglich der Deformation des elastischen homogenen Erdkörpers nun auch auf den Fall einer variablen Dichte auszudehnen. Man wird dabei, gestützt auf die von Thomson[2]) hervorgehobene Geringfügigkeit des Einflusses der Kompressibilität des Erdkörpers, auch hier unbedenklich ein inkompressibles Material voraussetzen dürfen. Die zu behandelnde Aufgabe ist dann des nähern diese: die Deformationen zu finden, welche eine elastische Kugel aus inkompressiblem, gravitierendem Material, dessen Dichte eine bekannte Funktion der Entfernung vom Kugelmittelpunkt ist, durch kleine, körperlich angreifende Kräfte erleidet. Die Behandlung dieser Frage wird sich natürlich der Laplaceschen Theorie[3]) der Figur der Planeten analog gestalten, da man ja gerade zu dieser zurückgelangt, wenn man die Elastizitätskonstante gleich Null setzt.

1) Natural philosophy. part II. art. 832 ff.
2) Natural philosophy. part II. art. 838.
3) Laplace, Méc. cél. tom. II.

Seien u, v, w die Verrückungen eines Punktes x, y, z der Kugel, also kleine Größen, deren Quadrate bereits vernachlässigt werden sollen, und werde gesetzt:

(1) $$q = ux + vy + wz,$$

sodaß $\frac{1}{r}q$ die Verrückung in Richtung des Radius r darstellt, so werden die deformierten Flächen gleicher Dichte durch die Gleichung bestimmt sein:

(2) $$R = r + \frac{1}{r}q,$$

in der r als Parameter anzusehen ist. Speziell wird, unter a den Kugelradius verstanden, die Gleichung der deformierten Oberfläche sein:

(3) $$R = a + \frac{1}{a}\bar{q},$$

wofern ein Querstrich über einer Größe anzeigt, daß ihr Wert an der Kugeloberfläche (für $r = a$) zu nehmen ist.

Endlich wird hiernach die Dichte σ im Punkte xyz den Wert haben:

(4) $$\sigma = \varrho - \frac{q}{r}\frac{d\varrho}{dr},$$

während $\varrho = f(r)$ die Dichte der Kugel vor der Deformation war.

Bezeichnen nun weiterhin V das Gravitationspotential der deformierten Kugel, Π den Druck im Innern derselben, c ihre Elastizitätskonstante und K das Potential der deformierenden Kräfte, so sind die Bedingungen des innern Gleichgewichtes bekanntlich diese:

(5) $$\begin{aligned} c\Delta u + \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \sigma\frac{\partial(V+K)}{\partial x} &= 0 \\ c\Delta v + \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \sigma\frac{\partial(V+K)}{\partial y} &= 0 \\ c\Delta w + \frac{\partial \Pi}{\partial z} + \sigma\frac{\partial(V+K)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Die Komponenten des Druckes auf ein normal zum Radius stehendes Flächenelement, haben ferner die Werte:

(6) $$\begin{aligned} F &= \Pi\frac{x}{r} + \frac{c}{r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial x} - u\right) \\ G &= \Pi\frac{y}{r} + \frac{c}{r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial y} - v\right) \\ H &= \Pi\frac{z}{r} + \frac{c}{r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial z} - w\right). \end{aligned}$$

Nun wirken auf die Oberfläche keine äußeren Drucke, daher müssen an derselben die F, G, H[1]) verschwinden, und man hat die Grenzbedingungen:

$$(7)\qquad F = G = H = 0, \quad \text{für} \quad r = a + \frac{1}{a}\bar{q}.$$

Nunmehr soll, wie es bei der Anwendung stets der Fall ist, angenommen werden, daß sich das Potential der äußeren Kräfte in die Reihe entwickeln lasse:

$$(8)\qquad K = \sum_n k_n K_n(x, y, z),$$

in der die K_n räumliche Kugelfunktionen $n$ten Grades, die k_n aber Konstante sind. Man kann dann für q den, wie sich zeigt, ausreichenden Ansatz machen:

$$(9)\qquad q = \sum_n q_n(r) \cdot K_n(x, y, z),$$

wo die $q_n(r)$ noch zu bestimmende Funktionen von r allein sind. Mit Hilfe desselben läßt sich der Ausdruck des Potentials V leicht aufstellen. Offenbar setzt er sich zusammen aus dem Potential einer Kugel des Radius a und der Dichte σ und aus dem Potential einer dieselbe überdeckenden Massenbelegung der Dichte: $\frac{1}{a}\rho\bar{q}$. Dementsprechend erhält man, unter f die Gravitationskonstante verstehend:

$$V = 4\pi f\left(\frac{1}{r}\int_0^r \rho r^2 dr + \int_r^a \rho r dr\right)$$

$$(10)\qquad + 4\pi f \sum_n \frac{1}{2n+1}\left(\rho\bar{q}_n - \frac{1}{r^{2n+1}}\int_0^r \rho' q_n r^{2n+1} dr - \int_r^a \rho' q_n dr\right)\cdot K_n(xyz)$$

$$= \Gamma(r) + 4\pi f \sum_n \frac{1}{2n+1}\left(\int_0^r \rho\, d(q_n r^{2n+1}) + \int_r^a \rho\, dq_n\right) K_n(xyz)$$

$$(11)\qquad \Gamma(r) = 4\pi f\left(\frac{1}{r}\int_0^r \rho r^2 dr + \int_r^a \rho r dr\right)$$

Setzt man also:

$$(12)\qquad \varkappa_n(r) = \frac{4\pi f}{2n+1}\left(\int_0^r \rho\, dq_n r^{2n+1} + \int_r^a \rho\, dq_n\right)$$

$$(13)\qquad \mathfrak{K} = \sum_n (k_n + \varkappa_n) K_n(x, y, z),$$

---

1) Man hätte hier noch die veränderte Richtung der Oberflächennormale zu berücksichtigen; dies gibt aber bei einem inkompressiblen Material nur Korrektionen II. Ordnung.

so wird:

$$V + K = \Gamma(r) + \mathfrak{K}, \tag{14}$$

worin aber jetzt $\mathfrak{K}$ von der Ordnung der Verrückungen klein ist. Bei Vernachlässigung der Quadrate derselben, wird man daher, nach Einführung von:

$$\begin{aligned} p &= \Pi + \int_a^r \varrho \, d\,\Gamma(r) \\ \gamma &= \frac{4\pi f \varrho'}{r^4} \int_0^r \varrho r^2 dr, \end{aligned} \tag{15}$$

die Grundgleichungen (5) und (6) in der Form schreiben können.

$$\begin{aligned} c\Delta u + \gamma q x + \frac{\partial p}{\partial x} + \varrho \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x} &= 0 \\ c\Delta v + \gamma q y + \frac{\partial p}{\partial y} + \varrho \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial y} &= 0 \\ c\Delta w + \gamma q z + \frac{\partial p}{\partial z} + \varrho \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} F &= \left(p + \int_r^a \varrho \, d\Gamma\right) \frac{x}{r} + \frac{c}{r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial x} - u\right) \\ G &= \left(p + \int_r^a \varrho \, d\Gamma\right) \frac{y}{r} + \frac{c}{r}\left(r \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial y} - v\right) \\ H &= \left(p + \int_r^a \varrho \, d\Gamma\right) \frac{z}{r} + \frac{c}{r}\left(r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial z} - w\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Aus den Gleichungen (16) leitet man nun zwei neue Beziehungen ab, die bloß p und q enthalten, indem man das eine Mal mit bezw. x, y, z multipliziert und addiert, und das andre Mal nach bezw. x, y, z differenziert, und ebenfalls wieder addiert. Man erhält hierdurch:

$$\begin{aligned} c\Delta q + r \frac{\partial p}{\partial r} + \varrho r \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial r} + \gamma q r^2 &= 0 \\ \rho \Delta q + \Delta p + \varrho' \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial r} + r \frac{\partial(\gamma q)}{\partial r} + 3\gamma q &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Dem Ansatze für q entsprechend, läßt sich nun auch für p analog setzen:

$$p = \sum_n p_n(r) K_n(x, y, z). \tag{19}$$

Führt man jetzt die Entwicklungen (9), (13), (19) in die Gleichungen (18) ein, und vergleicht die Koeffizienten der einzelnen Kugelfunktionen desselben Grades, so finden sich die beiden Gleichungen für $p_n(r)$ und $q_n(r)$:

$$
(20)\quad
\begin{aligned}
&c\left(q_n'' + 2\frac{n+1}{r}q_n'\right) + r\left(p_n' + \frac{n}{r}p_n\right) + \varrho r\left(\varkappa_n' + \frac{n}{r}\varkappa_n\right) + \\
&\qquad + n\varrho k_n + \gamma r^2 q_n = 0 \\
&p_n'' + 2\frac{n+1}{r}p_n' + \varrho\left(\varkappa_n'' + 2\frac{n+1}{r}\varkappa_n'\right) + \varrho'\left(\varkappa_n' + \frac{n}{r}\varkappa_n\right) + \\
&\qquad + \frac{n}{r}\varrho' k_n + \gamma r q_n' + (r\gamma' + (n+3)\gamma)q_n = 0.
\end{aligned}
$$

Um endlich eine Gleichung für q_n allein herzustellen, hat man bloß nötig, aus den beiden Gleichungen (20) die Kombination $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\frac{n+1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)I - \left(r\frac{\partial}{\partial r} + n + 2\right)II$ zu bilden. Dieselbe ergibt:

$$
(21)\quad
\begin{aligned}
&cDq_n + n(n+1)\left[\frac{\varrho'}{r}(k_n + \varkappa_n) - \gamma q_n\right] = 0 \\
&Dq_n = \frac{1}{r^{2n+2}}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r^{2n+4}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}q_n.
\end{aligned}
$$

Die Funktion p_n stellt sich dann durch q_n ausgedrückt in der Form dar:

$$
(22)\quad p_n + \varrho(k_n + \varkappa_n) = -\frac{c}{n(n+1)r^{2n+2}}\frac{d}{dr}r^{n+3}\frac{d}{dr}r_n\frac{d}{dr}q_n.
$$

Gleichung (21) besitzt nun noch den Übelstand, daß sie wegen des in ihr auftretenden $\varkappa_n$ das q_n unter dem Integralzeichen enthält. Derselbe wird einfach dadurch beseitigt, daß man aus (21) $\varkappa_n$ bestimmt, und in die aus (12) folgende Relation:

$$
\varkappa_n'' + 2\frac{n+1}{r}\varkappa_n' = \frac{4\pi f\varrho'}{r}q_n
$$

einträgt. Darnach ergibt sich *für q_n die lineare Differentialgleichung 6ter Ordnung:*

$$
\frac{d}{dr}r^{2n+2}\frac{d}{dr}\frac{r}{\varrho'}Dq_n =
$$

$$
(23)\quad = \frac{4\pi f n(n+1)M}{c}r^{2n-1}\left[q_n'' + 2\left(\frac{\varrho r^2}{M} + \frac{n-2}{r}\right)q_n' + 2(n-1)\left(\frac{\varrho r}{M} - \frac{3}{r^2}\right)q_n\right]
$$

$$
M = \int_0^r \varrho r^2 dr.
$$

Für $c = 0$ geht dieselbe in die bekannte Differentialgleichung der Laplaceschen Theorie der Planetenfigur über.

Was nun die Bestimmung der in q_n willkürlichen Konstanten anbelangt, so bemerke man, daß von den 6 Partikularlösungen der Gleichung (23) bloß die drei für $r = 0$ endlich bleibenden Lösungen brauchbar sind. Von den drei hierdurch auftretenden Konstanten bestimmt sich die eine durch die Forderung, daß q_n auch der Gleichung (21) Genüge leisten soll, die beiden anderen dagegen durch die Bedingungen (7). Um diese letzteren explizite zu formulieren, hat man u, v, w durch q auszudrücken, und daraus F, G, H abzuleiten. Die Verrückungen u, v, w lassen sich direkt aus den Gleichungen (16) bestimmen, in denen man $p, q, \mathfrak{K}$ jetzt als bekannt anzusehen hat. Es ergeben sich die Werte:

$$\begin{aligned} u &= \sum_n \left(s_n \frac{\partial K_n}{\partial x} + t_n x K_n\right) \\ v &= \sum_n \left(s_n \frac{\partial K_n}{\partial y} + t_n y K_n\right) \qquad (24) \\ w &= \sum_n \left(s_n \frac{\partial K_n}{\partial z} + t_n z K_n\right) \end{aligned}$$

$$(25) \qquad s_n = \frac{r}{n(n+1)} q_n' + \frac{1}{n} q_n, \quad t_n = -\frac{1}{n+1} \frac{1}{r} q_n'.$$

Führt man dieselben in die Ausdrücke (17) von F, G, H ein, so findet sich ohne weiteres:

$$\begin{aligned} F &= \frac{x}{r} \int_r^a \varrho \, d\Gamma + \sum_n \left(\sigma_n \frac{\partial K_n}{\partial x} + \tau_n x K_n\right) \\ G &= \frac{y}{r} \int_r^a \varrho \, d\Gamma + \sum_n \left(\sigma_n \frac{\partial K_n}{\partial y} + \tau_n y K_n\right) \qquad (26) \\ H &= \frac{z}{r} \int_r^a \varrho \, d\Gamma + \sum_n \left(\sigma_n \frac{\partial K_n}{\partial z} + \tau_n z K_n\right) \end{aligned}$$

$$(27) \qquad \begin{aligned} \sigma_n &= \frac{c}{n(n+1)r} (r^2 q_n'' + 2nrq_n' + 2(n^2-1)q_n) \\ \tau_n &= \frac{1}{r} p_n - \frac{c}{(n+1)r^2} (r^2 q_n'' - 2rq_n'). \end{aligned}$$

Damit diese Werte für $r = a + \frac{1}{a}\bar{q}$ verschwinden, ist offenbar ausreichend, daß:

$$(28) \qquad \sigma_n = 0, \quad r^2 \tau_n = \varrho q_n \frac{d\Gamma}{dr} \quad \text{für} \quad r = a.$$

Dies sind die beiden noch fehlenden *Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten*, die man auch in der Form schreiben kann:

$$(29) \qquad \left.\begin{aligned} r^2 q_n'' + 2nrq_n' + 2(n^2-1)q_n &= 0 \\ p_n + \frac{2c}{r^3}(rq_n' + (n-1)q_n) + r\frac{\varrho}{\varrho'}\gamma q_n &= 0 \end{aligned}\right\} \text{für} \quad r = a.$$

II. Die Rochesche Hypothese über die Dichteverteilung im Erdinnern.

Für die Dichteverteilung im Innern der Erde möge nun das von Lipschitz[1]) gebrauchte und im Falle der Laplaceschen Theorie der Erdfigur ausführlich studierte Gesetz angenommen werden:

$$\varrho = \varrho_0(1 - \eta r^\lambda). \tag{1}$$

Damit ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{4\pi f \lambda \varrho_0^2 \eta}{3} r^{\lambda-2}\left(1 - \frac{3\eta}{\lambda+3} r^\lambda\right) \\ \Gamma &= -\frac{4\pi f \varrho_0 r}{3}\left(1 - \frac{3\eta}{\lambda+3} r^\lambda\right) \\ M &= \tfrac{1}{3}\varrho_0 r^3\left(1 - \frac{3\eta}{\lambda+3} r^\lambda\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Hiermit wird die Differentialgleichung für q_n:

$$\begin{aligned} & r^{n-1}\frac{d}{dr} r^{-2n}\frac{d}{dr} r^{1-\lambda}\frac{d}{dr} r^{-1}\frac{d}{dr} r^{2n+4}\frac{d}{dr} r^{-1}\frac{d}{dr} q_n + \frac{\alpha}{r^{n+2}}\frac{d}{dr} r^{2n+2}\frac{d}{dr} q_n = \\ & = \beta r^{n+\lambda-2}(r^2 q_n'' + 2(n+\lambda+1) r q_n' + 2\lambda(n-1) q_n) \\ & \alpha = \frac{4\pi f \lambda n(n+1)\varrho_0^2\eta}{3c}, \quad \beta = \frac{4\pi f \lambda n(n+1)\varrho_0^2\eta^2}{(3+\lambda)c}. \end{aligned} \tag{3}$$

Für $r = a$ hat q_n die beiden Bedingungen I. (29) zu erfüllen, die sich hier noch etwas bequemer gestalten lassen. Berechnet man nämlich aus der Gleichung I. (21) die Größe $k_n + \varkappa_n$ und setzt sie in dem Ausdruck (22) für p_n ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} n(n+1)\left(p_n - \frac{\varrho\Gamma'}{r} q_n\right) &= \frac{c\varrho}{\varrho'}\frac{1}{r^{2n+1}}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r^{2n+4}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr} q_n - \\ & - \frac{c}{r^{2n+2}}\frac{d}{dr} r^{n+3}\frac{d}{dr} r^n \frac{d}{dr} q_n. \end{aligned} \tag{4}$$

Dadurch kann man die beiden Grenzbedingungen schreiben:

$$\begin{aligned} & r^2 q_n'' + 2nr q_n' + 2(n^2-1) q_n = 0 \\ & \frac{\varrho}{\varrho'} r\frac{d}{dr} r^{-1}\frac{d}{dr} r^{2n+4}\frac{d}{dr} r^{-1}\frac{d}{dr} q_n - \frac{d}{dr} r^{n+3}\frac{d}{dr} r^n\frac{d}{dr} q_n + \\ & + 2n(n+1) r^{n+2}\frac{d}{dr} r^{n-1} q_n = 0 \\ & \text{für } r = a. \end{aligned} \tag{5}$$

Die 3te zur Bestimmung der 3, in q_n auftretenden willkürlichen Konstanten noch nötige Bedingung besteht, wie bereits erwähnt, darin,

---

1) Crelle LXII. 1863. Vgl. auch Tisserand Méc. cél. chap. XV.

daß q_n auch der Gleichung I. (21) genügen muß. — Es reicht dazu aus, daß dies bloß für einen speziellen Wert von r etwa $r = 0$ der Fall ist, weil dann q_n schon von selbst jener Gleichung für alle Werte von r genügen wird.

Die Konstanten im Dichtigkeitsgesetz (1) hat man nun bei der Anwendung auf die Erde so zu bestimmen, daß man erstens die durch die Beobachtungen bekannte mittlere Dichte erhält, und daß zweitens die Laplacesche Theorie der Figur der Erde unter Zugrundelegung eben dieses Gesetzes die beobachteten Werte der Abplattung und der Elliptizität $\left(= \frac{C-A}{C}\right.$ A, C . . Trägheitsmomente$\left.\right)$ ergibt. Roche[1]) zeigte, daß für $\lambda = 2$ eine befriedigende Übereinstimmung zu erhalten ist, während Lipschitz $\lambda = 2{\cdot}39$ fand. Im folgenden soll nun das spezielle Gesetz von Roche festgehalten, also $\lambda = 2$ gesetzt werden. Dann wird aber die noch fehlende 3te Bedingung die Form erhalten:

$$(6) \quad \frac{c(Dq_n)_0}{n(n+1)} + \frac{8\pi f \varrho_0^2 \eta}{3}(q_n)_0 = 2\varrho_0 \eta\left[k_n + \frac{4\pi f \varrho_0}{2n+1}\left(\frac{\overline{\varrho q_n}}{\varrho_0} + 2\eta\int_0^a q_n r\,dr\right)\right],$$

wobei man bemerke, daß: $(Dq_n)_0 = 8(2n+3)(2n+5)$ dem Koeffizienten von r^4 in q_n ist. Ferner sind die bei der Erde vorzugsweise in Betracht kommenden äußeren Kräfte die Zentrifugalkraft der Erdrotation und die Anziehung eines im Verhältnis zum Erdradius weit entfernten Himmelskörpers. In beiden Fällen hat man als Potential eine räumliche Kugelfunktion 2ten Grades zu nehmen.

Es möge deshalb für das folgende jetzt $n = 2$ gesetzt werden. Man hat in diesem Falle:

$$\alpha = \frac{16\pi f \varrho_0^2 \eta}{c}, \quad \beta = \frac{48\pi f \varrho_0^3 \eta^2}{5}$$

und wenn man noch folgende Größen einführt:

$$(7) \quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}}, \quad \sigma = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^3}}, \quad \xi = \frac{r}{\varepsilon},$$

so folgt für q_2, wofür nunmehr einfach q geschrieben werde, die Gleichung:

$$(8) \quad \xi^5 \frac{d}{d\xi}\xi^{-4}\frac{d}{d\xi}\xi^{-1}\frac{d}{d\xi}\xi^{-1}\frac{d}{d\xi}\xi^8\frac{d}{d\xi}\xi^{-1}\frac{dq}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}\xi^6\frac{dq}{d\xi} = \\ = \sigma\xi^6(\xi^2 q'' + 10\xi q' + 4q).$$

Zur Integration setze man:

$$(9) \quad q = \sum \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!} N_\nu \xi^{2\nu},$$

1) Acad. des sciences d. Montpellier 1858; Compt. R. tom. 39 (1854); vgl. auch Helmert, Höhere Geodäsie II, pag. 473—492.

dann sind die N_ν durch folgende einfache Rekursion bestimmt:

$$(10) \qquad N_\nu + N_{\nu-2} = 2\sigma(2\nu^2 - 3\nu - 7)N_{\nu-3}.$$

Hierbei bleiben $N_0 N_1 N_2$ willkürlich, und dementsprechend erhält man die 3 ganzen, transzendenten Partikularintegrale:

$$(11) \qquad \begin{aligned} \varphi(\xi) &= \sum_0^\infty \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\alpha_\nu \xi^{2\nu} \\ \psi(\xi) &= \sum_1^\infty \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\beta_\nu \xi^{2\nu} \\ \chi(\xi) &= \sum_2^\infty \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\gamma_\nu \xi^{2\nu}, \end{aligned}$$

wobei die Werte der ersten Koeffizienten $\alpha_\nu \beta_\nu \gamma_\nu$ sind:

λ	α_λ	β_λ	γ_λ
0	$1/4$	0	0
1	0	1	0
2	0	0	1
3	σ	-2	0
4	0	26σ	-1
5	$-\sigma$	1	56σ
6	$94\sigma^2$	-120σ	1
7	σ	$-1 + 3640\sigma^2$	-196σ
8	$-288\sigma^2$	314σ	$-1 + 10864\sigma^2$
9	$-\sigma + 24064\sigma^3$	$1 - 34360\sigma^2$	452σ
10	$614\sigma^2$	$-640\sigma + 118664\sigma^3$	$1 - 74760\sigma^2$

Die allgemeinste für $\xi = 0$ endlich bleibende Lösung ist also

$$(12) \qquad q = A\varphi(\xi) + B\psi(\xi) + C\chi(\xi).$$

Man bemerke nun, daß für $\xi = 0$:

$$(13) \qquad (q)_0 = \frac{1}{5!\,2}A, \quad (Dq)_0 = \frac{2}{5!\,\varepsilon^4}C$$

ist, sodaß mit diesen Werten und den Bezeichnungen:

$$(14) \qquad h = \frac{3k_2}{4\pi f \varrho_0}, \quad \xi_1 = \frac{a}{\varepsilon}$$

die drei zur Bestimmung von A, B, C dienenden Gleichungen (5) und (6), für $n = 2$ übergehen in:

$$
(15)\quad \left.\begin{aligned}
&\xi^2 \frac{d^2 q}{d\xi^2} + 4\xi \frac{dq}{d\xi} + 6q = 0 \\
&\frac{d}{d\xi}\xi^{-1}\frac{d}{d\xi}\xi^{8}\frac{d}{d\xi}\xi^{-1}\frac{dq}{d\xi} + \frac{10\sigma\varrho_0}{3\bar{\varrho}}\left(\frac{d}{d\xi}\xi^{5}\frac{d}{d\xi}\xi^{2}\frac{dq}{d\xi} - 12\xi^4\frac{d}{d\xi}\xi q\right) = 0
\end{aligned}\right\}\text{für } \xi = \xi_1,
$$

$$
\frac{1}{5!}\left(\tfrac{1}{2}A + 2C\right) = \frac{3}{5\varrho_0}\,\overline{\varrho q} + 2\sigma\int_0^{\xi_1} q\xi\, d\xi + h.
$$

Hier hat man jetzt den Ausdruck (12) für q einzusetzen. Zu diesem Zwecke bilde man die folgenden Funktionen:

$$
\varphi_1(\xi) = \sum_0^\infty (2\nu^2 + 3\nu + 3)\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\alpha_\nu \xi^{2\nu}
$$

$$
\psi_1(\xi) = \sum_1^\infty (2\nu^2 + 3\nu + 3)\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\beta_\nu \xi^{2\nu}
$$

$$
\chi_1(\xi) = \sum_2^\infty (2\nu^2 + 3\nu + 3)\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\gamma_\nu \xi^{2\nu}
$$

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
\varphi_2(\xi) &= \xi^2 \sum_0^\infty \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\alpha_{\nu+2}\xi^{2\nu} + \\
&\quad + \frac{20\sigma\varrho_0}{3\bar{\varrho}}\sum_0^\infty (2\nu+1)(2\nu^2+5\nu-6)\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\alpha_\nu \xi^{2\nu} \\
\psi_2(\xi) &= \xi^2 \sum_0^\infty \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\beta_{\nu+2}\xi^{2\nu} + \\
&\quad + \frac{20\sigma\varrho_0}{3\bar{\varrho}}\sum_1^\infty (2\nu+1)(2\nu^2+5\nu-6)\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\beta_\nu \xi^{2\nu} \\
\chi_2(\xi) &= \xi^2 \sum_0^\infty \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\gamma_{\nu+2}\xi^{2\nu} + \\
&\quad + \frac{20\varrho\sigma_0}{3\bar{\varrho}}\sum_2^\infty (2\nu+1)(2\nu^2+5\nu-6)\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\gamma_\nu \xi^{2\nu}
\end{aligned}
$$

$$
\varphi_3(\xi) = \sum_0^\infty \frac{(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\alpha_\nu \xi^{2\nu} - \frac{1}{240\sigma\xi^2}
$$

$$
\psi_3(\xi) = \sum_1^\infty \frac{\nu+2}{(2\nu+5)!}\beta_\nu \xi^{2\nu}
$$

$$
\chi_3(\xi) = \sum_2^\infty \frac{\nu+2}{(2\nu+5)!}\gamma_\nu \xi^{2\nu} - \frac{1}{60\sigma\xi^2}.
$$

Dann gehen die drei Gleichungen (15) über in folgende:

$$
(17)\quad
\begin{aligned}
&A\varphi_1(\xi_1) + B\psi_1(\xi_1) + C\chi_1(\xi_1) = 0 \\
&A\varphi_2(\xi_1) + B\psi_2(\xi_1) + C\chi_2(\xi_1) = 0 \\
&A\varphi_3(\xi_1) + B\psi_3(\xi_1) + C\chi_3(\xi_1) + \frac{1}{\sigma\xi^2}\left(h + \frac{3\bar{\varrho}}{5\varrho_0}\,\bar{q}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Aus diesen 3 Gleichungen sind A, B, C zu bestimmen, wobei man zu beachten hat, daß

$$\bar{q} = A\varphi(\xi_1) + B\psi(\xi_1) + C\chi(\xi_1)$$

ist. Trägt man hierauf die gefundenen Werte in (12) ein, so folgt:

$$q = -\frac{h}{\frac{3\bar{\varrho}}{5\varrho_0} + \sigma\xi_1^2 \frac{\varDelta_2}{\varDelta_1}} \cdot \frac{\varDelta}{\varDelta_1}, \tag{18}$$

wobei gesetzt ist:

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} \varphi(\xi_1), & \psi(\xi_1), & \chi(\xi_1) \\ \varphi_1(\xi_1), & \psi_1(\xi_1), & \chi_1(\xi_1) \\ \varphi_2(\xi_1), & \psi_2(\xi_1), & \chi_2(\xi_1) \end{vmatrix} \qquad \varDelta_2 = \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi_1), & \psi_1(\xi_1), & \chi_1(\xi_1) \\ \varphi_2(\xi_1), & \psi_2(\xi_1), & \chi_2(\xi_1) \\ \varphi_3(\xi_1), & \psi_3(\xi_1), & \chi_3(\xi_1) \end{vmatrix}$$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \varphi(\xi), & \psi(\xi), & \chi(\xi) \\ \varphi_1(\xi), & \psi_1(\xi), & \chi_1(\xi) \\ \varphi_2(\xi), & \psi_2(\xi), & \chi_2(\xi) \end{vmatrix}. \tag{19}$$

An der Oberfläche, für $\xi = \xi_1$, ist speziell:

$$\bar{q} = -\frac{h}{\frac{3\bar{\varrho}}{5\varrho_0} + \sigma\xi_1^2 \frac{\varDelta_2}{\varDelta_1}}. \tag{20}$$

Die Schichten gleicher Dichte haben die Gleichung:

$$R = r\left(1 + q(\xi)\cdot\frac{K_2(x, y, z)}{r^2}\right), \quad \xi = \frac{r}{\varepsilon}, \tag{21}$$

wo r der mittlere Radius der betreffenden Schichte ist.

Wenn im besonderen $K_2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) - z^2$ ist, so sind die Schichten Rotationsellipsoide und ihre Abplattung ist gerade $q(\xi)$.

III. Numerische Anwendung auf den Fall der Erde.

Die erhaltenen Formeln mögen nun eine zahlenmäßige Auswertung für den Fall der elastischen Erde finden.

Für die Konstanten im Dichtigkeitsgesetz: $\varrho = \varrho_0(1 - \eta r^2)$ werde mit **Roche** genommen:

$$\varrho_0 = 10.1, \quad \eta = \frac{0\cdot764}{a^2}, \quad \text{also} \quad \bar{\varrho} = 2\cdot384,$$

ferner möge der Erde der Elastizitätsgrad des Stahles beigelegt werden, sodaß also zu nehmen ist:

$$c = 7\cdot65.10^{11}(cgs).$$

Da nun $a = 6\cdot37.10^8$ cm, so wird:

$$\sigma = 0\cdot0389, \quad \xi_1 = 3\cdot432.$$

Mit diesen Werten lassen sich die Funktionen $\varphi\psi\chi\ldots$ leicht berechnen, und zwar genügen etwa 10 Glieder jeder Reihe, um die ersten fünf geltenden Ziffern des betreffenden Funktionswertes richtig zu erhalten. Man findet:

$$\varphi(\xi_1) = 0{\cdot}004198 \quad \varphi_1(\xi_1) = 0{\cdot}01344$$
$$\psi(\xi_1) = 0{\cdot}01330 \quad \psi_1(\xi_1) = 0.09234$$
$$\chi(\xi_1) = 0{\cdot}004510 \quad \chi_1(\xi_1) = 0{\cdot}07472$$
$$\varphi_2(\xi_1) = -0{\cdot}01481 \quad \varphi_3(\xi_1) = -0{\cdot}004915$$
$$\psi_2(\xi_1) = -0{\cdot}1830 \quad \psi_3(\xi_1) = 0{\cdot}006825$$
$$\chi_2(\xi_1) = 0{\cdot}4377 \quad \chi_3(\xi_1) = -0{\cdot}03485$$

und daraus weiterhin:

$$\Delta_1 = 0{\cdot}0001292$$
$$\Delta_2 = -0{\cdot}0002755.$$

Bezeichnet nun g die Beschleunigung der Erdschwere, so findet sich für h:

$$h = (1 - \tfrac{3}{5}\eta a^2)\frac{a k_2}{g} = 0{\cdot}5416\frac{a k_2}{g}.$$

Mit Rücksicht auf das Spätere, soll jetzt $k_2 = \frac{1}{2}\omega^2$ ($\omega\ldots$ Rotationsgeschwindigkeit der Erde) genommen werden, was man unbeschadet der Allgemeinheit tun darf, da $K_2(xyz)$ ja ebenfalls einen willkürlichen Faktor enthält. Dann folgt sofort:

$$h = 0{\cdot}0009303$$

und:

$$\bar{q} = \frac{1}{898{\cdot}4}.$$

Man hat also das folgende Resultat:

Wird der Erde der Elastizitätsgrad des Stahles beigelegt, und dieselbe durch äußere Kräfte deformiert, die ein Potential besitzen, das eine räumliche Kugelfunktion 2ten Grades ist:

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 K_2(xyz),$$

so ist die deformierte Gestalt der Oberfläche gegeben durch:

$$\text{(A)} \qquad r = a\left(1 + \frac{1}{898.4}\frac{K_2(xyz)}{a^2}\right).$$

Betrachtet man speziell die durch die eigene Rotation erzeugte Deformation, so sind die äußeren Kräfte die Zentrifugalkräfte, für die man zu setzen hat:

$$K_2 = \tfrac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) - z^2.$$

Daraus folgt sofort, daß die Oberfläche ein Rotationsellipsoid mit der Abplattung: $\frac{1}{898.4}$ wird. —

Zum Vergleiche mögen nun die analogen Zahlen für die homogene Erde hier Platz finden. Man hat in diesem Falle

$$\bar{q} = \frac{5}{2} \frac{h}{1 + \frac{19c}{2g\varrho a}}, \quad h = \frac{3k_2}{4\pi f \varrho} = \frac{ak_2}{g},$$

wo nun für ϱ die mittlere Erddichte zu nehmen ist.

Mit den obigen Zahlenangaben findet sich für $k_2 = \frac{\omega^2}{2}$:

$$\bar{q} = \frac{1}{725.4}.$$

Es wird also bei demselben äußeren Störungspotential wie vorhin jetzt die deformierte Gestalt der Oberfläche gegeben sein durch:

$$\text{(B)} \qquad r = a\left(1 + \frac{1}{725.4} \frac{K_2(xyz)}{a^2}\right).$$

Die durch die eigene Rotation erzeugte Abplattung ist: $\frac{1}{725.4}$.

Der Vergleich von (A) und (B) gibt folgendes Resultat:

Bei dem Nachgiebigkeitsgrade des Stahles ist die durch ein Potential 2ten Grades erzeugte Deformation bei der inhomogenen Erde nur 0·807 oder etwa $^4/_5$ von jener bei der homogenen Erde.

Das Verhältnis ist also ein erheblich geringeres, als es von Darwin geschätzt wurde, der es gleich 0·970 fand.

IV. Die Eulersche Periode der nichtstarren Erde.

Bewegt sich die instantane Rotationsachse relativ zum Erdkörper, so bewirkt die hierdurch erzeugte Veränderung der Zentrifugalkraft eine elastische Deformation der Erde, mithin eine Variation des Trägheitsellipsoides, welche nun ihrerseits bekanntlich wieder die Verlängerung der Periode der freien Rotation zur Folge hat.

Welches ist nun zunächst die durch Verlagerung der Rotationsachse erzeugte elastische Deformation?

Man hat bei der Beantwortung dieser Frage von der natürlichen Vorstellung auszugehen[1]), daß bei der gleichförmigen Rotation der Erde um ihre Figurenachse die elastischen Kräfte durchaus nicht beansprucht werden, daß also auch noch Gleichgewicht bestände, wenn die Erde plötzlich verflüssigt würde. In diesem Falle aber muß die

1) Vgl. Klein-Sommerfeld, Kreiseltheorie III. pag. 697 ff.

Laplacesche Theorie gelten, d. h es muß die Abplattung der Schichten gleicher Dichte den aus derselben folgenden Wert besitzen.

Ist aber nun diese Voraussetzung eingeführt, dann ist man berechtigt, die durch Verlagerung der Rotationsachse entstehende neue Form der Flächen gleicher Dichte folgendermaßen zu bestimmen: Man sucht erst die Deformation, welche die durch Ablenkung der Rotationsachse erzeugte Variation der Zentrifugalkraft bei einer Kugel mit gleicher Dichteverteilung hervorrufen würde, und bringt dieselbe dann an der alten Form der Flächen gleicher Dichte an.

Sind nun l, m, 1 (unter l, m kleine Größen verstanden) die Richtungskosinusse der gestörten Rotationsachse bezogen auf das alte, in der Erde festliegende System der Hauptachsen, so ist die Variation des Zentrifugalkraftpotentials:

(1) $$K = -\omega^2(lx + my)z.$$

Dies erzeugt als störendes Potential genommen nach III. eine Deformation der Schichten gleicher Dichte:

(2) $$\delta r = -rq(l\cos\varphi + m\sin\varphi)\sin 2\theta,$$

wenn φ die geographische Länge und θ die Nordpolardistanz auf der Erde ist.

Ist also e die Abplattung der Schichten gleicher Dichte bei der gleichförmigen Rotation um die Figurenachse, so wird nach der Verlagerung der Rotationsachse die Gleichung dieser Schichten sein:

(3) $$R = r\{1 + e(\tfrac{1}{3} - \cos^2\theta) - q(l\cos\varphi + m\sin\varphi)\sin 2\theta\}.$$

Die Trägheitsgrößen dieser neuen durch (3) bestimmten Gleichgewichtsfigur hat man nun behufs Aufstellung der Rotationsgleichungen für das alte System der Hauptachsen zu ermitteln. Zu diesem Zwecke bezeichne man mit A, A, C die Trägheitsmomente der ungestörten, also durch:

(4) $$R = r\{1 + e(\tfrac{1}{3} - \cos^2\theta)\}$$

gegebenen Figur. Dann findet man sofort:

(5) $$\int(y^2 + z^2)dm = A, \quad \int(x^2 + z^2)dm = A, \quad \int(x^2 + y^2)dm = C,$$
$$\int yz\,dm = -\frac{8m\pi}{15}\int_0^a \varrho\, dqr^5, \quad \int xz\,dm = -\frac{8l\pi}{15}\int_0^a \varrho\, dqr^5, \quad \int xy\,dm = 0.$$

Beachtet man nun, daß:

(6) $$C - A = \frac{8\pi}{15}\int_0^a \varrho\, der^5,$$

ist, und setzt zur Abkürzung:

(7) $$\nu = \frac{\int\limits_0^a \varrho \, d q r^5}{\int\limits_0^a \varrho \, d e r^5},$$

so sind die 6 Trägheitsgrößen (5) der Figur (3) auch gegeben durch:

(8) $$\begin{matrix} A & A & C \\ -\nu m(C-A), & -\nu l(C-A), & 0. \end{matrix}$$

Bezeichnen jetzt p, q, $r \doteq \omega$ die Rotationsgeschwindigkeiten des alten Hauptachsensystemes, so wird selbstverständlich zu setzen sein:

(9) $$l = \frac{p}{\omega}, \quad m = \frac{q}{\omega},$$

und der Impulsvektor wird den Wert haben:

(10) $$\begin{aligned} J_x &= Ap + \nu l\omega(C-A) \\ J_y &= Aq + \nu m\omega(C-A) \\ J_z &= Cr. \end{aligned}$$

Nun wird die Konstanz des Impulses ausgedrückt durch:

(11) $$\begin{aligned} \frac{dJ_x}{dt} &= rJ_y - qJ_z \\ \frac{dJ_y}{dt} &= pJ_z - rJ_x \\ \frac{dJ_z}{dt} &= qJ_x - pJ_y, \end{aligned}$$

und diese Gleichungen gehen jetzt, mit Hilfe von (9) und (10) einfach über in:

(12) $$\begin{aligned} &\frac{dp}{dt} + \omega\varepsilon(1-\nu)q = 0 \\ &\frac{dq}{dt} - \omega\varepsilon(1-\nu)p = 0, \quad \varepsilon = \frac{C-A}{C} \\ &\frac{dr}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen entnimmt man sofort das Resultat, daß die Periode der freien Nutation gegeben ist durch:

(13) $$\tau = \frac{2\pi}{\omega\varepsilon(1-\nu)}.$$

Beachtet man aber, daß für die starre Erde diese Periode:

(14) $$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega\varepsilon}$$

beträgt, so hat man also schließlich die Endformel:

$$\tau = \frac{\tau_0}{1 - \dfrac{\int_0^a \varrho\, dq\, r^5}{\int_0^a \varrho\, de\, r^5}}. \tag{15}$$

Um die beiden hier auftretenden Integrale auszuwerten, hat man sich noch die Formeln der Gleichgewichtstheorie der flüssigen Erde zu vergegenwärtigen. Man kann dieselben leicht dadurch erhalten, daß man in den Gleichungen von Nr. II einfach $c = 0$ setzt.

Bezeichnet man für diese Annahme den Wert von q wie schon vorhin mit e, so gilt zunächst die Gleichung:

$$\frac{d}{dr} r^6 \frac{de}{dr} = \frac{3\eta}{5} r^6 \left(r^2 \frac{d^2 e}{dr^2} + 10 r \frac{de}{dr} + 4e\right), \tag{16}$$

während die Grenzbedingung übergeht in:

$$e(0) = h + \frac{3}{5}\left(\frac{\overline{\varrho e}}{\varrho_0} + 2\eta \int_0^a e r\, dr\right). \tag{17}$$

Setzt man jetzt:

$$\zeta = r\sqrt{\frac{6\eta}{5}}, \qquad \zeta_1 = a\sqrt{\frac{6\eta}{5}}, \tag{18}$$

so erhält man analog wie früher die für $\zeta = 0$ endliche Lösung von (16) in der Form:

$$e = N \sum_0^\infty \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!} \alpha_\nu \zeta^{2\nu} = N\varphi(\zeta), \tag{18}$$

wo sich die α_ν aus der Rekursion bestimmen:

$$\alpha_\nu = (2\nu^2 + 5\nu - 5)\alpha_{\nu-1}, \qquad \alpha_0 = 1, \tag{19}$$

und N aus der Grenzbedingung (17) zu berechnen ist. Diese wird aber hier:

$$\frac{1}{60} N = h + N\left(\frac{3\bar{\varrho}}{5\varrho_0}\varphi(\zeta_1) + \int_0^{\zeta_1} \varphi(\zeta)\zeta\, d\zeta\right). \tag{20}$$

Schreibt man daher abkürzungsweise:

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{1}{60} - \frac{1}{2}\zeta^2 \sum_0^\infty \frac{\nu+2}{(2\nu+5)!}\alpha_\nu \zeta^{2\nu}, \tag{21}$$

so wird:

(22)
$$e = \frac{h\varphi(\zeta)}{\varphi_1(\zeta_1) - \frac{3\bar{\varrho}}{5\varrho_0}\varphi(\zeta_1)},$$

wo für $\varkappa_2 = \frac{\omega^2}{2}$ wieder $'h = \left(1 - \frac{3\eta a^2}{5}\right)\frac{a\omega^2}{2g}$ ist.

Betreffs des Integrals $\int\limits_0^a \varrho\, d e r^5$ bemerke man nun, daß nach I (12) für $r = a$:

$$\bar{\varkappa}_2 = \frac{4\pi f}{5a^5}\int\limits_0^a \varrho\, d e r^5$$

wird, und daß andrerseits die Gleichung I (2b) für $r = a$, $c = 0$ übergeht in:

$$\bar{\varkappa}_2 + \tfrac{1}{2}\omega^2 = \frac{g}{a}\bar{e}.$$

Aus diesen beiden Beziehungen ergibt sich:

(23)
$$\int\limits_0^a \varrho\, d e r^5 = \frac{5ga^4}{4\pi f}\left(\bar{e} - \frac{a\omega^2}{2g}\right).$$

Da weiter: $\varepsilon = \frac{C - A}{C} = \frac{\int\limits_0^a \varrho\, d e r^5}{\int\limits_0^a \varrho\, d r^5}$ ist, so hat man auch:

(24)
$$\varepsilon = \frac{5}{3}\,\frac{1 - \frac{3}{5}\eta a^2}{1 - \frac{5}{7}\eta a^2}\left(\bar{e} - \frac{a\omega^2}{2g}\right).$$

Um die analoge Formel für das Integral $\int\limits_0^a \varrho\, d q r^5$ zu gewinnen, hat man wieder zu bemerken, daß für $r = a$ die beiden Gleichungen I (12) und (21), wo jetzt aber nicht mehr $c = 0$ ist, für $r = a$ übergehen in:

$$\bar{\varkappa}_2 = \frac{4\pi f}{5a^5}\int\limits_0^a \varrho\, d q r^5$$

und

$$\bar{\varkappa}_2 + \tfrac{1}{2}\omega^2 = \frac{g}{a}\bar{q} + \frac{\overline{Dq}}{12\varrho_0\eta},$$

woraus folgt:

(25)
$$\int\limits_0^a \varrho\, d q r^5 = \frac{5ga^4}{4\pi f}\left(\bar{q} - \frac{a\omega^2}{2g} + \frac{a\overline{Dq}}{12g\varrho_0\eta}\right).$$

Es läßt sich nun leicht übersehen, daß bei Einführung der drei neuen Funktionen:

$$
(26)\qquad
\begin{aligned}
\varphi_4(\xi) &= \sum_0^{\infty} \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\,\alpha_{\nu+2}\,\xi^{2\nu},\\
\psi_4(\xi) &= \sum_0^{\infty} \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\,\beta_{\nu+2}\,\xi^{2\nu},\\
\chi_4(\xi) &= \sum_0^{\infty} \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\,\gamma_{\nu+2}\,\xi^{2\nu},
\end{aligned}
$$

und Bildung der Determinante:

$$
(27)\qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi_1), & \psi_1(\xi_1), & \chi_1(\xi_1) \\ \varphi_2(\xi_1), & \psi_2(\xi_1), & \chi_2(\xi_1) \\ \varphi_4(\xi_1), & \psi_4(\xi_1), & \chi_4(\xi_1) \end{vmatrix}
$$

sich die Gleichung ergibt:

$$
(28)\qquad \frac{a\overline{D q}}{12 g \varrho_0 \eta} = \frac{\Delta_4}{\left(1-\frac{3\eta a^2}{5}\right)\Delta_1}\,\bar{q}.
$$

Durch Division von (23) und (25) folgt also:

$$
(29)\qquad \nu = \frac{\int_0^a \varrho\, d q r^5}{\int_0^a \varrho\, d e r^5} = \frac{\bar{q}\left[1+\frac{\Delta_4}{(1-\frac{3}{5}\eta a^2)\Delta_1}\right]-\frac{a\omega^2}{2g}}{\bar{e}-\frac{a\omega^2}{2g}}.
$$

Für die *Periode der freien Nutation der elastischen Erde* ergibt sich daraus endlich:

$$
(30)\qquad \tau = \tau_0 \frac{\bar{e}-\frac{a\omega^2}{2g}}{\bar{e}-\bar{q}\left[1+\frac{\Delta_4}{\left(1-\frac{3\eta a^2}{5}\right)\Delta_1}\right]}.
$$

Die Ausführung der numerischen Rechnung liefert jetzt unter Zugrundelegung der in III angegebenen Daten. folgende Werte:

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= 0{\cdot}9575,\\
\varphi(\xi_1) &= 0{\cdot}02002,\\
\varphi_1(\xi_1) &= 0{\cdot}008369,\\
h &= 0{\cdot}0009303.
\end{aligned}
$$

Dies gibt nach (22) und (24) die mit der Beobachtung sehr nahe übereinstimmenden Werte:

$$
\bar{e} = \frac{1}{297{\cdot}1}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{305{\cdot}3}.
$$

Zur Bestimmung von Δ_4 hat man zunächst

$$\varphi_4(\xi_1) = 0{\cdot}0005272,$$
$$\psi_4(\xi_1) = -0{\cdot}008956,$$
$$\chi_4(\xi_1) = 0{\cdot}01395$$

und damit:

$$\Delta_4 = 0{\cdot}00007587.$$

Hiermit ergibt sich schließlich das Endresultat:

(31)
$$\tau_0 = 305{\cdot}3 \text{ Tage},$$
$$\tau = 481{\cdot}0 \text{ Tage}.$$

Zum Vergleich mögen wieder die auf die homogene Erde bezüglichen Angaben hier Platz finden. Für dieselben hat man

(32)
$$\bar{e} = \varepsilon = \frac{5a\omega^2}{4g}, \quad \bar{q} = \frac{5a\omega^2}{4g}\frac{1}{1+\frac{19c}{2g\varrho a}},$$
$$\tau = \tau_0\frac{\bar{e}}{\bar{e}-\bar{q}} = \tau_0\left(1+\frac{2g\varrho a}{19c}\right).$$

Oder ausgerechnet:

(33)
$$\bar{e} = \varepsilon = \frac{1}{232{\cdot}9}, \quad \bar{q} = \frac{1}{725{\cdot}4},$$
$$\tau_0 = 232{\cdot}9 \text{ Tage}, \quad \tau = 343{\cdot}0 \text{ Tage}.$$

Man bemerke, daß der Vergrößerungsfaktor für die Eulersche Periode im Falle der homogenen Erde 1·473, im Falle der inhomogenen Erde aber 1·575 beträgt. Würde man also in der inkonsequenten Weise von Hough die Eulersche Periode der nachgiebigen Erde vermittels des für die homogene Erde gültigen Vergrößerungsfaktors aus der für die inhomogene starre Erde gültigen berechnen, so erhielte man:

$$\tau = 449{\cdot}7 \text{ Tage},$$

was also um einen vollen Monat vom richtigen Wert verschieden ist.

V. Die Wiechertsche Hypothese über die Dichteverteilung im Erdinnern.

Es soll ferner noch jene Annahme über die Konstitution des Erdkörpers der Rechnung zugrunde gelegt werden, welche zuerst von E. Wiechert[1]) aufgestellt und ausführlich diskutiert worden ist. Nach derselben besteht der Erdkörper aus einem Metallkern der Dichte $\varrho_1 = 8{\cdot}206$ und einem darüber gelagerten Gesteinsmantel der ebenfalls konstanten Dichte $\varrho = 3{\cdot}2$. Der Radius $(= a_1)$ des Kernes beträgt

1) Göttinger Nachrichten 1897.

dabei etwa das 0·78fache des ganzen Erdradius ($= a$). Legt man nun außerdem noch Kern und Mantel die verschiedenen Elastizitätskonstanten c_1 bezw. c bei, so lassen sich die in I abgeleiteten allgemeinen Formeln auch leicht auf den Fall einer derartig zusammengesetzten Kugel anwenden.

Zunächst erhält man bei Einführung von

$$\eta = \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho}, \tag{1}$$

für die Größen $\varkappa_n(r)$ und $\Gamma(r)$ die Werte:

$$\text{Kern} \begin{cases} \varkappa_n = \dfrac{4\pi f \varrho}{2n+1}[q_n(a) + \eta q_n(a_1)], \\ \Gamma(r) = 2\pi f \varrho [a^2 + \eta a_1^2 - \tfrac{1}{3}(1+\eta) r^2], \end{cases} \tag{2}$$

$$\text{Mantel} \begin{cases} \varkappa_n = \dfrac{4\pi f \varrho}{2n+1}\left[q_n(a) + \eta \left(\dfrac{a_1}{r}\right)^{2n+1} q_n(a_1)\right], \\ \Gamma(r) = \dfrac{4\pi f \varrho}{3}\left[\tfrac{3}{2}a^2 + \eta \dfrac{a_1^3}{r} - \tfrac{1}{2} r^2\right]. \end{cases} \tag{3}$$

Die Gleichung I (21) für $q_n(r)$ geht hier einfach über in:

$$D q_n = 0. \tag{4}$$

Da nun $q_n(r)$ für $r = 0$ notwendig endlich bleiben muß, so kann man für Kern und Mantel sofort die beiden Lösungen ansetzen:

$$\begin{aligned} &\text{Kern:} && q_n = M r^2 + N, \\ &\text{Mantel:} && q_n = \frac{A}{r^{2n-1}} + \frac{B}{r^{2n+1}} + C r^2 + D. \end{aligned} \tag{5}$$

Denselben entsprechen nach I (22) die folgenden Ausdrücke von $p_n(r)$:

$$\begin{aligned} &\text{Kern:} && p_n = -2c_1 \frac{2n+3}{n} M - \varrho_1(k_n + \varkappa_n), \\ &\text{Mantel:} && p_n = -2c\left[\frac{2n-1}{n+1}\frac{A}{r^{2n+1}} + \frac{2n+3}{n} C\right] - \varrho(k_n + \varkappa_n). \end{aligned} \tag{6}$$

Die in $q_n(r)$ noch willkürlichen Konstanten $A \ldots N$ bestimmen sich nun zum Teil aus den an der Oberfläche ebenso wie früher geltenden Grenzbedingungen, zum Teil aber aus den an der Berührungsfläche zwischen Mantel und Kern zu erfüllenden Stetigkeitsbedingungen. Offenbar wird man nämlich fordern müssen, daß: u, v, w, F, G, H[1]) an dieser Fläche stetig seien.

1) Bezüglich der veränderten Normalenrichtung ist das Gleiche wie in I. zu bemerken.

Beachtet man nun, daß die Gleichung dieser Trennungsfläche ist:

$$(7)\qquad r = a_1 + \frac{1}{a_1}\sum_n q_n(a_1) K_n(x, y, z),$$

so wird man den Gleichungen (24) und (26) I zufolge diese Stetigkeitsbedingungen augenscheinlich auch dahin formulieren können, daß die vier Größen:

$$(8)\qquad \left.\begin{array}{l} q_n(r), \qquad \dfrac{dq_n(r)}{dr} \\ c(r^2 q_n'' + 2nrq_n' + 2(n^2-1)q_n) \\ p_n - \dfrac{c}{(n+1)r^2}(r^2 q_n'' - 2nrq_n') + r\dfrac{\varrho}{\varrho'}\gamma q_n \end{array}\right\}\text{stetig für } r = a_1$$

sein sollen. Die Grenzbedingungen an der Oberfläche sind dagegen unverändert wie früher:

$$(9)\qquad \left.\begin{array}{l} r^2 q_n'' + 2nrq_n' + 2(n^2-1)q_n = 0 \\ p_n - \dfrac{c}{(n+1)r^2}(r^2 q_n'' - 2rq_n') + r\dfrac{\varrho}{\varrho'}\gamma q_n = 0 \end{array}\right\}\text{für } r = a.$$

Hierdurch hat man aber gerade sechs Beziehungen zur Bestimmung der sechs Konstanten $A \ldots . N$ erhalten. Die weitere Ausführung möge wieder speziell bloß für den Fall $n = 2$ erfolgen und hierbei der Kürze halber statt $q_2(a)$, $q_2(a_1)$ einfach q bezw. q_1 geschrieben werden Ferner sollen g, g_1 die Beschleunigungen der Schwere an der Mantel- bezw. Kernoberfläche, ϱ_m die mittlere Dichte des Erdkörpers bezeichnen:

$$(10)\qquad g = \frac{4\pi f\varrho a}{3}(1 + \eta\alpha^3), \quad g_1 = \frac{4\pi f\varrho a_1}{3}(1+\eta), \quad \varrho_m = \varrho(1 + \eta\alpha^3)$$

und hierbei die Abkürzungen eingeführt werden:

$$(11)\qquad \alpha = \frac{a_1}{a}, \quad \delta = \frac{c_1}{c}, \quad \sigma = \frac{c}{g\varrho a}, \quad \lambda = \frac{\varrho}{\varrho_m}.$$

Trägt man jetzt die Werte (2), (3), (5) und (6) in die Gleichungen (8) und (9) ein, so kann man denselben, indem man sie untereinander passend verbindet, sehr leicht die Form geben:

$$q\left[\frac{4\pi f\varrho}{5}\right] - q_1\left[\frac{g_1}{a_1} + \frac{19c(\delta-1)}{5a_1^2\varrho\eta} - \frac{4\pi f\varrho\eta}{5}\right] - \frac{c}{a_1^2\varrho\eta}\left(\frac{8A}{a_1^3} + \frac{7B}{a_1^5}\right) + k_2 = 0,$$

$$q\left[\frac{g}{a} + \frac{19c}{5a^2\varrho} - \frac{4\pi f\varrho}{5}\right] - q_1\left[\frac{4\pi f\varrho\eta\alpha^5}{5}\right] - \frac{c}{\varrho a^2}\left(\frac{8A}{a^3} + \frac{7B}{a^5}\right) - k_2 = 0,$$

$$(12)\qquad \frac{A}{a^3} + D = \tfrac{8}{5}q \qquad \frac{A}{a_1^3} + D_1 + Ma_1^2\delta = \frac{8-8\delta}{5}q_1,$$

$$\frac{B}{a^5} + 6a^2 = -\tfrac{3}{5}q_1, \quad \frac{B}{a_1^5} + Ca_1^2 - Ma_1^2\delta = \tfrac{3}{5}(\delta-1)q_1,$$

$$3\frac{A}{a_1^5} + 5\frac{B}{a_1^7} = 2(C - M).$$

Drückt man vermöge der letzten fünf Gleichungen A und B durch q, q_1 aus und führt die gewonnenen Werte in die beiden ersten Gleichungen ein, so erhält man zur Berechnung von q, q_1 die beiden Relationen:

$$(13)\qquad \begin{aligned} H_1 q - H_2 q_1 + \frac{a k_2}{g} &= 0, \\ H_3 q - H_4 q_1 - \frac{a k_2}{g} &= 0. \end{aligned}$$

$$(14)\qquad \begin{aligned} H_1 &= \tfrac{3}{5}\lambda + \frac{\sigma}{5\eta\alpha^2}\,\frac{35(8-3\alpha^2)-2(64-21\alpha^2+21\alpha^5-64\alpha^7)\frac{\delta-1}{\delta}}{4-7\alpha^3+3\alpha^7-2(1-\alpha^3)(1-\alpha^7)\frac{\delta-1}{\delta}}, \\ H_2 &= (1+\tfrac{2}{5}\eta)\lambda + \frac{\sigma}{5\eta\alpha^2}\left[19(\delta-1)+\frac{175-2(43+21\alpha^5-64\alpha^7)\frac{\delta-1}{\delta}}{4-7\alpha^3+3\alpha^7-2(1-\alpha^3)(1-\alpha^7)\frac{\delta-1}{\delta}}\right], \\ H_3 &= 1-\tfrac{3}{5}\lambda + \frac{\sigma}{5}\left[19+\alpha^3\,\frac{7(8-3\alpha^2)^2-2(64-21\alpha^4-43\alpha^7)\frac{\delta-1}{\delta}}{4-7\alpha^3+3\alpha^7-2(1-\alpha^3)(1-\alpha^7)\frac{\delta-1}{\delta}}\right], \\ H_4 &= H_1\cdot\eta\alpha^5. \end{aligned}$$

Legt man jetzt die oben angeführten Wiechertschen Zahlenangaben der Rechnung zugrunde und setzt ferner die Elastizitätskoeffizienten von Kern und Mantel als gleich voraus, so erhält man:

$$(15)\qquad \begin{aligned} q &= \frac{a k_2}{g}\cdot\frac{1{\cdot}089+47{\cdot}5\sigma}{0{\cdot}558+31{\cdot}4\sigma+116\sigma^2}, \\ q_1 &= \frac{a k_2}{g}\cdot\frac{1+62{\cdot}5\sigma}{0{\cdot}558+31{\cdot}4\sigma+116\sigma^2}. \end{aligned}$$

Sind dann weiter e und e_1 diejenigen Werte, in welche q bezw. q_1 für $\sigma = 0$ übergehen, so ist nach IV (15) das Vergrößerungsverhältnis der Eulerschen Periode:

$$(16)\qquad \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{1}{1-\dfrac{q+\eta\alpha^5 q_1}{e+\eta\alpha^5 e_1}}$$

oder gemäß den obigen Werten:

$$(17)\qquad \frac{\tau}{\tau_0} = 1 + \frac{1+49{\cdot}2\sigma}{(7{\cdot}19+208{\cdot}4\sigma)\sigma}.$$

Für die im Falle des Rocheschen Gesetzes angenommene Elastizitätskonstante des Stahls ($c = 7{\cdot}65.10^{11}$) erhält man:

$$(18)\qquad \frac{\tau}{\tau_0} = 1{\cdot}59,$$

was von dem in jenem Falle gefundenen Werte 1·57 nur wenig abweicht.

Um die beobachtete Chandlersche Periode zu erhalten, müßte $\frac{\tau}{\tau_0} = 1{\cdot}39$ werden, was für $c = 11{\cdot}68.10^{11}$ der Fall ist. Würde dagegen die Erde homogen angenommen, so erforderte dies nach IV (32) die Elastizitätskonstante $c = 9{\cdot}19.10^{11}$.

Göttingen, November 1904.

Über kinematische Erzeugung von Regelflächen 4. Ordnung.

Von E. Weinnoldt in Kiel.

Die Regelflächen 4. Ordnung sind von Chasles[1]), Cayley[1]), Schwarz[1]), Cremona[1]), Rohn[2]) und Holgate[3]) klassifiziert und behandelt worden. Von Burmester[4]) und Blake[5]) sind einfache Bewegungsmechanismen ebener Bewegungen besprochen worden, bei welchen eine Gerade eine Regelfläche 4. Ordnung erzeugte. Burmester hat die dem Ellipsographen entsprechende Bewegung benutzt, Blake hat außerdem die umgekehrte Bewegung, welche Kreiskonchoiden als Punktbahnkurven hat, behandelt, und dann den Fall, daß die Polkurven diejenigen des Antiparallelogramms sind. Die von ihm und auch hier angewandte Methode ist die, daß man eine Ebene σ sich in einer festen Ebene σ' bewegen läßt und die Fläche untersucht, welche von einer Geraden l_1 beschrieben wird, die mit σ fest verbunden ist. Die Eigenschaften der entstandenen Regelfläche werden aus denjenigen ihrer zu σ parallelen Schnittfiguren hergeleitet, die als Bahnkurven der Projektionen P die einzelnen Punkte P_1 der Erzeugenden l_1 auf σ betrachtet werden. Aus den Gleichungen von l_1 in dem mit σ fest verbundenen Koordinatensystem ξ, η, ζ

$$(1) \qquad \begin{aligned} \xi &= m\zeta + n \\ \eta &= m_1\zeta + n_1 \end{aligned}$$

---

1) Salmon Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes. II. Teil, 3. Aufl., S. XIV. 169.

2) Rohn, Die verschiedenen Arten der Regelflächen 4. Ordnung. Math. Annalen, 28. Bd., 1887.

3) Holgate, On certain ruled surfaces of the fourth Order. American Journal of Mathematics, 15. Bd. 1893 u. 22. Bd. 1900.

4) Burmester, Kinematische Flächenerzeugung vermittels zylindrischer Rollung. Diese Zeitschr. 23. Jahrg. 1888.

5) Blake, Upon the Ruled Surfaces generated by the plane movement etc. A. J. of M. 21. Bd. 1899 und 22. Bd. 1900.

und aus der Gleichung der Bahnkurve eines Punktes P_1 in dem mit σ' verbundenen Koordinatensystem x, y, z:

$$\varphi(x, y, \xi, \eta) = 0 \tag{2}$$

ergibt sich die Gleichung der Regelfläche durch Elimination von ξ, η, aus (1) und (2) und aus der Beziehung $\zeta = z$. Die Doppelpunkte der Bahnkurven der Projektionen aller Punkte P_1 von l_1 ergeben die Doppellinien der Fläche. Ob dieselben isoliert verlaufen oder auf der Fläche liegen, erkennt man aus der Natur der Doppelpunkte als Knotenpunkte oder isolierte Doppelpunkte. Aus dem Satze daß die Punkte der beweglichen Polkurven p im allgemeinen Bahnkurven mit Spitzen ergeben, schließt man auf die Zwickpunkte der Regelflächen, d. h. auf die Punkte der Doppelkurve, in welchen die beiden in den übrigen Punkten der Doppelkurve getrennt liegenden beiden Tangentialebenen zusammengefallen sind. Wie viele Zwickpunkte vorhanden sind, ob zwei oder mehrere von ihnen zusammenfallen, ergibt sich aus der Zahl und der Natur der Schnittpunkte, welche die Projektion l der Erzeugenden l_1 auf σ mit der Polkurve p hervorbringt.

Die von Burmester und Blake genommenen Mechanismen ergaben nur verhältnismäßig wenige Arten von Regelflächen 4. Ordnung. Ich habe mir vorgenommen, mit einer allgemeineren Bewegung den großen Formenreichtum dieser Flächen zur Anschauung zu bringen und dadurch, daß ich Polkurven von höherer als der 2. Ordnung benutzte, Flächen mit einer Doppelkurve und 4 Zwickpunkten zu erzeugen. Die Bewegungsmechanismen, bei denen die Bahnkurven von der 4. Ordnung sind, geben jedoch im allgemeinen zu Regelflächen höherer Ordnung Veranlassung. Von allen Mechanismen, die Dingeldey[1]) untersucht hat, geben außer den erwähnten, von Burmester und Blake verwendeten Bewegungen, die ja Spezialfälle des Kurbelgetriebes sind, nur noch zwei andere Bewegungen, die auch Spezialfälle des allgemeinen Kurbelgetriebes sind, Regelflächen 4. Ordnung. Dies sind:

1. Das gleichschenklige Doppelkurbelgetriebe bezw. seine Umkehrung das gleichschenklige Schwingkurbelgetriebe und

2. Die allgemeine Konchoidenbewegung, hervorgebracht durch das Schleifschiebergetriebe oder die doppeltgeschränkte Winkelschleifenkette. Da diese beiden ebenen Bewegungen inbezug auf ihre Bahnkurven und deren Doppelpunkte ziemlich vollständig bekannt sind, so genügt es, die Ergebnisse der Untersuchungen früherer Autoren zusammenzustellen und ihnen einige wenige Ergänzungen hinzuzufügen,

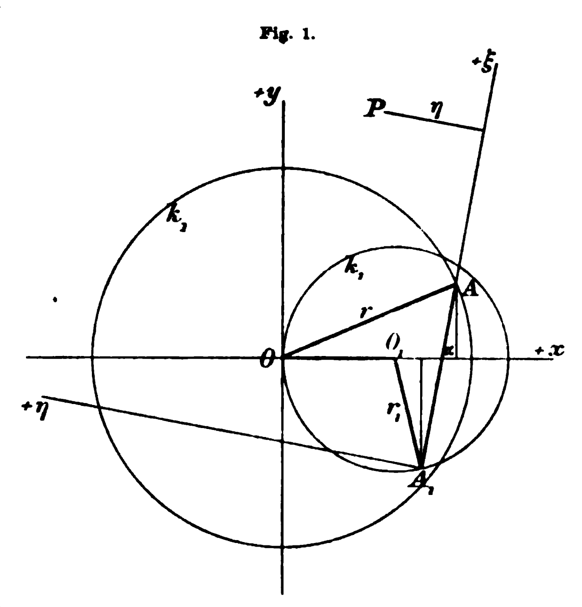
1) Dingeldey, Über die Erzeugung der Kurven 4. Ordnung durch Bewegungsmechanismen. Leipzig, 1885.

um Aufschluß über die Art der mit diesen Getrieben erzeugbaren Regelflächen zu erhalten.

Es zeigt sich, daß man mit ihnen von drei Hauptklassen der Regelflächen 4. Ordnung Beispiele erzeugen kann, und daß nur Regelflächen mit einer dreifachen Geraden nicht darstellbar sind. Die drei anderen Hauptklassen kommen aber in ihren verschiedenen Unterarten ziemlich vollständig zur Anschauung.

§ 1. *Das gleichschenklige Doppelkurbelgetriebe*[1]) (Fig. 1) ist der besondre Fall des Kurbelgetriebes, bei welchem die Stäbe OA und AA_1, bezw. OO_1 und O_1A_1 einander gleich sind und daher der vom Punkte A_1 um O_1 mit dem Radius r_1 beschriebene Kreis k_1 durch den Mittelpunkt O des vom Punkte A durchlaufenen Kreises k vom Radius r geht. OO_1 sehen wir als festen Stab an und verbinden mit ihm die Ebene σ und das Koordinatensystem xyz, und zwar den Anfangspunkt in O und die $+x$-Achse nach O_1 gerichtet. Das Koordinatensystem $\xi\eta\zeta$ bringen wir so an dem Stabe AA_1 an, daß A_1 der Nullpunkt ist und A_1A die Richtung der $+\xi$ Achse ist; die $+\eta$- und $+\zeta$-Achse werden so gelegt, daß sie, wenn die $+\xi$-Achse und die $+x$-Achse zusammenfallen, in die Richtung der $+y$ und $+z$-Achse zeigen. Für eine Phase der Bewegung, in der die $+\xi$-Achse mit der $+x$-Achse den Winkel α bildet und die Punkte A und A_1 die Koordinaten u, v bezw. u_1, v_1 im festen Koordinatensystem haben, gelten für einen Punkt P die Transformationsgleichungen:

Fig. 1.



$$x = \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha + u_1$$
$$y = \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha + v_1$$
$$x = (\xi - r) \cos\alpha - \eta \sin\alpha + u$$
$$y = (\xi - r) \sin\alpha + \eta \cos\alpha + v$$

1) Roberts, On the pedals of conic sections. Proceedings of the London Mathematical Society Bd. 3, 1871. S. 88.

und die Kreisgleichungen:

$$(u_1 - r_1)^2 + v_1^2 = r_1^2$$
$$u^2 \quad + v^2 = r^2,$$

aus denen durch Elimination von u_1, v_1, u, v und dann von α unter Abspaltung des Kreises $x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2$ die *Gleichung der Bahnkurve* eines Punktes P:

$$(3) \quad \begin{aligned} &\{r(x^2 + y^2) + r_1(\xi x + \eta y) - 2rr_1 x\}^2 \\ &- \{r_1(\xi^2 + \eta^2) + r(\xi x + \eta y) - 2rr_1\xi\}^2 - (r^2 - r_1^2)(\eta x - \xi y)^2 = 0 \end{aligned}$$

folgt. Eliminiert man hieraus und aus den Gleichungen (2) der Geraden l_1, die mit dem Koordinatensystem $\xi\eta\zeta$ fest verbunden bewegt wird, ξ und η und setzt $\zeta = z$, so erhält man die von der Geraden l_1 beschriebene *Regelfläche.* Man erkennt, daß sie in der Tat von *der 4. Ordnung ist.* Je nachdem r größer oder kleiner als r_1 ist, werden die erzeugten Bahnkurven und Regelflächen verschieden voneinander sein. Beide Fälle können aber mit demselben Mechanismus erzeugt werden, wenn man im zweiten Fall l_1 mit OO_1 in feste Verbindung bringt, AA_1 festhält, dagegen OO_1 bewegt, da die Gleichung (3) inbezug auf (ξ, η) und (x, y) ganz gleichartig gebaut ist, nur daß r und r_1 gegeneinander vertauscht sind.

§ 2. Die *Polkurven* der Bewegung sind *Paskalsche Schnecken.*[1]) Die bewegliche Polkurve p hat in Polarkoordinaten R und φ die Gleichung:

$$(4) \qquad R = \frac{2rr_1}{r^2 - r_1^2}(r - r_1 \cos\varphi),$$

die feste Polkurve p' dagegen:

$$(5) \qquad R = \frac{2rr_1}{r^2 - r_1^2}(-r_1 + r\cos\varphi).$$

Dabei ist A_1 bezüglich O der Nullpunkt der Polarkoordinaten, und die $+\xi$ bezw. $+x$-Achse die Polarachse. Wenn $r > r_1$ hat p' einen Knotenpunkt, dagegen p einen isolierten Doppelpunkt; wenn $r < r_1$ ist, findet das Umgekehrte statt. Wenn AA_1 in die Richtung von OO_1 fällt, berühren sich die Polkurven mit den Scheitelpunkten H und H', bezüglich K und K' ihrer Symmetrieachsen. In Figur 2 sind für $r = 5$, $r_1 = 3$ die beiden Polkurven für die Phase gezeichnet, daß die $+\xi$-Achse in die Richtung der $-x$-Achse zeigt; dasselbe ist in Figur 3 für $r = 3$ und $r_1 = 5$ dargestellt. Wenn in Figur 2 p einmal an p'

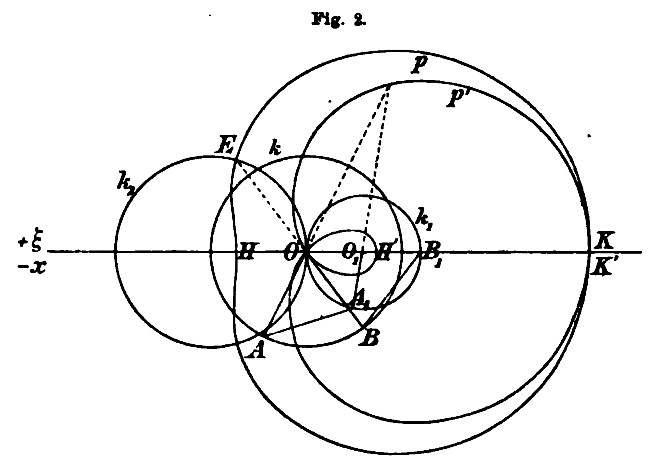
1) Cayley, On the mechanical description of a nodal bicircular quartic. L. M. Society Proc., 3. Bd. 1871, p. 101.

abgerollt ist, hat A den Kreis k einmal, dagegen A_1 den Kreis k_1 zweimal durchlaufen. In Figur 3 durchläuft A_1 nur einen Teil von k_1 zweimal. Er kehrt um, wenn A_1 bis zu einem Punkt E gelangt ist, so daß OA und AA_1 eine Gerade OGE bilden. In dieser Lage ist E der momentane Drehungspol, in ihm wird p' von p mit dem Knotenpunkte A_1 berührt. Ferner folgt noch aus

$$\cos EOO_1 = \frac{r}{r_1},$$

daß die Linie OE die Polkurve p in der gezeichneten Phase berührt.

Fig. 2.

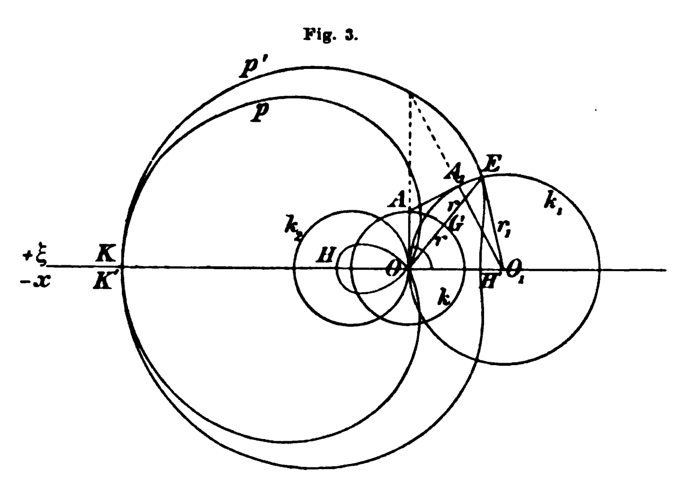


Wenn $r > r_1$ ist, können die Stäbe OO_1 und O_1A_1 eine Gerade bilden. Dies tritt ein, wenn A_1 in B_1 auf der Verlängerung von OO_1 liegt. Dann ist der Knotenpunkt O von p der momentane Drehungspunkt. Wegen der Beziehung

$$\cos BOB_1 = \frac{r_1}{r}$$

ist OB die Tangente von p' in O und der Schnittpunkt E von p mit der Verlängerung von BO über O hinaus der Punkt, mit dem p die Kurve p' in O berührt. Die Punkte E sind auch die Schnittpunkte von p mit dem Kreise k_2, der mit dem Radius r um den auf der $+\xi$-Achse gelegenen Punkt von k geschlagen ist.

Fig. 3.



§ 3. Die Bahnkurve (2) hat die Kreispunkte zu *Doppelpunkten* und außerdem den *Doppelpunkt* P' im Endlichen, dessen Koordinaten sich mit Hilfe der ersten Differentialquotienten von (2) aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} r(x^2+y^2)+r_1(\xi x+\eta y)-2rr_1x &= 0\\ r_1(\xi^2+\eta^2)+r(\xi x+\eta y)-2rr_1\xi &= 0\\ \eta x-\xi y &= 0 \end{aligned}$$

zu

$$(4)\qquad \begin{cases} x = -\dfrac{r_1\xi}{r}\,\dfrac{\xi^2+\eta^2-2r\xi}{\xi^2+\eta^2}\ {}^{1)}\\[2mm] y = -\dfrac{r_1\eta}{r}\,\dfrac{\xi^2+\eta^2-2r\xi}{\xi^2+\eta^2} \end{cases}$$

ergeben. Die Koordinaten xy des Systempunktes P ergeben sich andrerseits aus denjenigen seines Doppelpunktes P' durch die Beziehungen:

$$(4\text{a})\qquad \begin{cases} \xi = -\dfrac{rx}{r_1}\,\dfrac{x^2+y^2-2r_1x}{x^2+y^2}\\[2mm] \eta = -\dfrac{ry}{r_1}\,\dfrac{x^2+y^2-2r_1x}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Aus den zweiten Differentialquotienten der Gleichung (2) erkennt man, daß solche Punkte P, welche innerhalb der beweglichen Polkurve p liegen, Kurven mit Knotenpunkten erzeugen, daß dagegen Punkte, welche außerhalb p oder für $r_1 > r$ auch innerhalb der kleinen Schleife von p sich befinden, Kurven mit isoliertem Doppelpunkt beschreiben. Die Punkte der Polkurve p selbst dagegen geben Kurven mit Rückkehrpunkt.

Die Punkte P der bewegten Ebene σ stehen nach den Gleichungen (4) und (4a) mit den Doppelpunkten P' ihrer Bahnen in σ' in einer *ein-eindeutigen Verwandtschaft*[2]), mit der Ausnahme, daß dem Punkte $A_1(\xi=0,\ \eta=0)$ der Koppel AA_1 alle Punkte des Bahnkreises k_1 als Doppelpunkte entsprechen, während dem Punkte $O(x=0,\ y=0)$ des Steges OO_1 alle Punkte des Kreises k_2

$$\xi^2+\eta^2-2r\xi = 0$$

als erzeugende Punkte zugeordnet sind. k_2 ist die Bahn, welche O bei der umgekehrten Bewegung beschreibt.

Aus der Beziehung

$$(5)\qquad \frac{y}{x}=\frac{\eta}{\xi}$$

folgt, daß Geraden durch A_1 Gerade durch O entsprechen. In den Durchschlagslagen (Figur 2 und 3) liegen daher erzeugender Punkt P und Doppelpunkt P' auf derselben Geraden durch O, im besonderen

1) A. a. O. S. 102.

2) R. Müller, Über die Doppelpunkte der Koppelkurve. Diese Zeitschrift, 36. Jahrg. 1891 S. 65.

jeder Punkt von p' mit dem Punkt von p, mit dem er im Lauf der Bewegung von p berührt wird.

Da ferner für alle Punkte der Geraden $\eta = m\xi$:

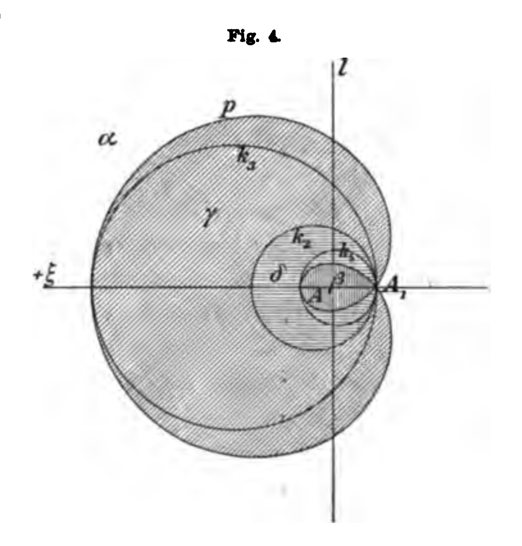
$$(5\text{a})\qquad \begin{aligned} x &= -\frac{r_1}{r}\xi + \frac{2r_1}{1+m^2} \\ y &= -\frac{r_1}{r}\eta + \frac{2r_1 m}{1+m^2}, \\ \sqrt{x^2+y^2} &= \frac{r_1}{r}\sqrt{\xi^2+\eta^2} - \frac{2r_1}{\sqrt{1+m^2}} \end{aligned}$$

ist, so muß, wenn P eine Geraden durch A_1 durchläuft, P' eine *ähnliche Punktreihe* auf einer Geraden durch O beschreiben. Wenn daher die Projektion l auf σ der Geraden l_1, welche unsere Regelfläche erzeugt, durch A_1 hindurch geht, so müssen die Doppelpunkte der Bahnkurven der einzelnen Punkte von l_1 eine Doppelgerade bilden.

Bei der durch die Gleichungen (4) und (4a) vermittelten eindeutigen Beziehungen zwischen σ und σ' ist das Gebiet α außerhalb p und außerhalb k_2 auf das Gebiet α' außerhalb p' und außerhalb k_1 abgebildet, ebenso das Gebiet β außerhalb p und innerhalb k_2 auf β' außerhalb p' und innerhalb k_1, γ innerhalb p und außerhalb k_2 auf γ' innerhalb p' und außerhalb k_1, und endlich das Gebiet δ innerhalb p und innerhalb k_2 auf das Gebiet δ' innerhalb p' und innerhalb k_1.

Dabei wird unter dem Gebiet außerhalb p oder außerhalb p' bei einer Polkurve mit Schleife auch das Gebiet innerhalb der Schleife verstanden. (Figur 4 und 5.)

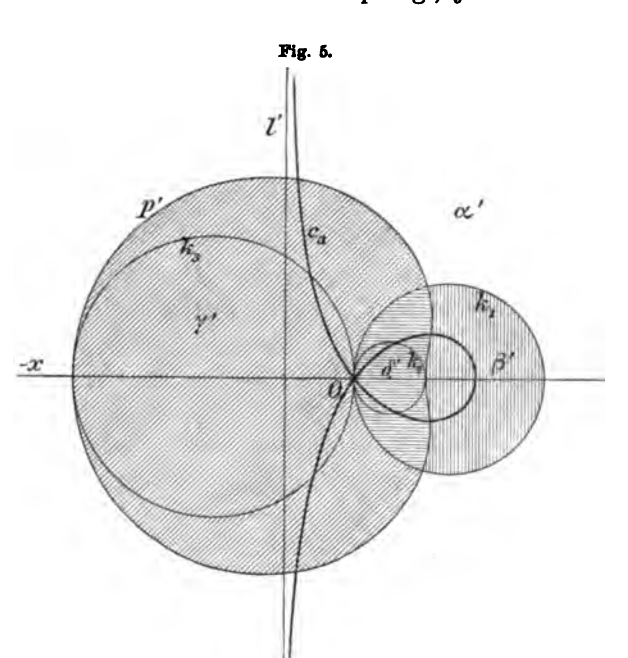
Fig. 4.



§ 4. Es soll jetzt noch der geometrische Ort der Doppelpunkte derjenigen Bahnkurven bestimmt werden, welche von einer *beliebigen* in σ liegenden *Geraden* l herrühren. Indem man aus der Gleichung der Geraden l und den Gleichungen (4) und (4a) ξ und η eliminiert, findet man eine Kurve 3. Ordnung c_3, die, wenn l durch A_1 geht, in den Kreis k_1 und eine Gerade durch O zerfällt. Auf Grund der Gleichungen (5) und (5a) kann die c_3 folgendermaßen konstruiert werden (Figur 4 und 5). Man zieht in σ' eine Gerade l' ebenso gegen die $+x$-Achse geneigt wie l in σ gegen die $+\xi$-Achse, aber in einem Abstande von O, der im

Verhältnis $\frac{r_1}{r}$ gegen den Abstand der Geraden l von A_1 verkleinert oder vergrößert ist. Durch O zieht man Leitstrahlen nach l' und verlängert oder verkürzt jeden Leitstrahl um das Stück desselben, welches innerhalb des Kreises k_1 liegt, je nachdem es auf den Leitstrahl selbst oder auf seine Verlängerung über O hinausfällt. Die neuen Endpunkte des Leitstrahls sind die Punkte der c_3. l' ist ihre einzige Asymptote, O ihr Doppelpunkt. Er ist ein Knotenpunkt, ein isolierter Doppelpunkt oder ein Rückkehrpunkt, je nachdem l den Kreis k_2 in reellen oder imaginären Punkten schneidet oder in einem Punkte berührt.

Fig. 5.



Mit Hilfe der in § 4 gegebenen Aufzählung der einander in σ und σ' zugeordneten Gebietsteile ist es leicht aus der Lage von l gegen p und k_2 den Verlauf von c_3 gegen p' zu übersehen. In Figur 4 und 5 ist eine Gerade l senkrecht zur ξ-Achse und die entsprechende c_3 zur Anschauung gebracht.

§ 5. Herr R. Müller[1]) hat gezeigt, daß diejenigen Punkte P', welche in einer bestimmten Phase der Bewegung mit ihrem Doppelpunkte zusammenfallen, eine gewisse Fokalkurve 3. Ordnung ausfüllen. In den beiden Totpunktlagen, in denen AA_1 in der Geraden OO_1 liegt, zerfällt die Kurve 3. Ordnung in eine Gerade und je einen Kreis, von denen für unsre Bewegung nur die Kreise in Betracht kommen.

Wenn man die Gebiete σ und σ' so übereinander zeichnet, wie es den beiden Totpunktlagen entspricht, so daß A_1 in O liegt und die $+\xi$-Achse in die Richtung der $+x$-Achse, oder in der andren Lage in die Richtung der $-x$-Achse zeigt, erhält man die Punkte P, welche mit ihren Doppelpunkten P' zusammenfallen, aus den Gleichungen (4),

1) A. a. O. S. 66.

indem man $x = +\xi$, $y = +\eta$ bezw. $x = -\xi$, $y = -\eta$ setzt. Es ergeben sich in der Tat die beiden Kreise k_3 und k_4 von den Gleichungen:

$$\left(\xi + \frac{rr_1}{r \pm r_1}\right)^2 + \eta^2 = \left(\frac{rr_1}{r \pm r_1}\right)^2.$$

Beide gehen durch A_1; der eine berührt p in dem einen Endpunkt der Symmetrieachse, der andre in dem andren Endpunkt.

In den Figuren 4 und 5 sind die beiden Kreise eingezeichnet. l trifft k_3 zweimal im Gebiete γ; daher wird l die c_3 in der einen Totpunktlage ebenfalls zweimal und zwar im Gebiet γ' schneiden, und zwar kann man von dem einen Schnittpunkt zum anderen durch stetiges Fortschreiten auf der c_3 nur gelangen, indem man isolierte Knotenpunkte trifft.

§ 6. Wir gehen nunmehr zur näheren Betrachtung der *Regelflächen 4. Ordnung* über, welche nach § 1 von einer Geraden l_1, die mit σ fest verbunden ist, erzeugt wird. Die Fälle, daß l_1 senkrecht oder parallel zu σ ist, schließen wir aus. Dagegen setzen wir, ohne daß dadurch die Allgemeinheit beschränkt wird, voraus, daß der kürzeste Abstand der Geraden l_1 und der ζ-Achse in der Ebene σ liegt. Die Regelfläche gehört einem inbezug auf die Beschaffenheit ihrer Doppelkurve wesentlich verschiedenen Typus an, je nachdem l_1 durch den Punkt A_1 geht oder nicht.

Wenn nämlich die Gerade l_1 den Punkt A_1 enthält, beschreibt A_1 den Kreis k_1 ganz oder zum Teil doppelt, ferner liegen nach § 3 S. 305 die Doppelpunkte der Bahnkurven der einzelnen Punkte von l_1 auf einer Geraden d_1. Unsere Fläche hat also einen *Doppelkreis* k_1 und eine *Doppelgerade* d_1. Beide schneiden sich in einem Punkte S, den man erhält als Schnittpunkt des Kreises k_1 und einer Geraden, die durch O in σ' ebenso gegen die $+x$-Achse liegt, wie die Projektion l von l_1 in σ gegen die $+\xi$-Achse. Wenn l mit der $+\eta$-Achse zusammenfällt, liegt S in O; wenn l im Falle $r_1 > r$ p in A_1 berührt, ist S nach S. 303 der eine Schnittpunkt E von k_1 und p'. Nach der allgemeinen Theorie der Regelflächen 4. Ordnung mit Doppelgeraden und Doppelkegelschnitt können sowohl auf dem Doppelkreise als auch auf der Doppelgeraden zwei Zwickpunkte vorkommen. Sie sind auf dem Kreise imaginär, wenn $r_1 < r$ ist, da ja der Punkt d_1 den Kreis k_1 zweimal vollständig durchläuft, der Kreis k_1 daher ganz auf der Fläche liegt. Ist dagegen $r_1 > r$, so sind die Zwickpunkte auf k_1 reell; sie sind die Punkte E, in welchen der Punkt A_1 in seiner Bewegung umkehrt, also k_1 die feste Polkurve p' trifft. Derjenige Teil von k_1, welcher den Punkt O enthält, verläuft reell auf der Fläche, der andere liegt isoliert.

Die Zwickpunkte der Doppelgeraden d_1 werden von solchen Punkten von l_1 erzeugt, deren Projektionen auf σ Rückkehrpunkte hervorbringen, also auf p liegen. Da nun l die bewegliche Polkurve p außer in A_1 nur noch in zwei Punkten und immer in zwei Punkten schneidet, so hat die Doppelgerade d_1 stets zwei Zwickpunkte. Derjenige Teil von d_1, welcher von Punkten herrührt, deren Projektion innerhalb p, d. h. innerhalb der Gebiete γ und δ von σ liegen, ist eine wirkliche Durchschnittslinie der Fläche; der übrige Teil von d_1 dagegen liegt isoliert. Es fragt sich noch, auf welchem der beiden Teile von d_1 der Schnittpunkt S von Doppelgerade und Doppelkreis liegt. Wenn $r_1 < r$ ist, liegt S stets auf der Fläche, da ja sein erzeugender Punkt A_1 und die seiner Nachbarpunkte innerhalb p fallen.

Wenn dagegen $r_1 > r$ ist, befindet sich S nur dann auf der Fläche selbst, falls l die kleine Schleife von p nicht durchsetzt, da der erzeugende Punkt A_1 nur in diesem Falle den Übergang zwischen Punkten bildet, die zu den Gebieten γ und δ von σ gehören. Geht aber l durch die Schleife, so erzeugen die beiderseitigen Nachbarpunkte von A_1 isolierte Doppelpunkte, S bildet daher einen Punkt des außerhalb der Fläche liegenden Teils von d_1.

Der eine Sonderfall, welcher bei Regelflächen 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt und Doppelgeraden in bezug auf die Zwickpunkte vorkommen kann, ist der, daß je ein Zwickpunkt der Geraden und des Kegelschnittes in den Durchschnittspunkt S beider hineinrückt. Er wird bei unserem Mechanismus hervorgebracht, wenn $r_1 > r$ ist und l_1 so gelegt wird, daß ihre Projektion l die Polkurve p in A_1 berührt. Der dem Punkte A_1 entsprechende Doppelpunkt ist dann selbst ein Zwickpunkt; er fällt nach S. 303 und 307 in der Tat mit dem einen Zwickpunkt E von k_2 zusammen.

Der andere Sonderfall, daß die beiden Zwickpunkte der Geraden zusammenrücken und die Doppelgerade zugleich eine Erzeugende ist, kann hier nicht eintreten. Ich erwähne, daß nach Rohn[1]) eine solche Fläche in zwei Flächen 2. Grades zerfallen müßte[1]), ein Ergebnis, welches mit Salmon[2]) und Blake[3]) nicht übereinstimmt.

§ 7. In den Figuren 6a, b und 7a, b sind die beiden einzigen durch unser Getriebe herstellbaren Regelflächen des behandelten Typs, die eine Symmetrieebene haben, dargestellt. Sie entstehen, wenn die

1) A. a. O. S. 306.

2) Salmon Fiedler, Anal. Geom. d. Raumes 2. Teil, 3. Aufl. 1880. S. 440.

3) A. J. of M S. 266.

Gerade l mit der ξ-Achse zusammenfällt. Die Gleichungen von l_1 sind dann

$$\eta = 0$$
$$\xi = sz,$$

wenn s die Kotangente des Winkels ist, die l_1 mit der ξ-Achse bildet. Die Regelfläche hat die Gleichung:

$$\{r(x^2 + y^2) + r_1 sxz - 2rr_1 x\}^2 - \{r_1 s^2 z^2 + rsxz - 2rr_1 sz\}^2 - (r^2 - r_1^2)s^2 z^2 y^2 = 0.$$

Die Symmetrieebene xz schneidet die Fläche in:

$$(rx^2 + r_1 sxz - 2rr_1 x)^2 - s^2 z^2 (r_1 sz + rx - 2rr_1)^2 = 0$$

oder:

$$(x^2 - s^2 z^2)(rx + r_1 sz - 2rr_1)^2 = 0,$$

d. h. in den beiden Erzeugenden l_1 und l_2:

$$x = \pm sz$$

und in der Doppelgeraden d_1:

$$z = -\frac{r}{r_1 s}(x - 2r_1).$$

Wenn $r_1 < r$ ist, schneidet die Doppelgerade d_1 den Doppelkreis k_1 im Punkte S $(x = 2r_1, y = 0)$, der reell auf der Fläche liegt. Im Falle $r_1 > r$ ist S außerhalb der Fläche.

Der scheinbare Umriß der Fläche in der xz-Ebene ist der Schnitt dieser Ebene mit dem berührenden Zylinder der Fläche, dessen Achse parallel der y-Achse geht. Seine Gleichung ergibt sich durch Elimination aus der Flächengleichung und der Bedingung $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, d. i.:

$$4ry\{r(x^2 + y^2) + r_1 sxz - 2rr_1 x\} - 2y(r^2 - r_1^2)s^2 z^2 = 0.$$

Diese Bedingung zerfällt in $y = 0$, welche Gleichung mit der Flächengleichung auf die Geraden l_1, l_2 und d_1 führt, und in:

$$y^2 = -x^2 - \frac{r_1}{r} sxz + 2r_1 x + \frac{r^2 - r_1^2}{2r^2} s^2 z^2.$$

Hieraus folgt durch Elimination von y:

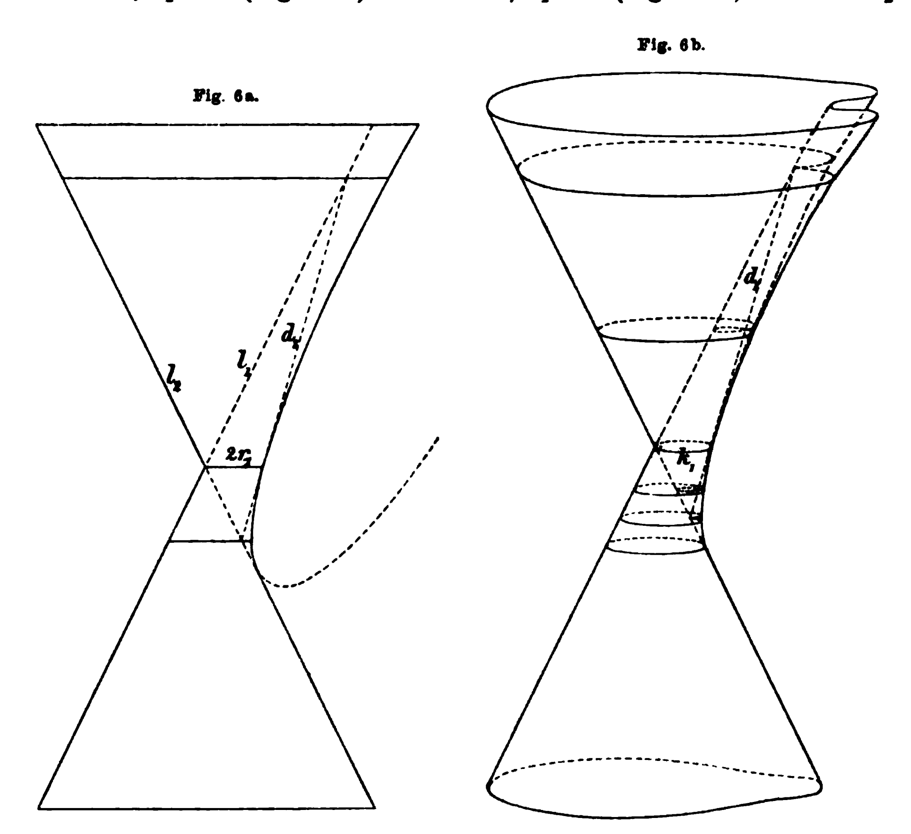
$$s^2 z^2 \left\{ \frac{(r^2 + r_1^2)^2}{4r^2} s^2 z^2 + r_1^2 x^2 + \frac{r^2 + r_1^2}{r} r_1 sxz - 2r_1(r^2 + r_1^2)x - 4rr_1^2 sz + 4r^2 r_1^2 \right\} = 0,$$

d. i. die Doppelebene $z=0$ und ein parabolischer Zylinder. Die xz-Ebene schneidet den Zylinder in einer Parabel von derselben Gleichung, welche die x-Achse in den Punkten:

$$x_1 = \frac{2r^2}{r_1} \text{ und } x_2 = 2r_1$$

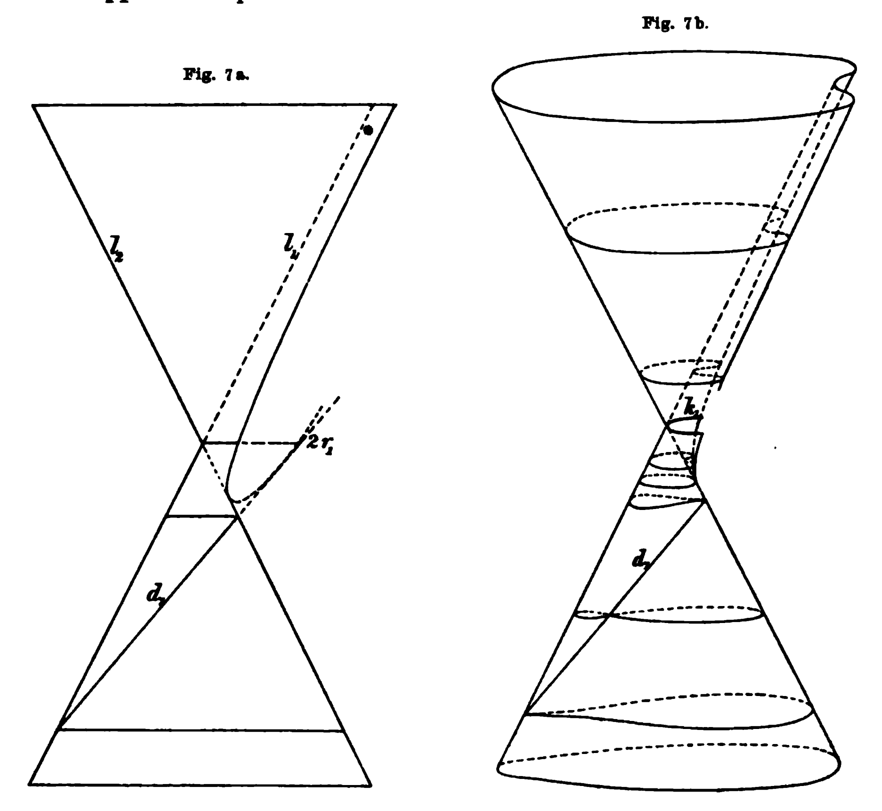
trifft. Für $r > r_1$ liegt der durch x_1 bestimmte Punkt, für $r < r_1$ der durch x_2 bestimmte außerhalb der Fläche. Die Geraden $x = \pm sz$ berühren die Parabel in den Punkten mit den Abszissen $x = \frac{4r_1 r^2}{(r \pm r_1)^2}$, das ist dort, wo die zur xy-Ebene parallelen Querschnitte der Fläche aufhören reelle Doppeltangenten parallel der y-Achse zu haben. Ferner wird die Umrißparabel von der Doppelgeraden $z = -\frac{r}{r_1 s}(x - 2r_1)$ im Punkte $z = 0$, $x = 2r_1$ berührt, der nur im Falle $r > r_1$ auf der Fläche selbst liegt.

Diesen Resultaten entsprechend ist der Aufriß der beiden Flächen für $r = 5$, $r_1 = 3$ (Figur 6a) und $r = 3$, $r_1 = 5$ (Figur 7a) und $s = \frac{1}{2}$



gezeichnet. Außerdem sind die Flächen in Parallelperspektive skizziert (Figur 6b und 7b). Dabei geht der scheinbare Umriß in eine Kurve 6. Ordnung und 4. Klasse über. [Zum Vergleich sind zwei symmetrische Regelflächen 4. Ordnung in Parallelperspektive gezeichnet, welche durch die Antiparallelogrammbewegung entstehen. Sie haben ebenfalls

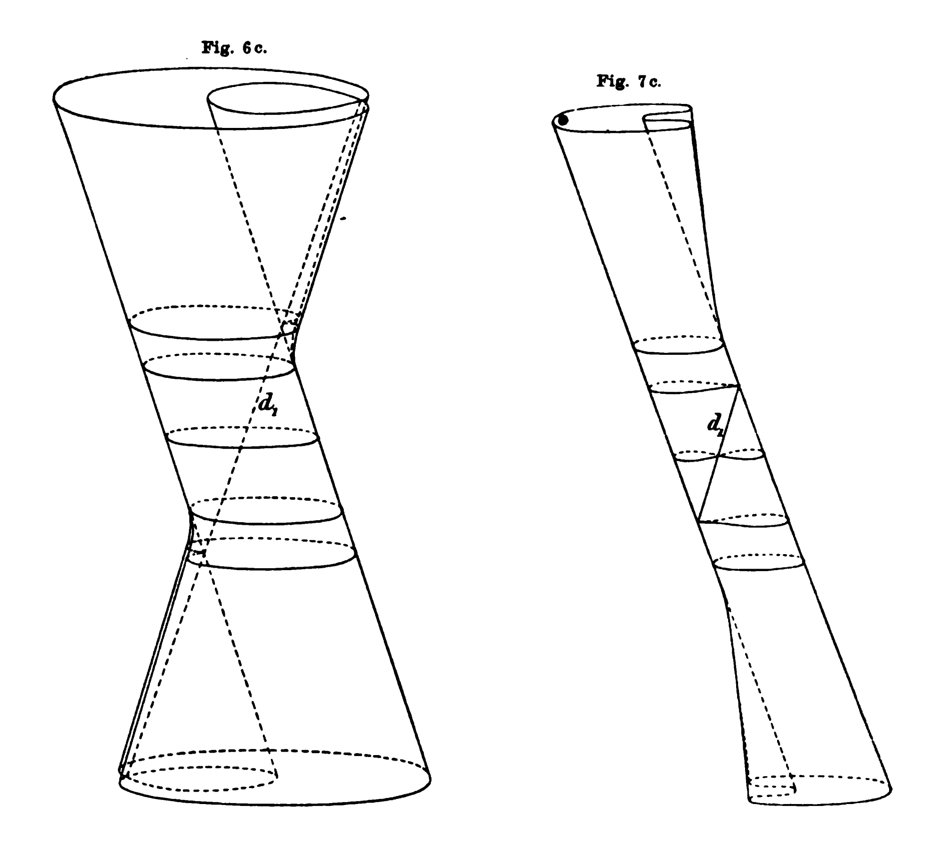
eine Doppelgerade, aber einen Doppelkreis im Unendlichen. Ihr scheinbarer Umriß in der $+z$-Ebene enthält zwei Erzeugende, die Doppelgerade und im gekrümmten Teile Stücke einer Hyperbel. Figur 7b entsteht durch kongruente Ellipsen als Polkurven, Figur 7c durch kongruente Hyperbeln. Die Analogie zwischen den Figuren 6b und 6c bezw. den Figuren 7b und 7c ist unverkennbar. In 6c und 7c liegt der Doppelkreis k_1 im Unendlichen.



In Figur 6d ist die Regelfläche 4. Ordnung mit Doppelkreis und Doppelgerade zur Anschauung gebracht, welche bei der umgekehrten Ellipsographenbewegung entsteht, wenn die erzeugende Gerade durch den Mittelpunkt des beweglichen Kreises geht. Sie ähnelt der Fläche 6b. Die Doppelgerade steht aber auf der Ebene des Doppelkreises senkrecht.]

§ 8. Von nun an lassen wir die Erzeugende l_1 nicht mehr durch A_1 hindurchgehen. Die von ihr beschriebene Regelfläche hat dann eine Raumkurve 3. Ordnung als Doppelkurve, deren Projektion auf σ' die in § 4 untersuchte c_3 ist. Aus den Eigenschaften der c_3 folgt, daß die

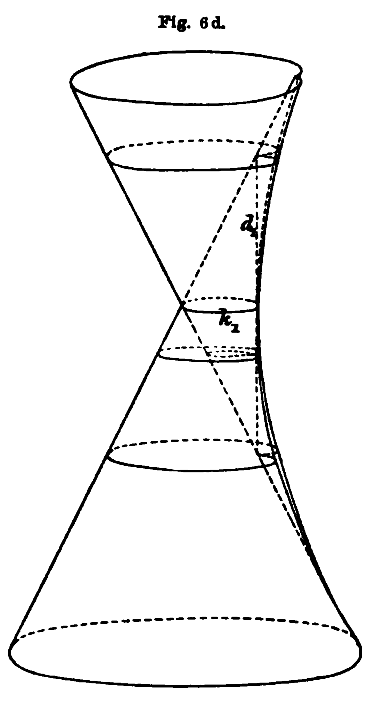
Doppelkurve nur eine Asymptote hat und daher eine kubische Ellipse ist. Ferner geht aus § 3 hervor, daß die Doppelkurve ganz von der Fläche isoliert verlaufen muß, wenn die Projektion l von l_1 die Polkurve p nicht schneidet. Ebenso folgt, daß sie zwei oder vier reelle Zwickpunkte hat, je nachdem l die Kurve p in zwei oder vier reellen Punkten schneidet, daß zwei von diesen Zwickpunkten in einen Punkt zusammenrücken, wenn l eine gewöhnliche Tangente von p ist, daß



dasselbe mit drei Zwickpunkten geschieht, wenn l Wendetangente ist, und daß zweimal zwei Zwickpunkte in je einen Punkt fallen, wenn l Doppeltangente von p ist. Man braucht daher l_1 nur so mit der Ebene σ zu verbinden, daß l eine der aufgezählten Lagen zu p hat, um mit unserem Mechanismus die verschiedenen von Rohn angegebenen Unterarten der Regelflächen 4. Ordnung mit Doppelkurve 3. Ordnung zu erhalten. Mit Ausnahme derjenigen Flächen, bei welchen die Doppelkurve ganz und gar auf der Fläche selbst liegt, bekommt man alle Flächen; man kann auch die Unterscheidung be-

rücksichtigen, die Rohn[1]) in bezug darauf macht, ob alle Erzeugenden der Regelfläche die Doppelkurve wirklich schneiden, oder ob einige sie nicht treffen. Wenn z. B. die Doppelkurve vier reelle Zwickpunkte hat, sind nach Rohn noch folgende beiden Flächenarten zu trennen:

1. solche Flächen, bei denen alle Erzeugenden reelle Doppelkanten der Raumkurve sind und gleichzeitig die beiden Schnittpunkte so liegen, daß sie durch Zwickpunkte getrennt sind;



2. solche Flächen, bei denen es neben reellen Doppelsekanten auch ideelle gibt und gleichzeitig die beiden Schnittpunkte jeder reellen Sekante der Raumkurve nicht durch Zwickpunkte getrennt sind, sondern sich auf einem und demselben auf der Fläche liegenden Stück der Doppelkurve befinden. Da bei beiden Flächenarten stets die eine angegebene Bedingung die andere nach sich zieht, so erhalten wir eine Fläche der ersten Art, wenn wir eine Erzeugende so legen, daß sie die Doppelkurve in Punkten schneidet, welche Zwickpunkte zwischen sich haben. Dies wird durch die Untersuchung § 5 ermöglicht. Wir brauchen l nur so zu ziehen, daß es p in vier Punkten schneidet, damit die Doppelkurve vier Schnittpunkte erhält, und außerdem den Kreis k_3 oder k_4 so trifft, daß die Schnittpunkte zwei Teile von l begrenzen, die zum Teil in dem Gebiete α oder β liegen. In einer der Totpunktlagen findet dann entsprechendes mit l und c_3 statt, und daher schneidet in dieser Phase der Bewegung l_1 die Doppelkurve in der gewünschten Weise. Nur wenn $r_1 > r$ ist, können wir diesen Bedingungen genügen, und zwar ist ihnen immer genügt, wenn l die kleine und die große Schleife von p in je zwei Punkten durchsetzt.

Eine Fläche der zweiten Art ergibt sich, wenn nur eine Erzeugende eine ideelle Sekante ist. Dazu wird l so angeordnet, daß es p viermal schneidet, ohne k_3 oder k_4 zu erreichen, denn in diesem Falle wird in einer der Totpunktlagen kein Punkt von l mit seinem Doppelpunkt zusammenfallen, und daher l_1 die Doppelkurve nicht

1) A. a. O. S. 300.

treffen. Eine solche Anordnung von l ist möglich für $r_1 < r$ und für $r_1 > r$.

Wenn man bei den Flächenerzeugungen mit vier Zwickpunkten l so verschiebt, daß es p berührt, erhält man Flächen mit zwei reellen und zwei zusammenfallenden Zwickpunkten, und zwar kommt man auf Flächen mit ausschließlich reellen Doppelsekanten, wenn man von dem ersten der oben besprochenen Fälle ausgeht, dagegen Flächen mit reellen und ideellen Doppelsekanten, wenn eine dem zweiten Falle entsprechende Lage von l als Ausgang gewählt wird.

Interessant ist es, zu beobachten, wie die in 3 erwähnten Flächen durch passende Lagenveränderung von l allmählich in Flächen des Abschnittes 7 übergeführt werden können. Da die Pascalsche Schnecke p eine reelle Doppeltangente hat, so lange $r < 2r_1$ ist, und zwei Wendepunkte, wenn r zwischen $2r_1$ und r_1 liegt, so können alle in 7 und 8 aufgezählten Flächenerzeugungen mit einem und demselben Mechanismus hervorgebracht werden, wenn man $r_1 > \frac{r}{2}$ und $< r$ wählt und die umgekehrte Bewegung mit benutzt.

Zur Verwirklichung des Falles, daß alle vier Zwickpunkte zusammenrücken, bedarf man aber der besonderen Anordnung $r_1 = \frac{r}{2}$. Dann fallen in p die Wendepunkte und die Berührungspunkte der Doppeltangente in einem Flachpunkt zusammen. Nimmt man die Tangente in diesem Flachpunkt als Projektion l der Erzeugenden l_1, so müssen vier Zwickpunkte in dem singulären Punkte der Bahnkurve zusammenfallen. Es entsteht auch hier wiederum die Fläche nicht, welche sich längs einer Doppelkurve wirklich durchsetzt, sondern man kommt auf eine solche, bei der die Doppelkurve bis auf den singulären Punkt, in welchem sie die Fläche berührt, isoliert verläuft.

§ 9. Eine Anzahl der mit dem gleichschenkligen Doppelkurbelgetriebe nicht erhaltbaren Regelflächen 4. Ordnung und eine Anzahl der mit ihm darstellbaren, aber in neuen Formen, liefert das *Schleifschiebergetriebe.*[1])

Ein rechter Winkel, dessen Schenkel als ξ- und η-Achse genommen werden, bewegt sich so, daß der eine Schenkel, die $+\xi$-Achse, beständig durch den Punkt A' der Ebene σ' hindurchgeht, während der Punkt A des anderen Schenkels, der $+\eta$-Achse, auf einer Geraden g' entlang gleitet. Mit der Ebene σ des rechten Winkels wird eine Gerade l_1 fest verbunden, es fragt sich, welche Art Regelfläche die Gerade l_1 beschreibt, wenn sie sich mit dem Schleifschiebergetriebe bewegt. Zunächst soll

1) Roberts, London Math. Society Proc. 7. 1876. S. 216.

die *Bahnkurve* eines Punktes P der Ebene σ bestimmt werden. Beim festen Koordinatensystem falle die y-Achse auf g' und gehe die $+x$-Achse durch A', ferner sei $OA = \nu$, und $O'A' = n$. In einem bestimmten Augenblick der Bewegung sei die $+\xi$-Achse gegen die $+x$-Achse um den Winkel α gedreht, dann ist gleichzeitig der Anfangspunkt O gegen O' um $-n \operatorname{tg} \alpha + \frac{\nu \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$ in Richtung der $+y$-Achse (Figur 8 und 9) und um $\nu \sin \alpha$ in Richtung der $+x$-Achse verschoben. Zwischen den Koordinaten $\xi\eta$ und xy bestehen daher die Gleichungen:

$$x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha + \nu \sin \alpha$$
$$y = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha - n \operatorname{tg} \alpha + \frac{\nu \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

oder:

$$x \sin \alpha = \xi \sin \alpha \cos \alpha - (\eta - \nu) \sin^2 \alpha$$
$$y \cos \alpha = \xi \sin \alpha \cos \alpha + \eta \cos^2 \alpha - n \sin \alpha + \nu \sin^2 \alpha,$$

aus denen durch Subtraktion:

$$(x - n) \sin \alpha - y \cos \alpha = -\eta$$

und in Verbindung mit der ersten Gleichung:

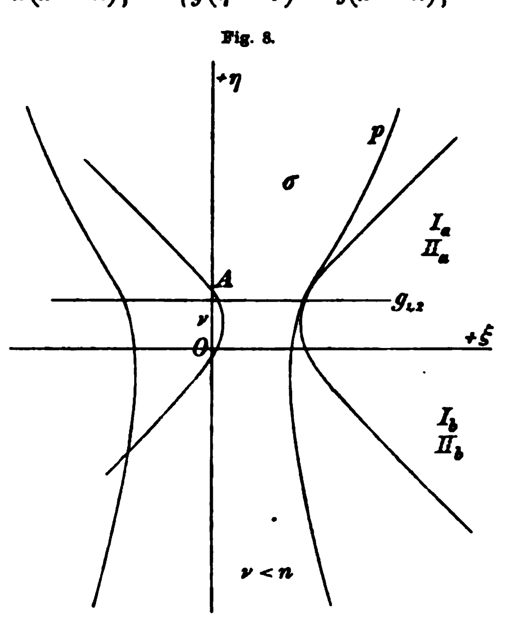
$$(\eta - \nu) \sin \alpha - \xi \cos \alpha = -x$$

durch Elimination von α für die Bahnkurve von P die Gleichung 4. Ordnung:

$$(6) \quad (\xi\eta - xy)^2 + \{\eta(\eta - \nu) - x(x - n)\}^2 = \{y(\eta - \nu) - \xi(x - n)\}^2$$

folgt. Schafft man hieraus mit Hilfe der Gleichungen (1) der Geraden l_1 ξ und η fort und setzt wiederum $\zeta = z$, so bleibt die Gleichung inbezug auf x, y, z von der 4. Ordnung; die Gerade l_1 beschreibt also auch bei diesem Mechanismus eine Regelfläche 4. Ordnung. Die Bahnkurven und Regelflächen werden verschieden ausfallen, je nach dem $n >$ oder $< \nu$ ist. Da aber die Gleichung (6), wenn man xy konstant, ξ, η veränderlich nimmt, so weit unverändert bleibt, nur daß n

Fig. 8.



und ν ihre Plätze tauschen, so kann, wenn der **Mechanismus** für $n > \nu$ vorhanden ist, der Fall $n < \nu$ durch Umkehrung ersetzt werden.

§ 10. Die *Polkurvengleichungen* ergeben sich daraus, daß der momentane Drehungspunkt C der Schnittpunkt der Bahnnormalen AC von A und der Enveloppennormalen $A'C$ der ξ-Achse ist. Für seine Koordinaten $\xi\eta$ ist daher:

$$\xi = \frac{n}{\cos\alpha} - \nu \operatorname{tg}\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{\nu - \eta}{\sqrt{\xi^2 + (\nu - \eta)^2}}; \quad \cos\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + (\nu - \eta)^2}}.$$

Hieraus folgt durch Elimination von α die Gleichung der beweglichen Polkurve p:

$$\{\xi^2 - \nu(\eta - \nu)\}^2 = n^2\{\xi^2 + (\eta - \nu)^2\};$$

die der festen Polkurve p' ist daher:

$$\{y^2 - n(x - n)\}^2 = \nu^2\{y^2 + (x - n)^2\}.$$

Die Polkurve p hat den Punkt A und den unendlich fernen Punkt in Richtung der η-Achse zu Doppelpunkten und wird im letzteren Punkt von der unendlich fernen Geraden vierpunktig berührt.[1]) Der Ausdruck:

$$\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\right]_{\xi=0,\ \eta=\nu} = 4n^2(\nu^2 - n^2)$$

zeigt, daß der Doppelpunkt A im Endlichen ein Knotenpunkt ist, wenn $\nu > n$ ist, dagegen ein isolierter Doppelpunkt, wenn $\nu < n$. Ist $\nu = n$, so zerfallen die Polkurven, ebenso die Bahnkurven und die Regelflächen. Da dieser Fall auch in bezug auf die Regelflächen von Blake[2]) behandelt worden ist, soll nur gelegentlich auf ihn hingewiesen werden.

Wir untersuchen die Reellitätsverhältnisse der p-Kurven zunächst für $\nu < n$. Es ist:

$$\eta - \nu = \frac{-\nu\xi^2 \pm n\xi\sqrt{\xi^2 + \nu^2 - n^2}}{n^2 - \nu^2},$$

also η nur reell, wenn $\xi \geq +\sqrt{n^2 - \nu^2}$ oder $\leq -\sqrt{n^2 - \nu^2}$ ist. Ferner ist:

$$\xi = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\{n^2 + 2\nu(\eta - \nu)\} \pm \tfrac{n}{2}\sqrt{n^2 + 4\eta(\eta - \nu)}} = \pm\sqrt{R}.$$

Für $\nu < n$ ist $n^2 + 4\eta(\eta - \nu)$ stets positiv und der absolute Wert von $n^2 + 2\nu(\eta - \nu)$ wegen der Ungleichheit:

$$n^4 + 4n^2\nu(\eta - \nu) + 4\nu^2(\eta - \nu)^2 < n^4 + 4n^2\nu(\eta - \nu) + 4n^2(\eta - \nu)^2$$

---

1) R. Müller, Über die Gestaltung der Doppelkurven für besondere Fälle des Kurbelgetriebes, diese Zeitschrift. 36. Bd. (1891) S. 18.

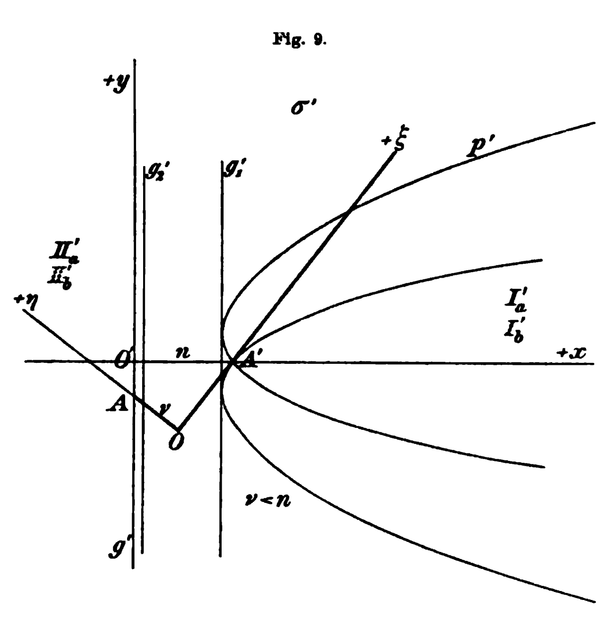
2) Blake, American Journal of Math. 21. Bd. 1899. S. 267.

kleiner als der absolute Wert von $n\sqrt{n^2 + 4\eta(\eta - \nu)}$. R ist also, wenn das obere Vorzeichen unter der Wurzel gilt, stets positiv, wenn das untere Vorzeichen genommen wird, stets negativ. Von den 4 Werten von ξ sind daher zwei imaginär. Die p-Kurve besteht aus zwei getrennten Zügen außerhalb der Parallelen

$$\xi = \pm\sqrt{n^2 - \nu^2},$$

die sich von $\eta = -\infty$ bis $\eta = +\infty$ erstrecken. Sie durchschneiden die Gerade $\eta = \nu$ an den Stellen $\xi = \pm n$ mit der Neigung $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{n}{\nu}$ und laufen zur η-Achse parallel für $\eta = 0$ und $\xi = \pm\sqrt{n^2 - \nu^2}$. (Fig. 8.)

Fig. 9.



Wenn $\nu > n$ ist, gibt es für alle Werte von ξ reelle Werte von η. Da $n^2 + 4\eta(\eta - \nu)$ negativ wird, wenn η zwischen $\frac{1}{2}(\nu + \sqrt{\nu^2 - n^2})$ und $\frac{1}{2}(\nu - \sqrt{\nu^2 - \eta^2})$ liegt, so ist ξ für solche Werte von η sicher imaginär. Ferner ist jetzt der absolute Wert von $n^2 + 2\nu(\eta - \nu)$ größer als der von $n\sqrt{n^2 + 4\eta(\eta + \nu)}$ und daher R negativ, wenn $n^2 + 2\nu(\eta - \nu)$ negativ ist, dagegen sicher positiv, wenn $n^2 + 2\nu(\eta - \nu)$ positiv, d. h. $\eta > \nu - \frac{n^2}{2\nu}$ ist. Die Bedingungen für die Reellität von ξ sind daher:

$$\eta > \nu - \frac{n^2}{2\nu} \text{ und } \eta \text{ außerhalb } \tfrac{1}{2}(\nu \pm \sqrt{\nu^2 - n^2}).$$

Beiden wird genügt durch:

$$\eta \geqq \tfrac{1}{2}(\nu + \sqrt{\nu^2 - n^2}).$$

Für $\eta = \frac{1}{2}(\nu + \sqrt{\nu^2 - n^2})$ ist $\xi = \pm\sqrt{\frac{n^2 - \nu^2}{2} + \frac{\nu}{2}\sqrt{\nu^2 - n^2}}$ und der Richtungskoeffizient der Tangente gleich Null. Die p-Kurve (Figur 10) besteht daher aus zwei Teilen, die sich im Knotenpunkt durchschneiden, sich wie zwei Parabeln mit zur $+\eta$-Achse parallelen Achsen ins Unendliche erstrecken und die Gerade $\eta = \frac{1}{2}(\nu + \sqrt{\nu^2 - n^2})$

zur Doppeltangente haben. Für die äußeren Kurvenzüge bis zu den Scheitelpunkten gilt in den Werten von ξ unter der Wurzel das obere Zeichen, für die inneren das untere Zeichen.

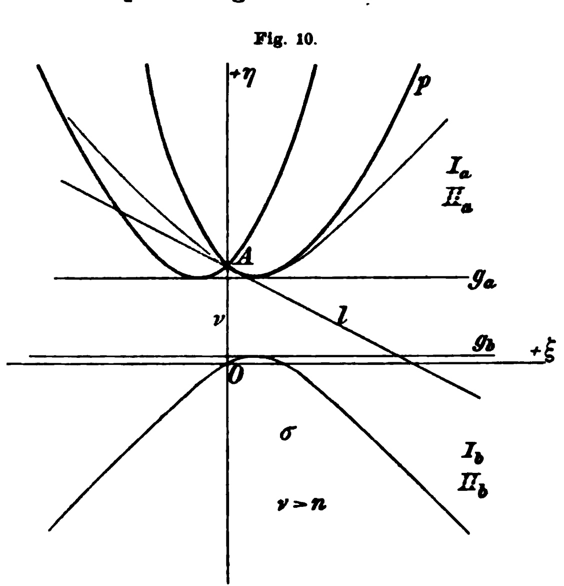


Fig. 10.

Für $\nu = n$ zerfällt p in die Gerade $\xi = 0$ und die Parabel $\xi^2 = 2n\left(\eta - \frac{n}{2}\right)$; entsprechendes findet mit p' statt[1]) und für $n = 0$ reduziert sich p auf die doppelt zählende Parabel $\xi^2 = \nu(\eta - \nu)$. Dasselbe erfolgt mit der p'-Kurve für $\nu = 0$.

§ 11. Inbezug auf die *Doppelpunkte* der Bahnkurven folgt aus den ersten Differentialquotienten der Gleichung (6), daß ein Doppelpunkt im Unendlichen liegt in Richtung der y-Achse, und daß die Koordinaten zweier andern Doppelpunkte P_1' und P_2' den Gleichungen[2]):

$$(7)\qquad \begin{aligned} yx &= \xi\eta \\ x(x-n) &= \eta(\eta-\nu) \\ y(\eta-\nu) &= \xi(x-n) \end{aligned}$$

oder:

$$x_{1,2} = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} + \eta(\eta-\nu)}$$

$$y_{1,2} = \frac{\xi\eta}{x_{1,2}}$$

genügen.

Die Gleichungen (8) bestimmen zwischen den Systempunkten P und den Doppelpunkten $P'_{1,2}$ eine *zwei-zweideutige* Verwandtschaft *dritten* Grades.

Ausnahmen bilden die Punkte P $\xi = 0$, $\eta = \nu$ und $\xi = \infty$, $\eta = 0$, denen alle Punkte der Geraden $x = 0$ bezw. $x = n$ entsprechen, und andererseits die Doppelpunkte P' $x = n$, $y = 0$ und $x = 0$, $y = \infty$, denen alle Punkte der Geraden $\eta = 0$ bezw. $\eta = \nu$ als Systempunkte zugeordnet sind.

1) Blake, A. J. of M. 21. Bd. S. 267.

2) Ebd. Roberts u. Müller.

Durchläuft P in der bewegten Ebene σ eine Gerade parallel zur ξ-Achse, so erzeugen P_1' und P_2' ähnliche Punktreihen auf zwei Parallelen zur y-Achse. Man kann daraus bereits schließen, daß, wenn die bewegte Gerade l_1 so liegt, daß ihre Projektion parallel zur ξ-Achse geht, die von ihr erzeugte Fläche zwei Doppelgeraden enthalten muß. Wenn P auf der Geraden $\eta = \nu$ liegt, entspricht ihm ein Punkt $P_1'\left(y = \frac{\nu \xi}{n}\right)$ auf $x = n$ und als P_2' der unendlich ferne Punkt auf $x = 0$, dagegen, wenn P auf $\eta = 0$ fällt, der Punkt O auf $x = n$ als P_1' und ein Punkt $\left(y = +\frac{n\xi}{\nu}\right)$ auf $x = 0$ als P_2'.

Die Doppelpunkte P_1' und P_2' sind imaginär für Punkte P, für welche:

$$\eta^2 - \nu\eta + \frac{n^2}{4} > 0$$

ist, welche also zwischen den Geraden g_a und g_b

$$\eta = \tfrac{1}{2}\left(\nu \pm \sqrt{\nu^2 - n^2}\right)$$

liegen. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn $\nu > n$ ist. Dann gibt es auch die beiden Parallelen zur ξ-Achse g_a und g_b, die Müller[1]) Übergangsgeraden genannt hat, die solche Systempunkte P enthalten, für welche die beiden Doppelpunkte zusammenrücken. Ebenso sind für $\nu < n$ die Systempunkte $P_{1,2}$ imaginär, welche den Punkten $P_{1,2}'$ zwischen den Parallelen g_1' und g_2': $x = \frac{1}{2}\left(n \pm \sqrt{n^2 - \nu^2}\right)$ entsprechen würden, d. h. für $\nu < n$ liegen zwischen g_1' und g_2' keine Doppelpunkte.

§ 12. Die Doppelpunkte der Bahnen aller Punkte einer Geraden l:

$$\xi \cos\vartheta + \eta \sin\vartheta - p = 0$$

bilden eine Kurve, deren Gleichung sich aus:

$$yx = \xi\left(-\xi \operatorname{ctg}\vartheta + \frac{p}{\sin\vartheta}\right)$$

und:

$$y\left(-\xi \operatorname{ctg}\vartheta + \frac{p}{\sin\vartheta} - \nu\right) = \xi(x - n)$$

durch Elimination von ξ zu:

$$(9)\quad x(x\sin\vartheta + y\cos\vartheta - n\sin\vartheta)^2 = (p - \nu\sin\vartheta)(px - pn + \nu y\cos\vartheta)$$

ergibt. Sie ist eine Kurve 3. Ordnung mit einem Doppelpunkt im Unendlichen in Richtung der Geraden $x\sin\vartheta + y\cos\vartheta = 0$ und den drei Asymptoten: $x = 0$ und:

$$x\sin\vartheta + y\cos\vartheta - n\sin\vartheta \pm (p - \nu\sin\vartheta) = 0.$$

1) R. Müller: Ebd.

dann die Geraden g_1 und g_2 $\left(\eta = \frac{\nu}{2}\right)$ gezogen. Hierdurch entstehen im oberen Blatt die Gebietsteile I_a und I_b, im unteren II_a und II_b und zwar I_a und II_a nach der $+\eta$-Achse hin, I_b und II_b um die $-\eta$-Achse. Die Gebiete des obereren und unteren Blattes hängen nicht im Endlichen zusammen, dagegen gehen I_a und I_b in g_1, II_a und II_b in g_2 in einander über.

In σ' entsprechen den Geraden g_1 und g_2 die Geraden g_1' und g_2' zwischen denen Doppelpunkte nicht liegen. Die von g_1' nach außen befindlichen Doppelpunkte werden von Punkten von I_a und I_b hervorgebracht, und zwar verweisen wir die I_a entsprechenden ins obere Blatt, und nennen ihr Gebiet I_a' dagegen die I_b entsprechenden ins untere Gebiet I_b' und lassen I_a' und I_b' in g_1' zusammenhängen. Analoges machen wir mit II_a und II_a', II_b und II_b'. Dann sind die Doppelebenen σ und σ' in den Teilen I_a und I_a', I_b und I_b' usw. durch die Gleichungen (8) eindeutig aufeinander abgebildet mit Ausnahme der singulären Punkte:

$$\begin{aligned} \xi &= \infty, & \eta &= 0 & &\text{in } I_b, \\ \xi &= 0, & \eta &= \nu & &\text{in } II_a, \\ x &= n, & y &= 0 & &\text{in } I_b', \\ x &= 0, & y &= \infty & &\text{in } II_a', \end{aligned}$$

denen alle Punkte der Geraden:

$$x = n \text{ in } I_b', \; x = 0 \text{ in } II_a', \; \eta = 0 \text{ in } I_b \text{ und } \eta = \nu \text{ in } II_a$$

zugeordnet sind.

Wenn $\nu > n$, findet entsprechendes statt (Figur 10 und 11), nur erfüllen die Systempunkte $P_{1,2}$ die Doppelebene σ allein außerhalb der Geraden g_a und g_b. Ihnen entsprechen dann in σ' die Geraden g_a' und g_b' $\left(x = \frac{n}{2}\right)$ im oberen und unteren Blatte. I_a und I_b sind nun getrennt, ebenso II_a und II_b, dagegen hängen I_a und I_b in g_a, I_b und II_b in g_b zusammen. In σ' stoßen I_a' und II_a' in g_a' aneinander und füllen das obere Blatt vollständig aus, ebenso im unteren Blatt I_a' und II_b' in g_b'.

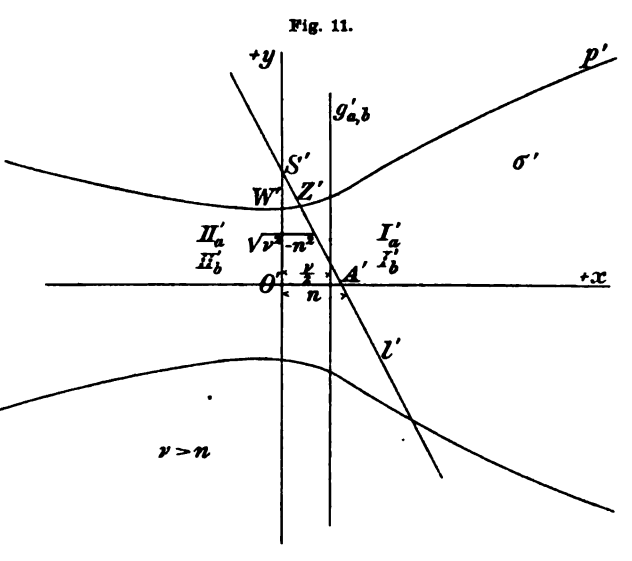
Die p-Kurve verläuft, wenn $\nu < n$ ist (Figur 8 und 9), ganz im oberen Blatt, die ihr zugeordnete p'-Kurve mit den äußeren Zügen im oberen Blatt in I_a', mit den inneren Zügen im unteren Blatt in I_b'. Die Gebiete II_a' und II_b' sind ganz, die Gebiete I_a' und I_b' sind außerhalb der p'-Kurve von Knotenpunkten erfüllt.

Ist $\nu > n$ (Figur 10 und 11), so liegen die äußeren Züge der p-Kurve im oberen Teil von σ im Gebiet I_a, die inneren Züge im

ein Knotenpunkt. Nimmt man dagegen das untere Vorzeichen, so ist $\xi^2 - R$ gleich Null, wenn P auf der p-Kurve liegt. Dann ist P_1' ein Rückkehrpunkt. Weil ferner für $\xi = 0$ und $\eta = \nu$ der Ausdruck $\xi^2 - R$ einen negativen Wert hat und er seine Vorzeichen nur auf der p-Kurve wechseln kann, so ist P_1' ein isolierter Doppelpunkt, wenn P mit dem Punkte $\xi = 0$, $\eta = \nu$ auf derselben Seite der p-Kurve liegt, dagegen ein Knotenpunkt, wenn P in das Gebiet fällt, welches durch die p-Kurve vom Punkte A getrennt ist.

Im Falle $\nu > n$ ist, wenn P auf den äußeren Zügen der p-Kurve angenommen wird, nach § 10 $\xi^2 - R = 0$ und daher P_1' ein Rückkehrpunkt, dagegen P_2' ein solcher, falls P auf den inneren Zügen liegt. Ferner ist, wenn $\eta < \frac{1}{2}(\nu + \sqrt{\nu^2 - n^2})$ wird, R negativ und daher J positiv und zwar für beide Vorzeichen. Dasselbe gilt für $\eta = 0$ und $\xi = \pm \infty$. Dagegen ist J negativ für $\xi = 0$ und $\eta > \frac{1}{2}(\nu + \sqrt{\nu^2 - n^2})$. Daher ist P_1' ein isolierter Doppelpunkt, wenn P innerhalb der äußeren Züge der p-Kurve und oberhalb der Übergangsgeraden g_a $\eta = \frac{1}{2}(\nu + \sqrt{\nu^2 - n^2})$ angenommen wird und P_2' ebenfalls ein solcher, wenn sich P innerhalb der inneren Züge von p oder zwischen ihnen und der Geraden g_a befindet. In allen anderen Fällen sind P_1' und P_2', wenn sie nicht imaginär werden, Knotenpunkte.

Fig. 11.



§ 14. Die gewonnenen Resultate lassen sich am besten übersehen, wenn man die zweizweideutige Verwandtschaft zwischen den Systempunkten P und den Doppelpunkten $P_{1,2}'$ auf zwei Doppelebenen σ und σ' zur Anschauung bringt (Figuren 8—11).

Die Punkte P, sofern sie die Doppelpunkte P_1' erzeugen, bleiben auf dem oberen Blatt, sofern sie aber die Doppelpunkte P_2' hervorbringen, werden sie auf dem unteren Blatt auf σ angeordnet. Wenn nun $\nu < n$ ist, bedecken die Systempunkte $P_{1,2}$ die Doppelebene σ vollständig (Figur 8 und 9). Im oberen und unteren Blatt werden

und wenn l im unteren Blatt verläuft, die Doppelgerade:

$$x = \frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} + p(p - \nu)}; \quad y = \frac{-pz}{\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} + p(p - \nu)}}.$$

Weil l durch den singulären Punkt $\xi = \infty$, $\eta = 0$ hindurchgeht, ist auf der Fläche noch die dritte Doppelgerade $x = n$, $z = \infty$ vorhanden, d. h. eine Doppelgerade in der unendlich fernen Ebene in Richtung der yz-Ebene. Diese Doppelgerade ist die Doppelerzeugende, in deren Lage l_1 zweimal kommt, wenn A das Ende der x-Achse erreicht. Die Doppelerzeugende schneidet nach der allgemeinen Theorie jede der beiden eigentlichen Doppelgeraden in einem Doppelzwickpunkt. Daher kann jede Doppelgerade außerdem nur noch zwei reelle Zwickpunkte enthalten. In der Tat schneidet l diese p-Kurve in jedem der beiden Blätter höchstens in zwei Punkten. Man übersieht leicht, daß, wenn $\nu < n$ ist, die eine Doppelgerade stets zwei reelle Zwickpunkte hat, die zweite nie solche besitzt, aber ganz aus Knotenpunkten besteht und daher in ihrer ganzen Ausdehnung eine Durchsetzungslinie der Fläche ist. Wenn dagegen $\nu > n$ ist, sind entweder auf beiden Geraden zwei reelle Zwickpunkte vorhanden, dann nämlich, wenn l durch die Gebiete I_a und II_a geht, oder beide Gerade sind frei von Zwickpunkten im Endlichen und verlaufen ganz auf der Fläche. Bei allen Flächen, die bei $\cos\vartheta = 0$ entstehen können, enthalten die reell auf der Fläche liegenden Teile der Doppelgeraden die unendlich fernen Punkte, so daß die im Unendlichen liegende Doppelerzeugende auch reell auf der Fläche ist und bei der Bewegung mit durchlaufen wird, zum Unterschied von den Flächen, die nach **Burmester** und **Blake** bei der Ellipsographenbewegung entstehen.

Flächen mit zwei imaginären Doppelgeraden werden von l_1 beschrieben, wenn l im Falle $\nu > n$ zwischen den Geraden g_a und g_b liegt. Die unendlich ferne Doppelgerade ist aber auch dann reell und auf der Fläche.

Wenn $p = \frac{1}{2}(\nu + \sqrt{\nu^2 - n^2})$ oder $\frac{1}{2}(\nu - \sqrt{\nu^2 - n^2})$ ist, bleibt die unendliche Doppelerzeugende bestehen und die beiden Doppelgeraden rücken in eine Selbstberührungsgerade zusammen, auf der im ersten Falle zwei reelle Zwickpunkte vorhanden sind, zwischen denen das endliche Stück isoliert ist, während im unendlichen Stück sich die Fläche wirklich selbst berührt. Im zweiten Falle schneidet l die p-Kurve nicht und die Fläche berührt sich in der ganzen Ausdehnung der Geraden.

Die einfachsten unter den bisher aufgezählten Flächen sind:

(1) $\nu = 0;\ p = 0.$

Die Gleichung der Fläche ist:

$$x^2y^2 + (x - n)^2(x^2 - s^2z^2) = 0.$$

Die zur xy-Ebene parallelen Schnitte sind gewöhnliche Konchoiden, die Bahnkurven der einzelnen Punkte von l_1. Die eine Doppelgerade, die Bahn des Punktes A, ist die y-Achse ohne Zwickpunkte im Endlichen, in der die Fläche sich vollständig durchsetzt. Die andere Doppelgerade geht durch A' parallel der z-Achse, ist zwischen den Zwickpunkten $z = \pm \frac{n}{s}$ isoliert, im übrigen reell auf der Fläche. Die Schnittebenen parallel der xz-Ebene geben wie bei allen Flächen dieses Abschnittes, da sie durch die unendlich ferne Doppelerzeugende gehen, außerdem noch Schnittkurven zweiten Grades, in diesem Falle Hyperbeln. Der Schnitt der Fläche mit der xz-Ebene besteht aus den Doppelgeraden $(x - a)^2 = 0$ und den beiden Erzeugenden $x = \pm sz$. Der scheinbare Umriß in derselben Ebene enthält außerdem nur noch die Projektion der unendlich fernen Doppelerzeugenden $x^2 = 0$.

(2) $$n = 0;\; p = v.$$

Die Gleichung der Fläche ist:

$$x^4 + (xy + vsz)^2 - s^2x^2z^2 = 0.$$

Die Schnitte parallel der xy-Ebene sind zwei voneinander isoliert verlaufende parabelförmige Kurvenzüge, die sich in der xy-Ebene zur Selbstberührungseraden, der y-Achse zusammenziehen; diese ist zwischen den beiden Zwickpunkten isoliert.

(3) $$n = 0;\; p = 0.$$

Die Gleichung lautet:

$$x^4 + x^2y^2 - (sxz - vy)^2 = 0.$$

Auch hier bestehen die Bahnkurven der einzelnen Punkte von l_1 aus zwei parabelförmigen Stücken, die sich aber nie zu einer Geraden verengen, und sich in je einem Punkte der z-Achse, der Selbstberührungsgeraden der Fläche, die ganz auf der Fläche liegt, berühren.

§ 17. Wenn die Erzeugende l_1 durch den Punkt A' hindurchgeht, also $p = v \sin \vartheta$ ist, im übrigen die Richtung von l_1 und l beliebig ist, liefert l, sofern sie durch den singulären Punkt A läuft, die Doppelgerade $x = 0$, $z = \frac{v \cos \vartheta}{s}$, außerdem aber Doppelpunkte, denen im Raum die Gleichungen:

$$x(x - n) = (v \sin^2 \vartheta + sz \cos \vartheta)(v \sin^2 \vartheta + sz \cos \vartheta - v)$$
$$x \sin \vartheta + y \cos \vartheta - n \sin \vartheta = 0$$

zukommen, also einen Doppelkegelschnitt. Er liegt in einer zur Ebene σ senkrechten Ebene, und ist nach der Gleichung seiner Projektion in der xz-Ebene:

$$\left(x-\frac{n}{2}\right)-\left(sz\cos\vartheta-v\sin^2\vartheta-\frac{v}{2}\right)^2=\frac{n^2-v^2}{4}$$

eine Hyperbel. Von der Doppelgeraden wird sie in dem Punkte S_1 $\left(x=0;\ z=\frac{v\cos\vartheta}{s};\ y=n\operatorname{tg}\vartheta\right)$ getroffen. Ist $n>v$, so läuft die reelle Achse der Hyperbel mit der xy-Ebene parallel, ist dagegen $n<v$, so ist diese Achse parallel der z-Achse.

Mit Hilfe der § 14 gegebenen Abbildung übersieht man die folgenden Resultate. Im Falle $v<n$ besteht die Doppelgerade aus lauter Knotenpunkten, da ja die Gerade $x=0$ in II_a, die dem Punkte $\xi=0$ $\eta=v$ entspricht, sich ganz im Gebiet solcher Punkte erstreckt. l schneidet die p-Kurve außer im singulären Punkt A des unteren Blattes stets noch in zwei Punkten des oberen Blattes. Also enthält die Doppelhyperbel zwei reelle Zwickpunkte. Der eine Ast der Hyperbel dehnt sich über und unter den Gebieten I_a und I_b von σ' aus und rührt daher von Systempunkten des oberen Blattes von σ her, enthält also die beiden Zwickpunkte und verläuft mit dem endlichen Teil isoliert. Der andere Ast der Hyperbel gehört ganz zu den Gebieten II_a und II_b, demnach wird er von Systempunkten P des unteren Blattes von σ erzeugt, besteht aus lauter Knotenpunkten, liegt ganz reell auf der Fläche und enthält den Schnittpunkt der Doppelgeraden und des Doppelkegelschnittes.

Fällt l mit der η-Achse zusammen, dann rücken die Zwickpunkte ins Unendliche und der eine Ast der Hyperbel ist völlig isoliert.

Im Falle $v>n$ enthält auch die Doppelgerade zwei Zwickpunkte, deren Lage sich aus ihrer Projektion $x=0$ in II_a und deren Schnittpunkten mit p' ergeben. Der endliche Teil der Doppelgeraden ist isoliert. Ferner erstreckt sich jeder Ast der Doppelhyperbel über die ganze Ausdehnung der Ebene σ': an der Entstehung des einen sind daher die Gebiete I_a und II_a, an der des anderen I_b und II_b von σ beteiligt. Der zweite Ast, welcher von Systempunkten in I_b und II_b herrührt, die ganz außerhalb des Bereiches der p-Kurve liegen, wird von lauter Knotenpunkten gebildet, gehört demnach der Fläche an. Der erste Ast dagegen enthält die Zwickpunkte und, im endlichen Teil zwischen ihnen, das isolierte Stück der Hyperbel, außerdem, da A in II_a liegt, ihren Schnittpunkt S_1 mit der Doppelgeraden. In derselben Weise wie in (6) folgt, daß S_1 auf die Fläche fällt, wenn l beim Durchgang durch A außerhalb der p-Kurve des unteren Blattes

bleibt, daß S_1 aber einen Punkt des isolierten Teiles der Hyperbel und damit auch der Doppelgeraden bildet, wenn l im unteren Blatt innerhalb der p-Kurve verläuft, d. h. in den Teilen, die auch die η-Achse enthält. Berührt l die p-Kurve in A, so rücken wie in § 6 der Punkt S_1 und der eine Zwickpunkt Z_1 der Doppelhyperbel zusammen. In σ' (Figur 11) ist S', die Projektion von S_1, der Schnittpunkt von $x = 0$, dem A entsprechenden Gebilde von σ', und von der Geraden l' durch A'. Die Projektion Z' von Z_1 ist der Schnittpunkt von l' und p'. Fällt nun Z' auf S', so muß die Projektion W' des einen Zwickpunktes der Doppelgeraden als Schnittpunkt von $x = 0$ und p' in denselben Punkt fallen. In der Tat ist nach § 10 tg $O'W'A' = \mp \frac{n}{\sqrt{v^2 - n^2}}$ ebenso groß wie der Richtungskoeffizient der Tangenten in A, also die Gerade $A'W'$ nach § 11 mit l' identisch. Es sind also auch hier wiederum ein Zwickpunkt der Doppelgeraden und des Doppelkegelschnittes in den Schnittpunkt beider Doppelgebilde hineingerückt.

Die Scheitelpunkte der Hyperbel werden von den Punkten von σ hervorgebracht, in denen l die Geraden g_a und g_b und, wenn $v < n$ ist, die Geraden g_1 und g_2 schneidet. Aus der Lage dieser Schnittpunkte in σ kann man ohne weiteres erkennen, daß der eine Scheitelpunkt stets einen Punkt der Fläche bildet, ferner ob er ein Zwickpunkt ist und ob der andere Scheitelpunkt der Hyperbel zum isolierten Teil der Doppelkurve gehört oder nicht.

Die einzige symmetrische Fläche mit Doppelgerade und Doppelkegelschnitt entsteht, wenn l mit der η-Achse zusammenfällt. Dann sind $\sin\vartheta$ und p Null; der Doppelkegelschnitt liegt in der xz-Ebene, der eine Ast ganz isoliert, der andere ganz auf der Fläche. Ihre Gleichung lautet nach § 9 und 15: $x^2y^2 + \{sz(sz - v) - x(x - n)\}^2 = y^2(sz - v)^2$. Der Schnitt mit der xz-Ebene ist der Doppelkegelschnitt. Der scheinbare Umriß in der xz-Ebene ist, wie bei allen Flächen dieses Kapitels, die Projektion des Kegelschnitts auf die xz-Ebene, in unserem Falle der Kegelschnitt selbst, und das doppelt zu zählende Strahlenbüschel, welches als Schnitt der xz-Ebene und des Büschels 1. Ordnung von Doppeltangentialebenen der Fläche mit der Doppelgeraden als Achse entsteht. Von diesem Strahlenbüschel zählen zum scheinbaren Umriß allerdings nur die beiden Strahlen, welche die reellen von den imaginären trennen, das sind die Projektionen derjenigen beiden Erzeugenden der Fläche, welche von der Doppelgeraden, also in der Projektion von $x = 0$, $sz = v$, nach den Zwickpunkten der Hyperbel, in unserem Falle parallel den Asymptoten gehen. Der Schnitt mit der yz-Ebene enthält die Doppelgerade und außerdem zwei Erzeugende, der Schnitt mit der Ebene $sz = v$ eben-

dieselbe Doppelgerade und einen auf dem isolierten Teil der Doppelhyperbel liegenden isolierten doppelt zu zählenden Punkt der Fläche.

Ist ferner $n = 0$, so fällt die Achse der Doppelhyperbel auf die z-Achse, die Fläche wird auch noch symmetrisch zur yz-Ebene. Daher wird der Büschel 2. Ordnung der Doppeltangentialebenen der Fläche ein Zylinder mit der Achse senkrecht zur yz-Ebene, und die Projektion der Fläche auf diese Ebene hat als scheinbaren Umriß eine Parabel und zwei Erzeugende als Tangenten dieser Parabel, außerdem die Doppelgerade.

Eine Fläche, die außer zur xz-Ebene noch symmetrisch zur xy-Ebene ist, entsteht, wenn $v = 0$ ist. Die Achse der Hyperbel ist dann die x-Achse. Der Büschel 2. Ordnung der Doppeltangentialebenen ist ein parabolischer Zylinder senkrecht zur xy-Ebene, der scheinbare Umriß in ihr die vollständige Parabel $y^2 = 4nx$, die von der $+$ ξ-Achse umhüllt wird.

§ 18. Im allgemeinen Fall, wenn l weder durch A noch zur ξ-Achse parallel läuft, gibt unsere Bewegung der Geraden l_1 eine Fläche mit einer kubischen Hyperbel als Doppelkurve.

Alle Arten dieser Fläche, welche durch die Zahl und das Zusammenfallen der Zwickpunkte bedingt sind und welche wir mit dem vorigen Mechanismus erhalten haben, können wir auch hier durch passende Anordnung von l gegen die p-Kurve erzeugen. Der Fall, daß vier Zwickpunkte zusammenfallen, ist allerdings nicht erreichbar, da der Selbstberührungspunkt der p-Kurve, wenn er überhaupt reell ist, im Unendlichen liegt und die unendlich ferne Gerade zur Tangente hat, ebenso wenig können wir dahin gelangen, zweimal zwei Zwickpunkte zusammenrücken zu lassen, da dann l mit g_a zusammenfällt und statt der allgemeinen Doppelkurve eine Selbstberührungsgerade entsteht.

Dagegen können wir Flächen hervorbringen mit vier imaginären Zwickpunkten und ganz auf der Fläche verlaufender Doppelkurve, Flächen, die bei dem vorigen Mechanismus ausfielen, wenn wir l so legen, daß sie nicht durch die p-Kurve hindurchgeht. Dies ist, wenn $v > n$ ist, möglich, bei $v < n$ niemals möglich. Auch bei diesen letzten Flächen hat Rohn[1]) noch unterschieden zwischen solchen mit nur reellen und solchen mit reellen und ideellen Doppelsekanten der Raumkurve. Um die Möglichkeit der Entstehung beider Flächenformen zu zeigen, und um es in der Hand zu haben, die eine oder die andere Art entstehen zu lassen, betrachten wir die Kurve, in der der erzeugende Punkt mit einem der Doppelpunkte P_1' und P_2' zusammenfällt. Diese

1) Ebd. S. 302.

Kurve ist, in der Lage der Bewegung, wo die $+\xi$-Achse auf der $+x$-Achse, die $+\eta$-Achse auf der $+y$-Achse liegt, besonders einfach. Ihre Gleichung ergibt sich aus (7) S. 318, wenn man $\xi = x$, $\eta = y$ setzt, zu

$$\left(\xi - \frac{n}{2}\right)^2 - \left(\eta - \frac{\nu}{2}\right)^2 = \frac{n^2 - \nu^2}{2}$$

als die einer gleichseitigen Hyperbel (Fig. 8 u. 10). Schneidet l weder die Polkurve p noch die Hyperbel, so erhalten wir eine Fläche, die sicher ideelle Doppelsekanten hat. Schneidet l die Polkurve nicht, wohl aber die Hyperbel in dem Zweige, der ganz frei von der Polkurve liegt, so ergibt sich eine Fläche, deren Erzeugende sämtlich die Doppelkurve schneiden. Wir können nämlich durch Drehen von l um ihren einen Schnittpunkt mit der Hyperbel, bis l zur ξ-Achse parallel wird, zu einer Fläche mit zwei ganz auf ihr verlaufenden Geraden mit lauter reellen Sekanten gelangen. Wir schließen daraus, daß auch die Doppelkurve, aus der die Doppelgeraden entstanden sind, nur reelle Sekanten hat.

Im Falle von *vier reellen Zwickpunkten* können wir ähnliche Unterscheidungen, wie in § 8 machen. l kann auch bei vier Schnittpunkten mit p so angebracht werden, daß es die Hyperbel nicht schneidet, da der eine Scheitelpunkt der Hyperbel außerhalb des Stückes der Doppeltangente der p-Kurve liegt, welches sich zwischen den beiden Berührungspunkten befindet. Wenn l die Hyperbel schneidet, sind wir imstande zu bewirken, daß die Schnittpunkte von l mit der Hyperbel Doppelpunkte hervorbringen, die auf demselben Stück der Doppelkurve liegen. Wir brauchen l nur so zu legen, daß es die $+\eta$-Achse oberhalb A trifft. Schneidet l dagegen die η-Achse zwischen A und O, so fallen die beiden Doppelpunkte auf getrennte Stücke der Doppelkurve, nur in diesem Falle haben wir Flächen mit vier Zwickpunkten und ausschließlich solchen Erzeugenden, welche die Doppelkurve schneiden. Wenn zwei Zwickpunkte zusammenrücken, tritt gegen § 8 die Vervollständigung ein, daß Flächen mit ganz auf ihnen liegender Doppelkurve ebenfalls erzeugt werden können.

Durch die beiden in vorliegender Arbeit verwendeten Mechanismen können daher die reellen Regelflächen, welche Rohn aus der zwei-zweideutigen Verwandtschaft herleitet, in den verschiedenen von ihm aufgeführten Arten beschrieben werden mit folgenden Ausnahmen:

1. Bei den Flächen mit zwei Doppelgeraden oder einer Selbstberührungsgeraden oder zwei imaginären Doppelgeraden fehlen solche, bei denen außerdem nicht noch eine Doppelerzeugende vorhanden ist. Dies Ergebnis war von vornherein zu übersehen, da ja bei den Bahnkurven unserer Mechanismen stets drei Doppelpunkte vorhanden sind.

2. Bei den Flächen mit Doppelkegelschnitt und Doppelgerade fielen die aus, bei denen auf keinem der beiden Doppelgebilde Zwickpunkte vorkommen, und die Flächen, die Rohn nicht mit erwähnt, bei denen auf einem, aber nur auf einem Doppelgebilde ein Doppelzwickpunkt vorhanden ist. Flächen dieser Art entstehen nach Blake bei der Antiparallelogrammbewegung.

3. Bei den Flächen mit Doppelkurve 3. Ordnung sind alle Arten und Spezialfälle vertreten ausgenommen die Fläche mit vierfachem Zwickpunkt und reell auf ihr liegender Doppelkurve.

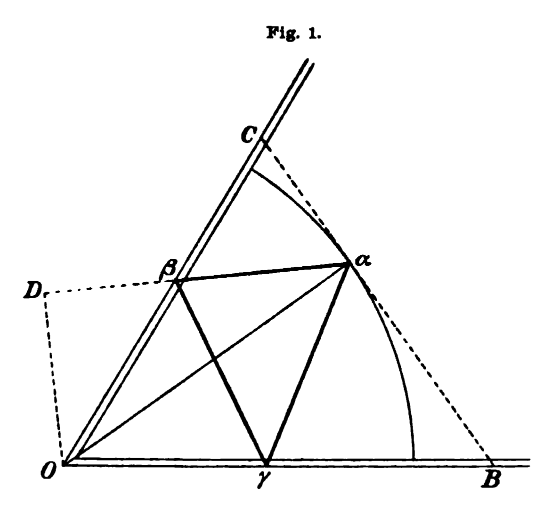
Die Flächen mit dreifacher Geraden können nicht gewonnen werden, da bei unseren Bahnkurven die drei Doppelpunkte nicht in einen zusammenfallen können.

Über eine neue geometrisch-mechanische Erzeugungsweise des Kreises und der sphärischen Kegelschnitte.

Von Felix Bernstein in Halle a. S.

1. Die kinematischen Erzeugungsweisen der einfachsten algebraischen Kurven haben von jeher das Interesse der Geometer auf sich gelenkt und zum Ausgangspunkt zahlreicher und wichtiger Untersuchungen gedient.

Fig. 1.



Die kinematische Erzeugung des Kreises, welche hier behandelt werden soll, scheint, obwohl sehr elementar und merkwürdig, bisher nicht gefunden worden zu sein.

Die Vorrichtung (Fig. 1.) besteht aus einem geschlossenen Faden von der unveränderlichen Länge $2s$ und zwei Stäben OB und OC, welche den *spitzen* Winkel $\sphericalangle COB = \zeta$ miteinander bilden. Auf den Schenkeln OB und OC gleiten zweckmäßig zwei Ringe γ und β, durch welche der Faden geschlungen ist. Wird derselbe nun durch einen in α angehaltenen Schreibstift, der seinerseits an dem Faden entlang frei verschieblich ist, gespannt, so orientieren sich die Ringe γ und β auf den Schenkeln OB und OC, und es bleibt für den

Punkt α ein Grad der Freiheit. *Es bewegt sich der Punkt α auf einem Kreisbogen um O, welcher durch den Schreibstift aufgezeichnet wird.*

2. Zunächst wollen wir den Beweis geben, welcher durch die mechanische Betrachtung nahegelegt wird. Es sind die drei in den Seiten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ entstehenden Fadenspannungen gleich; infolgedessen kann für die Ringe β und γ nur Gleichgewicht bestehen, wenn

$$(1) \qquad \begin{aligned} \sphericalangle\, O\gamma\beta &= \sphericalangle\, B\gamma\alpha \\ \sphericalangle\, O\beta\gamma &= \sphericalangle\, \alpha\beta C \end{aligned}$$

ist. Es sind also $O\gamma B$ und $O\beta C$ Halbierende zweier Außenwinkel des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ und sie gehen daher mit der Halbierenden des dritten Dreieckswinkels $\sphericalangle\, \beta\alpha\gamma$ zusammen durch den festen Punkt O. Die Resultante der beiden gleichen auf α wirkenden Fadenspannungen liegt in der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle\, \beta\alpha\gamma$ und geht also stets durch O. Die Verschiebung von α erfolgt nun ohne Arbeitsaufwand, da der Faden seine Länge $2s$ nicht ändert. Der Weg ist also stets senkrecht zu $O\alpha$ und daher ein Kreis um O.

3. Für einen rein geometrischen Beweis müssen wir die Bedingungen (1) und außerdem die Beziehungen

$$(2) \qquad \overline{\alpha\beta} + \overline{\beta\gamma} + \overline{\gamma\alpha} = 2s,$$

$$(3) \qquad \sphericalangle\, \beta O\gamma = \zeta < R,$$

zugrunde legen.

Es ist

$$\frac{\hat{\alpha}}{2} = R - \frac{\hat{\beta} + \hat{\gamma}}{2};$$

$$R - \frac{\hat{\beta}}{2} = \sphericalangle\, O\beta\gamma$$

$$R - \frac{\hat{\gamma}}{2} = \sphericalangle\, O\gamma\beta$$

$$\underline{\sphericalangle\, O\beta\gamma + \sphericalangle\, O\gamma\beta = 2R - \sphericalangle\, \beta O\gamma}$$

also

$$(4) \qquad \frac{\hat{\alpha}}{2} = R - \sphericalangle\, \beta O\gamma = R - \zeta.$$

Es ist also α während der Bewegung konstant.

Fällt man von O ein Lot OD auf $\alpha\beta$, so ist, da O Mittelpunkt des an $\beta\gamma$ anbeschriebenen Kreises ist, bekanntlich

$$\alpha D = s;$$

und also

$$\overline{O\alpha} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = s.$$

Also ist, wenn wir $\overline{O\alpha} = r$ setzen, mit Rücksicht auf (4)

(I) $$r \sin \zeta = s.$$

Bei konstantem ζ und s ist also r konstant.

Aus der Gleichung (4) folgt, daß α dann und nur dann von Null verschieden sein kann, wenn

$$R - \zeta > 0$$

ist, was nach Voraussetzung der Fall ist.

Wenn

$$R = \zeta$$

ist, so ist $\alpha = 0$ und β und γ fallen in O zusammen.

In diesem Falle geht die Kreiserzeugung in die gewöhnliche über, in der der Kreis mittels eines — hier doppelt genommenen — Fadens konstanter Länge beschrieben wird.

Wird ζ weiter vergrößert, so bleiben β und γ in 0. Es gibt keine andere Gleichgewichtsfigur, wie man sich leicht überzeugt, und es bleibt auch in diesem Fall bei der gewöhnlichen Kreiserzeugung.

4. Wenn man bei gegebenem α die Punkte β und γ finden will, so errichtet man am einfachsten in α auf $O\alpha$ das Lot und bringt es in B und C mit OB und OC zum Schnitt. Das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ist dann in dem spitzwinkligen Dreieck OBC *das Dreieck der Höhenfußpunkte* und demgemäß sind dann β und γ die Fußpunkte der von B und C auf OC und OB gefällten Lote.

Unter allen Dreiecken, welche einem spitzwinkligen Dreieck OBC einbeschrieben sind, hat das Dreieck der Höhenfußpunkte die kleinste Seitensumme. Dies ist zuerst von J. Steiner (Werke, Bd. II, S. 45, No. 7 u. S. 238, No. 64. II, 3) bemerkt worden. Einen eleganten Beweis des Satzes hat H. A. Schwarz (Ges. Math. Abhandlungen. Bd. II, S. 344) gegeben. Endlich hat R. Sturm (Bemerkungen und Zusätze zu Steiners Aufsätzen über Maximum und Minimum, Crelle Bd. 96 p. 62) gezeigt, daß in einem stumpfwinkligen Dreieck das Lot von der stumpfen Ecke auf die Gegenseite die Minimalfigur darstellt. Man kann sich vorstellen, daß der Streckenzug $\alpha\beta\gamma$ der Weg eines Lichtstrahls ist, der gemäß dem Prinzip der kleinsten Wirkung den kürzesten Weg zwischen den spiegelnden Graden OB, BC, CO einschlägt. Aus dieser Vorstellung ist wohl der Schwarzsche Spiegelungsbeweis hervorgegangen. Man kann jedoch auch, wie es in unserer Betrachtung naheliegt, die Vorstellung eines elastischen gespannten Fadens $\alpha\beta\gamma$ heranziehen, dessen Ecken α, β, γ resp. auf den Seiten OB, BC, CO gleiten.

Wie ersichtlich kann Gleichgewicht nur eintreten, wenn einerseits die Fadenlänge ein Minimum ist, andererseits wenn auf die Ecken des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ gleiche Kräfte wirken und also die Fäden, die in einer Ecke zusammenlaufen, gleiche Winkel mit den entsprechenden Seiten des festen Dreiecks OBC bilden. Es ist also notwendig, daß OB, BC, CO Halbierende der Außenwinkel des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ sind, und das letztere ist daher in OBC das Dreieck der Höhenfußpunkte. Bekanntlich ist diese Analogie zwischen statischem und dynamischem Problem ein Spezialfall der allgemeinen von Möbius (Statik 2. Teil) entdeckten Analogie.

5. Allgemein bekannt ist die Erzeugung der Ellipse mittels des gespannten Fadens der Länge $2s$, welcher um die Brennpunkte geschlungen ist. Steht diese nun in irgend einem Zusammenhang mit unserer Kreiserzeugung? Einen solchen Zusammenhang habe ich durch räumliche Betrachtung hergestellt.

Fig. 2

Wir untersuchen die Bewegung des Punktes α, wenn er die Ebene OBC verläßt. (Fig. 2).

Wir wollen den Winkel $\beta O\gamma$ mit ζ, den Winkel $\alpha O\beta$ mit η und den Winkel $\alpha O\gamma$ mit θ bezeichnen.

Es ist dann wieder

(1) $$\sphericalangle\, O\gamma\beta = \sphericalangle\, \alpha\gamma B, \quad \sphericalangle\, O\beta\gamma = \sphericalangle\, \alpha\beta C;$$

und

(2) $$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\beta = 2s.$$

Wir nehmen zunächst an, es existiere eine Gleichgewichtsfigur $\alpha\beta\gamma$, deren drei Punkte α, β, γ auf $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ liegen.

Da
$$\sphericalangle\, O\alpha\gamma = \sphericalangle\, \alpha\gamma B - \sphericalangle\, \alpha O\gamma = \sphericalangle\, \alpha\gamma B - \theta,$$
und ebenso
$$\sphericalangle\, O\alpha\beta = \sphericalangle\, \alpha\beta C - \sphericalangle\, \alpha O\beta = \sphericalangle\, \alpha\beta C - \eta$$

ist, und ferner infolge von (1)
$$\sphericalangle\, \alpha\gamma B + \sphericalangle\, \alpha\beta C = 2R - \zeta$$
ist, so folgt
$$\sphericalangle\, O\alpha\gamma + \sphericalangle\, O\alpha\beta = 2R - (\zeta + \theta + \eta).$$

Damit also
$$\sphericalangle\, O\alpha\gamma + \sphericalangle\, O\alpha\beta > 0$$

sei, muß

(3) $$2R > \xi + \theta + \eta$$

sein. Diese notwendige Bedingung ist auch hinreichend, wie später gezeigt wird.

Wir projizieren den Punkt O senkrecht auf die Ebene $\alpha\beta\gamma$. Die Projektion O^* wird der Mittelpunkt des dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ an der Seite $\beta\gamma$ anbeschriebenen Kreises sein, da offenbar $O\beta$ und $O\gamma$ sich als Winkelhalbierende der Außenwinkel in β und γ projizieren.

Dementsprechend ist auch

$$\sphericalangle\, O^*\alpha\gamma = \sphericalangle\, O^*\alpha\beta$$

und somit

(4) $$\sphericalangle\, O\alpha\gamma = \sphericalangle\, O\alpha\beta,$$

also

(5) $$\sphericalangle\, O\alpha\beta = R - \frac{\xi + \theta + \eta}{2}.$$

Bedeutet D den Fußpunkt des von O auf $\alpha\beta$ gefällten Lotes, so ist dasselbe zugleich Fußpunkt des von O^* auf $\alpha\beta$ gefällten Lotes, und also ist

(6) $$\overline{\alpha D} = s.$$

Ferner ist

$$s = \overline{\alpha D} = \overline{O\alpha} \cdot \cos O\alpha\beta,$$

oder

(II) $$s = r \sin \frac{\xi + \theta + \eta}{2}.$$

Die Gleichung (II) *lehrt, daß bei konstantem s und bei konstanter der Bedingung* (3) *genügender Summe $2\sigma = \xi + \eta + \theta$ der Punkt α sich auf einer Kugeloberfläche vom Radius r bewegt. Er beschreibt dort einen sphärischen Kegelschnitt, dessen Brennpunkte die Schnittpunkte B und Γ von OB und OC mit der Kugeloberfläche sind.*

Man realisiert diese Erzeugung, indem man einen in O mittels Universalgelenk frei drehbaren Stab $O\alpha$ von der Länge r anbringt, dessen Länge sich durch Ausziehen einer Hülse variieren läßt und der an seinem Ende einen Ring trägt, durch den die Schnur laufen kann.

Man hat in dieser Erzeugung ein bequemes Mittel, einen sphärischen Kegelschnitt auf das *Innere* einer Kugeloberfläche zu zeichnen, während bei der gewöhnlichen Erzeugung des Kegelschnitts auf der Sphäre nur auf der Außenfläche gezeichnet werden kann, da die sämtlichen Seiten des Fadendreiecks $B\Gamma\alpha$ von der Länge 2σ durch den Widerstand der Oberfläche die Krümmung erhalten. Wir wollen die hier gegebene Erzeugung mittels eines gradlinigen Fadendreiecks mit

beweglichen Ecken als *innere* Erzeugung, die andere als *äußere* Erzeugung des sphärischen Kegelschnitts bezeichnen.

Beide Erzeugungen werden identisch, wenn wir O ins Unendliche rücken lassen und gehen in die ebene Erzeugung der Ellipse mittels des Fadendreiecks von konstanter Länge über.

Unsere Kreiserzeugung entspricht dem Grenzfall der Erzeugung sphärischer Ellipsen, nämlich dem Fall, wo die Ellipse die doppelt durchlaufene Entfernung der Brennpunkte wird.

6. Es erübrigt noch zu bemerken, daß die Bedingung (3) *hinreichend* dafür ist, daß eine Gleichgewichtsfigur mit getrennten α, β und γ besteht. In der Tat, aus (II) ergibt sich bei gegebenem s sofort r und somit bei gegebenem ζ, η und θ auch der Punkt α. Von α aus werden die Winkel $\alpha O \beta$ und $\alpha O \gamma$ gleich $R - \frac{\zeta + \theta + \eta}{2}$ angetragen, woraus sich β und γ ergeben.

Wird

$$2R = \zeta + \theta + \eta,$$

so wird

$$\sphericalangle \alpha O \beta = \sphericalangle \alpha O \gamma = 0$$

und β und γ fallen in O zusammen. Wir haben dann für die Lage von α eine Kugelfläche vom Radius s.

Ist

$$2R < \zeta + \theta + \eta,$$

so bleiben β und γ in O, und es bleibt bei der Erzeugung einer Kugeloberfläche mittels eines doppelt genommenen Fadens.

Halle a. S., den 1. Dezember 1904.

Bücherschau.

L. Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik. II. Teil enthaltend: Die Wirkungsprinzipe, die Lagrangeschen Gleichungen und deren Anwendungen. Leipzig, J. A. Barth, 1904. X u. 336 S.

Dem ersten 1897 erschienenen Bande, von dem man in Band 44 dieser Zeitschrift (Hist.-Lit. Abt. S. 172) eine Anzeige findet, ist nach längerer Pause der zweite gefolgt, in dem dieselben Bestrebungen zum Ausdruck kommen, die sich bereits in dem ersten geltend machen, nämlich einenteils die Darstellung der Mechanik in ihrer alten, klassischen Form möglichst beizubehalten, jedoch die Dunkelheiten, die die moderne Kritik mit Recht gerügt hat, zu vermeiden und die Sätze möglichst zu präzisieren, anderen-

teils Gewicht auf den physikalischen Sinn und den Zusammenhang mit der theoretischen Physik zu legen; verdankt doch das ganze Werk seine Entstehung dem Umstande, daß Herr Boltzmann die für den zweiten Teil der Gastheorie erforderlichen Einschaltungen über Mechanik ihres großen Umfanges wegen in ein selbständiges Buch verwiesen hat.

Der Zusammenhang mit der Physik tritt besonders in diesem zweiten Teile hervor, in dem der Verfasser sich die Behandlung des Prinzipes der kleinsten Wirkung, der Hamiltonschen Prinzipe sowie der damit zusammenhängenden Arbeiten von Helmholtz, Hölder, Voß und anderen zur Aufgabe gemacht hat, wobei die Beziehungen der Wirkungsprinzipe zur Gastheorie, Wärmetheorie und Elektrizitätslehre sowie die Sätze von Maxwell, Helmholtz und Hertz über zyklische Systeme Berücksichtigung gefunden haben. Von großem Interesse sind die Ausführungen in § 35, wo Herr Boltzmann seine Ansichten über die Stellung der Mechanik zur Physik entwickelt.

Zu der allmähligen Ausbildung der Mechanik in ihrer heutigen Gestalt habe, offener oder versteckter, die Vorstellung von Zentrikräften zwischen materiellen Punkten geführt. Daraus dürfe man jedoch nicht den Schluß ziehen, daß diese Vorstellung deswegen auch immer deren Basis bleiben müsse. Es könnten vielmehr die Prinzipien der Mechanik ebenfalls unter Bedingungen gelten, die sich nicht durch Zentrikräfte realisieren lassen, man könnte also die Vorstellung der Zentrikräfte ganz fallen lassen und an ihrer Stelle irgend eines der allgemeinen Prinzipe zur Grundlage der Mechanik machen, zum Beispiel das Prinzip der stationären Wirkung, das die Gleichungen der Mechanik in ihrer Gesamtheit liefert. Dabei könnte sogar der Fall ins Auge gefaßt werden, daß der Zustand von Systemen durch andere Koordinaten bestimmt sei, als solchen, welche die Lage im Raume angeben, man könnte also als generalisierte Koordinaten etwa die Temperatur, den elektrischen Zustand usw. nehmen. Um das Auftreten solcher Gleichungen, die denen der Mechanik analog sind, in der Theorie der Wärme, der Elektrizität usw. zu erklären, bestehe die Möglichkeit, diese Phänomene durch verborgene mechanische Bewegung verursacht zu denken. Es wäre sicher klarer, wenn wir nicht nur alle Bewegungserscheinungen an festen, tropfbaren und gasförmigen Körpern, sondern auch Wärme, Licht, Elektrizität, Magnetismus, Gravitation, alles durch ein einheitliches Prinzip erklären könnten, als wenn wir für jedes dieser Agentien wieder ein ganzes Inventar vollkommen fremdartiger Begriffe wie Temperatur, elektrische Ladung, Potential usw. brauchen. Freilich gebe er gern zu, daß es vermessen sei zu hoffen, daß das heutige mechanische Weltbild sich in alle Ewigkeit erhalten werde, und er sei daher weit entfernt, von Versuchen, allgemeinere Gleichungen zu suchen, von denen die mechanischen nur spezielle Fälle sind, gering zu denken. Nur dem Leichtsinn möchte er entgegenarbeiten, der, bevor ein anderes derartiges Weltbild von der ersten Grundlage bis zur Anwendung auf die wichtigsten Erscheinungen, die schon solange durch das alte Weltbild erschöpfend dargestellt sind, detailliert ausgearbeitet vorliegt, ja ohne von den Schwierigkeiten der Konstruktion desselben eine Ahnung zu haben, das alte Weltbild der Mechanik für einen überwundenen Standpunkt erklärt. Vor allem dürfe man, wenn man das Bild materieller Punkte vermeiden wollte, nicht doch wieder später materielle Punkte einführen, sondern man

müsse von anders beschaffenen Einzelwesen oder Elementen ausgehen, deren Eigenschaften so klar wie die der materiellen Punkte zu schildern wären.

„Ich schrieb das Vorstehende vor etwa sieben Jahren nieder", schließt Herr Boltzmann. „Was ich dort nach Jahrhunderten oder nach Jahrtausenden erwartete, ist in sieben Jahren zur Hälfte geschehen. Aber nicht von der Energetik, nicht von der Phänomenologie ging der Hoffnungsstrahl einer nichtmechanischen Naturerklärung aus, sondern von einer Atomtheorie, die in phantastischen Hypothesen die alte Atomtheorie ebenso übertrifft, wie ihre Elementargebilde an Kleinheit die alten Atome übertreffen. Ich brauche nicht zu sagen, daß ich die moderne Elektronentheorie meine. Diese strebt gewiß nicht, die Begriffe der Masse und Kraft, das Trägheitsgesetz usw. aus Einfacherem, leichter Verständlichem zu erklären, ihre einfachsten Grundbegriffe und Gesetze werden sicher ebenso unerklärlich bleiben, wie für das mechanische Weltbild die Mechanik. Aber der Vorteil, die gesammte Mechanik aus anderen, für die Erklärung des Elektromagnetismus ohnehin notwendigen Vorstellungen ableiten zu können, wäre ebenso groß, als wenn umgekehrt die elektromagnetischen Erscheinungen mechanisch erklärt werden könnten. Möge das erstere gelingen und dabei meine vor sieben Jahren gestellte Forderung erfüllt werden!"

Vielleicht bietet der in Aussicht gestellte dritte Teil, der die Elastizitätslehre und die Hydrodynamik behandeln soll, Herrn Boltzmann Gelegenheit, in einigen Jahren auf die elektromagnetische Begründung der Mechanik zurückzukommen, deren Durchführung inzwischen erhebliche Fortschritte gemacht hat und wohl auch weiter machen wird.

Kiel. PAUL STÄCKEL.

Astronomischer Kalender für 1905. Berechnet für den Meridian und die Polhöhe von Wien. Herausgegeben von der k. k. Sternwarte. 8°. 138 S. Wien, K. Gerolds Sohn. Pr. kart. 2.40 M.

Inhalt und Anordnung des Kalenders sind unverändert geblieben (vgl. diese Ztschr. Bd. 51, p. 171). Unter den Anlagen ist die bemerkenswerteste Nr. VIII: Die Figur der Planeten auf Grund der Theorien über das Gleichgewicht rotierender Flüssigkeitsmassen, von A. Prey. Der Aufsatz enthält eine gemeinverständliche Darstellung der Lehre von den rotierenden Gleichgewichtsfiguren. Die Disposition folgt der historischen Entwickelung, mit Maclaurin und d'Alembert anfangend bis auf die Darwin-Poincaréschen Theorien unserer Tage; weder die Korrektheit der Fassung noch die Zahl der Quellennachweise läßt zu wünschen übrig.

Straßburg i. E. C. W. WIRTZ.

G. Kewitsch, Zweifel an der astronomischen und geometrischen Grundlage des 60-Systems. 8°. 23 S. Ztschr. f. Assyriologie. Bd. 18. Straßburg 1904.

Die Zweifel, die Herr Kewitsch gegen die astronomische und geometrische Entstehung des Sexagesimalsystems erhebt, gründen sich auf die Überlegung, daß Zählen dem Messen voranging und daß man einem Naturmaße zu liebe nie daran denken würde, das einmal entwickelte Zählsystem aufzugeben.

Mit Tatsachen aus Ethnologie und Philologie belegt der Verf. seine These, daß auch das Zählsystem der Babylonier, gleich dem der heutigen unkultivierten Völker, aus dem reinen Fingerzählen entstand; für die Art dieses Fingerzählens werden zwei durch Argumente aus Völkerkunde und Sprache gestützte Möglichkeiten offen gelassen. Es ist u. E. nicht leicht, den überzeugenden Darlegungen des Aufsatzes gleich stichhaltige Einwände entgegenzusetzen.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

Neue Bücher.[1]

Arithmetik und Analysis.

1. Biermann, Otto, Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 8; geb. in Leinw. M. 8.80.
2. Neumann, Ernst Richard, Studien über die Methoden von C. Neumann und G. Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie. (Preisschriften der Fürstl. Jablonowskischen Gesellsch. Nr. XXXVII.) Leipzig, Teubner.

Astronomie und Geodäsie.

3. Marcuse, Adolf, Handbuch der geographischen Ortsbestimmung für Geographen und Forschungsreisende. Braunschweig, Vieweg & Sohn.
4. Schmehl, Chr., Die Elemente der sphärischen Astronomie und der mathematischen Geographie. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und zum Selbststudium. Gießen, Roth. M. 1.60; geb. M. 2.

Graphische Methoden.

5. Poussin, R., Sur l'application des procédés graphiques aux calculs d'assurances. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 10.

S. auch Nr. 1.

Geschichte und Biographien.

6. Lampe, E., Guido Hauck. Rede zur Gedächnisfeier für Guido Hauck am 17. Mai 1905 in der Halle der technischen Hochschule zu Charlottenburg. (Sonderabdruck aus dem 14. Band des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.) Nebst der Rede am Sarge in der Halle des Friedhofes der Zwölfapostelgemeinde, gehalten am 28. Januar 1905 von A. Parisius. Mit einem Bildnis von G. Hauck als Titelbild. Leipzig, Teubner.

Kristallographie.

7. Baumhauer, H., Die neuere Entwicklung der Kristallographie. („Die Wissenschaft" Heft 7.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 4; geb. in Leinw. M. 4.60.

Mechanik.

8. Föppl, Aug., Vorlesungen über technische Mechanik. 3. Bd. Festigkeitslehre. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 12.
9. Gibbs, J. Willard, Elementare Grundlagen der statistischen Mechanik, ent-

---

[1] Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1905.

wickelt besonders im Hinblick auf eine rationelle Begründung der Thermodynamik. Deutsch bearb. v. E. Zermelo. Leipzig, Barth. M. 10.—; geb. in Leinw. M. 11.

10. Heller, A. H., Stresses in structures and the accompanying deformations. Columbus, O. Heller. $ 2.50.

11. Sachs, L., Zur Berechnung räumlicher Fachwerke. Allgemeine Formeln für statisch bestimmte und insbesondere statisch unbestimmte Kuppel-, Zelt- und Turmdächer. Berlin, Ernst & Sohn. M. 2.50.

12. Vidal, L., Manuel pratique de cinématique navale et maritime, à l'usage de la marine de guerre et de la marine de commerce. Paris, Gauthiers-Villars. Frs. 7.50.

S. auch Nr. 2.

Physik und Meteorologie.

13. Braun, Ferd., Über drahtlose Telegraphie und neuere physikalische Forschungen. Rektoratsrede. Straßburg, Heitz. M. 1.20.

14. Chwolson, O. D., Lehrbuch der Physik, übersetzt von E. Berg. 3. Bd. Die Lehre von der Wärme. Braunschweig, Vieweg & Sohn.

15. Fortschritte, die, der Physik im J. 1904. Dargestellt von der deutschen physikal. Gesellsch. 60. Jahrg. 1. Abtlg. Allgem. Physik, Akustik, physikal. Chemie. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 30.

16. Mack, Karl, Physikalische Hypothesen und ihre Wandlungen. Akademische Festrede. Mit Anmerkungen und Literaturnachweisen. Leipzig, Barth. M. 1.

17. Rümelin, Gust., Über die Verdünnungswärme konzentrierter Lösungen. Diss. Freiburg i. B., Speyer & Kärner. M. 1.

18. Schwarzschild, K., Untersuchungen zur geometrischen Optik. I. Einleitung in die Fehlertheorie optischer Instrumente auf Grund des Eikonalbegriffs. II. Theorie der Spiegelteleskope. (Abh. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, math.-physikal. Klasse, Neue Folge. Bd. IV Nr. 1 u. 2.) Berlin, Weidmann. Je M. 2.

19. Trabert, Wilhelm, Meteorologie u. Klimatologie. („Die Erdkunde", XIII. Teil.) Leipzig u. Wien, Deuticke. Preis für Abnehmer des ganzen Werkes M. 4, für den Einzelverkauf M. 5.

20. Winkelmann, A., Handbuch der Physik. 2. Aufl. IV. Bd. 2. Hälfte. Elektrizität u. Magnetismus. I. Leipzig, Barth. M. 20.

S. auch Nr. 2, 7, 9.

Tafeln.

21. Rex, Fdr. Wilh., Vierstellige Logarithmen-Tafeln. Schul-Ausg. 2. Aufl. Stuttgart, Metzler. M. —.60.

22. Rühlmann, M. u. M. R., Logarithmisch-trigonometrische u. andere f. Rechner nützliche Tafeln, zunächst f. Techniker sowie f. den Schulgebrauch u. f. praktische Rechner überhaupt. 13., verm. u. verb. Aufl. Leipzig, Klinkhardt. geb. in Leinw. M. 2.50.

23. Wegener, A., Die Afonsinischen Tafeln f. den Gebrauch eines modernen Rechners. Diss. Berlin.

S. auch Nr. 5.

Verschiedenes.

24. Bell, W. W., Mathematical recreations and essays. 4th ed. London, Macmillan. 7 s.

25. Neumayer, G. von, Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen. Unter Mitwirkung zahlreicher Gelehrter hrsg. In zwei Bänden. 3. Aufl. (In etwa 12 Lfgn. zu 3 M.) Hannover, Jänecke.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgefü Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung fin nicht statt.]

Ambronn, L., Die Messungen des Sonnendurchmessers an dem Repsoldschen 6-z Heliometer der Sternwarte zu Göttingen, ausgeführt von W. Schur u. L. Ambro (Abh. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, math.-physikal. Klasse, N Folge Bd. III Nr. 3.) Berlin, Weidmann. M.

Baumhauer, H., Die neuere Entwicklung der Kristallographie, s. N. B. („Ne Bücher") Nr. 7.

Biermann, O., Mathematische Näherungsmethoden, s. N. B. 1.

Chwolson, O. D., Lehrbuch der Physik, 3. Bd., s. N. B. 14.

Föppl, A., Technische Mechanik, 3. Bd., s. N. B. 8.

Fricke, Robert, Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. Als Leitfade zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt. 4. Aufl. Braunschwei Vieweg & Sohn. M. 5; geb. M. 5.8

Hecker, O, Seismometrische Beobachtungen in Potsdam in der Zeit vom 1. Janua bis 31. Dezember 1904. (Veröffentlichung des Kgl. Preuß. geodät. Institut Neue Folge Nr. 21.) Berlin, Stankiewicz.

Lampe, E., Guido Hauck, s. N. B. 6.

Marcuse, A., Handbuch der geographischen Ortsbestimmung, s. N. B. 3.

Neumann, E. R., Studien über die Methoden von C. Neumann u. G. Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie, s. N. B. 2.

Neumayer, v., Anleitung zu wissenschaftl. Beobachtungen auf Reisen, Lfg. 2, s. N. B. 25.

Polhöhe von Potsdam, die, III. Heft. (Veröffentlichung des Kgl. Preuß. geodätischen Instituts, Neue Folge Nr. 20.) Berlin, Stankiewicz.

Rühlmann, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln, s. N. B. 22.

Schmehl, Chr., Elemente der sphärischen Astronomie und der mathematischen Geographie, s. N. B. 4.

Schulze, Edmund, u. Pahl, Franz, Mathematische Aufgaben. Ausgabe f. Gymnasien. 1. Teil. Aufgaben aus der Planimetrie u. Arithmetik f. die Unterstufe (Quarta bis Untersekunda einschl.). Leipzig, Dürr. geb. in Leinw. M. 2.40.

Schwarzschild, K., Untersuchungen zur geometrischen Optik, I. u. II., s. N. B. 18.

Trabert, W., Meteorologie u. Klimatologie, s. N. B. 19.

Berichtigung.

In der Abhandlung: „Spannungen und Formänderungen einer rotierenden Hohl- und Vollkugel" von Ing. A. V. Leon in Bd. 52 Heft 2 dieser Zeitschr. muß Satz IV auf S. 174, Z. 16—24 v. o. gestrichen werden. Er ist der Schriftleitung schon vor längerer Zeit vom Verfasser als unrichtig bezeichnet worden, aber aus Versehen stehen geblieben.

ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1859—1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND **C. RUNGE** IN GÖTTINGEN.

---

52. BAND. 4. HEFT.

MIT 40 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 2. Januar 1906.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.
HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

Seite

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

O. Biermann, N. Delaunay, K. Doehlemann, P. Ernst, R. Girtler, A. Grünwald, A. Leon, M. Lerch, R. Mehmke, G. Mie, K. Nitz, M. Radaković, C. Runge, R. Schimmack, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, A. Timpe, Th. Weitbrecht, S. Wellisch, K. Wieghardt, C. W. Wirtz, F. Wittenbauer, A. Wlassow, E. Wölffing.

Ein kinematisches Prinzip und seine Anwendung zu einem Katenographen.

Von Rudolf Schimmack in Göttingen.

Es ist bekannt, daß eine Rolle von horizontaler Achsenstellung, welche mit ihrem messerscharfen Rande in die horizontale Ebene des Zeichenpapiers ein wenig eingepreßt wird, bei ihrer Bewegung in jedem Augenblick nur in Richtung ihrer eigenen Drehungsebene rollen kann. Aus der mehrfachen sinnreichen Verwendung dieser scharfrandigen Rolle bei der Konstruktion kinematischer Apparate[1]) ergab sich die Anregung, durch Kombinationen mehrerer solcher Rollen nach neuen Möglichkeiten zu suchen.[2]) Im folgenden soll von einer besonderen Art der Kombination zweier Rollen die Rede sein, die anscheinend ein spezielles Interesse verdient; sie weist nämlich einen *Weg zur Konstruktion mehrerer neuer Apparate für kinematische Erzeugungen von Kurven.*

1) Nach Mitteilung von Herrn Prof. R. Mehmke hat schon Giov. Poleni 1729 eine scharfrandige Rolle zur Konstruktion seines Traktoriographen benutzt; Zeitschrift f. Math. u. Phys. **43** (1898), S. 317. Von neueren Apparaten, die ebenfalls wesentlich auf dem Prinzip der scharfrandigen Rolle beruhen, sei ein (weniger bekanntes) Planimeter von J. Amsler und der Integraph von Abdank-Abakanowicz angeführt. Vgl. J. Amsler, Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhalts, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über einen neuen Planimeter, Vierteljahrsschrift der naturf. Ges. in Zürich **1** (1856), S. 41—70, 101—140, bes. 60; Br. Abdank-Abakanowicz, die Integraphen, die Integralkurve und ihre Anwendungen, deutsch bearb. von E. Bitterli, Leipzig (Teubner) 1889; die neueste Form des Integraphen ist in der von der Firma G. Coradi-Zürich herausgegebenen Broschüre beschrieben: H. Lossier, L'Intégraphe Abdank-Abakanowicz, 1903, sowie in dem Referat von Hammer über diese Broschüre, Zeitschrift für Instrumentenkunde **24** (1904), S. 213—217.

2) Herr Geheimrat F. Klein hat in einer Vorlesung (vom Sommer 1897) die Idee angegeben, daß man mittels mehrerer Integraphen, deren Laufschlitten in geeigneter Weise miteinander verbunden werden, Apparate zur Integration irgendwelcher spezieller gewöhnlicher Differentialgleichungen höherer Ordnung müsse konstruieren können.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heft[illegible]langen Beiträge der [illegible]

O. Biermann, N. Delaunay, K. Doehlemann, P. [illegible] Girtler, A. Grün[illegible]
M. Lerch, R. Mehmke, G. Mie, K. Nitz, M. Rad[illegible]ange, B. Schimm[illegible]
A. Sommerfeld, P. Stäckel, A. Timpe, Th. Weitb[illegible]llisch, K. Wiegh[illegible]
F. Wittenbauer, A. W[illegible]ölffing.

Ein kinematisches Prinzip und seine Anwendung zu einem Katenographen.

Von RUDOLF SCHIMMACK in Göttingen.

Es ist bekannt, daß eine Rolle von horizontaler Achsenstellung, welche mit ihrem messerscharfen Rande in die horizontale Ebene des Zeichenpapiers ein wenig eingepreßt wird, bei ihrer Bewegung in jedem Augenblick nur in Richtung ihrer eigenen Drehungsebene rollen kann. Aus der mehrfachen sinnreichen Verwendung dieser scharfrandigen Rolle bei der Konstruktion kinematischer Apparate[1]) ergab sich die Anregung, durch Kombinationen mehrerer solcher Rollen nach neuen Möglichkeiten zu suchen.[2]) Im folgenden soll von einer besonderen Art der Kombination zweier Rollen die Rede sein, die anscheinend ein spezielles Interesse verdient; sie weist nämlich einen *Weg zur Konstruktion mehrerer neuer Apparate für kinematische Erzeugungen von Kurven.*

---

1) Nach Mitteilung von Herrn Prof. R. Mehmke hat schon Giov. Poleni 1729 eine scharfrandige Rolle zur Konstruktion seines Traktoriographen benutzt; Zeitschrift f. Math. u. Phys. **43** (1898), S. 317. Von neueren Apparaten, die ebenfalls wesentlich auf dem Prinzip der scharfrandigen Rolle beruhen, sei ein (weniger bekanntes) Planimeter von J. Amsler und der Integraph von Abdank-Abakanowicz angeführt. Vgl. J. Amsler, Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhalts, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über einen neuen Planimeter, Vierteljahrsschrift der naturf. Ges. in Zürich **1** (1856), S. 41—70, 101—140, bes. 60; Br. Abdank-Abakanowicz, die Integraphen, die Integralkurve und ihre Anwendungen, deutsch bearb. von E. Bitterli, Leipzig (Teubner) 1889; die neueste Form des Integraphen ist in der [illegible] Firma G. Coradi-Zürich herausgegebenen Broschüre beschrieben: H. Lossier, [illegible]aphe Abdank-Abakanowicz, 1903, sowie in dem Referat von Hammer [illegible]se Broschüre, Zeitschrift für Instrumentenkunde **24** (1904), S. 213—217.

[illegible]eimrat F. Klein hat in einer Vorlesung (vom Sommer 1897) die [illegible]ß man mittels mehrerer Integraphen, deren Laufschlitten in [illegible]teinander verbunden werden, Apparate zur Integration irgend- [illegible]ewöhnlicher Differentialgleichungen höherer Ordnung müsse

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der [illegible]

O. Biermann, N. Delaunay, K. Doehlemann, P. [illegible] Girtler, A. Grünw[illegible] M. Lerch, R. Mehmke, G. Mie, K. Nitz, M. Radak[illegible] Runge, R. Schimma[illegible] A. Sommerfeld, P. Stäckel, A. Timpe, Th. Weitbr[illegible]llisch, K. Wiegh[illegible] F. Wittenbauer, A. W[illegible]öffing.

Ein kinematisches Prinzip und seine Anwendung zu einem Katenographen.

Von RUDOLF SCHIMMACK in Göttingen.

Es ist bekannt, daß eine Rolle von horizontaler Achsenstellung, welche mit ihrem messerscharfen Rande in die horizontale Ebene des Zeichenpapiers ein wenig eingepreßt wird, bei ihrer Bewegung in jedem Augenblick nur in Richtung ihrer eigenen Drehungsebene rollen kann. Aus der mehrfachen sinnreichen Verwendung dieser scharfrandigen Rolle bei der Konstruktion kinematischer Apparate[1]) ergab sich die Anregung, durch Kombinationen mehrerer solcher Rollen nach neuen Möglichkeiten zu suchen.[2]) Im folgenden soll von einer besonderen Art der Kombination zweier Rollen die Rede sein, die anscheinend ein spezielles Interesse verdient; sie weist nämlich einen *Weg zur Konstruktion mehrerer neuer Apparate für kinematische Erzeugungen von Kurven.*

---

1) Nach Mitteilung von Herrn Prof. R. Mehmke hat schon Giov. Poleni 1729 eine scharfrandige Rolle zur Konstruktion seines Traktoriographen benutzt; Zeitschrift f. Math. u. Phys. 43 (1898), S. 317. Von neueren Apparaten, die ebenfalls wesentlich auf dem Prinzip der scharfrandigen Rolle beruhen, sei ein (weniger bekanntes) Planimeter von J. Amsler und der Integraph von Abdank-Abakanowicz angeführt. Vgl. J. Amsler, Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhalts, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über einen neuen Planimeter, Vierteljahrsschrift der naturf. Ges. in Zürich 1 (1856), S. 41—70, 101—140, bes. 60; Br. Abdank-Abakanowicz, die Integraphen, die Integralkurve und ihre Anwendungen, deutsch bearb. von E. Bitterli, Leipzig (Teubner) 1889; die neueste Form des Integraphen ist in der [illegible] Firma G. Coradi-Zürich herausgegebenen Broschüre beschrieben: H. Lossier, [illegible]aphe Abdank-Abakanowicz, 1903, sowie in dem Referat von Hammer [illegible]ese Broschüre, Zeitschrift für Instrumentenkunde 24 (1904), S. 213—217.

[illegible]heimrat F. Klein hat in einer Vorlesung (vom Sommer 1897) die [illegible]ß man mittels mehrerer Integraphen, deren Laufschlitten in [illegible]iteinander verbunden werden, Apparate zur Integration irgend- [illegible]gewöhnlicher Differentialgleichungen höherer Ordnung müsse [illegible].

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 30 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:
O. Biermann, N. Delaunay, K. Doehlemann, P. Ernst, R. Girtler, A. Grünwald, A. Leon, M. Lerch, R. Mehmke, G. Mie, K. Nitz, M. Radaković, C. Runge, R. Schimmack, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, A. Timpe, Th. Weitbrecht, S. Wellisch, K. Wieghardt, C. W. Wirtz, F. Wittenbauer, A. Wlassow, E. Wölffing.

Ein kinematisches Prinzip und seine Anwendung zu einem Katenographen.

Von RUDOLF SCHIMMACK in Göttingen.

Es ist bekannt, daß eine Rolle von horizontaler Achsenstellung, welche mit ihrem messerscharfen Rande in die horizontale Ebene des Zeichenpapiers ein wenig eingepreßt wird, bei ihrer Bewegung in jedem Augenblick nur in Richtung ihrer eigenen Drehungsebene rollen kann. Aus der mehrfachen sinnreichen Verwendung dieser scharfrandigen Rolle bei der Konstruktion kinematischer Apparate[1]) ergab sich die Anregung, durch Kombinationen mehrerer solcher Rollen nach neuen Möglichkeiten zu suchen.[2]) Im folgenden soll von einer besonderen Art der Kombination zweier Rollen die Rede sein, die anscheinend ein spezielles Interesse verdient; sie weist nämlich einen *Weg zur Konstruktion mehrerer neuer Apparate für kinematische Erzeugungen von Kurven.*

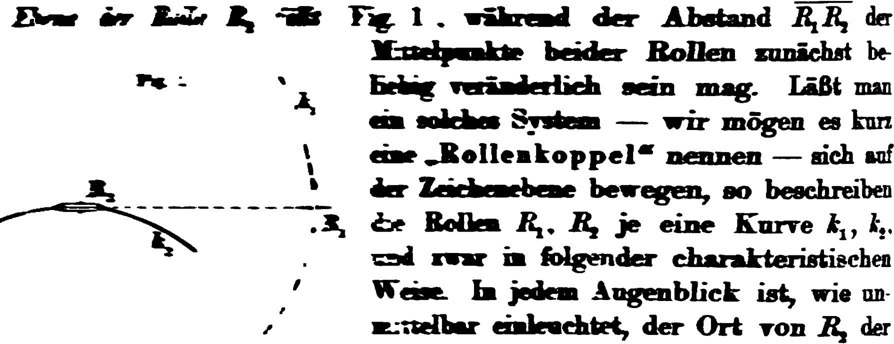
---

1) Nach Mitteilung von Herrn Prof. R. Mehmke hat schon Giov. Poleni 1729 eine scharfrandige Rolle zur Konstruktion seines Traktoriographen benutzt; Zeitschrift f. Math. u. Phys. **48** (1898), S. 317. Von neueren Apparaten, die ebenfalls wesentlich auf dem Prinzip der scharfrandigen Rolle beruhen, sei ein (weniger bekanntes) Planimeter von J. Amsler und der Integraph von Abdank-Abakanowicz angeführt. Vgl. J. Amsler, Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhalts, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über einen neuen Planimeter, Vierteljahrsschrift der naturf. Ges. in Zürich **1** (1856), S. 41—70, 101—140, bes. 60; Br. Abdank-Abakanowicz, die Integraphen, die Integralkurve und ihre Anwendungen, deutsch bearb. von E. Bitterli, Leipzig (Teubner) 1889; die neueste Form des Integraphen ist in der von der Firma G. Coradi-Zürich herausgegebenen Broschüre beschrieben: H. Lossier, L'Intégraphe Abdank-Abakanowicz, 1903, sowie in dem Referat von Hammer über diese Broschüre, Zeitschrift für Instrumentenkunde **24** (1904), S. 213—217.

2) Herr Geheimrat F. Klein hat in einer Vorlesung (vom Sommer 1897) die Idee angegeben, daß man mittels mehrerer Integraphen, deren Laufschlitten in geeigneter Weise miteinander verbunden werden, Apparate zur Integration irgendwelcher spezieller gewöhnlicher Differentialgleichungen höherer Ordnung müsse konstruieren können.

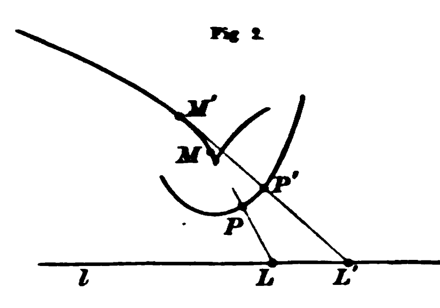
1. Das Prinzip der Rollenkoppel und die Idee eines Katenographen.

Es mögen zwei Rollen der oben geschilderten Art R_1, R_2 so miteinander verbunden sein, daß *die Achse der Rolle R_1 beständig in die Ebene der Rolle R_2 fällt* (Fig. 1), während der Abstand $\overline{R_1 R_2}$ der Mittelpunkte beider Rollen zunächst beliebig veränderlich sein mag. Läßt man ein solches System — wir mögen es kurz eine „Rollenkoppel“ nennen — sich auf der Zeichenebene bewegen, so beschreiben die Rollen R_1, R_2 je eine Kurve k_1, k_2, und zwar in folgender charakteristischen Weise. In jedem Augenblick ist, wie unmittelbar einleuchtet, der Ort von R_2 der Krümmungsmittelpunkt der Kurve k_1 für den momentanen Ort von R_1, der Abstand $\overline{R_1 R_2}$ allemal der zugehörige Krümmungsradius ϱ der Kurve k_1; die Kurve k_2 stellt die Evolute der Kurve k_1 dar. Wir formulieren also den Satz:



Unsere Rollenkoppel hat die Eigenschaft, sich nur so bewegen zu können, daß der Abstand $\overline{R_1 R_2}$ fortgesetzt den Krümmungsradius der von R_1 durchlaufenen Kurve darstellt.

Das hiermit gewonnene kinematische Prinzip findet eine einfache Anwendung zur Konstruktion eines Apparates, der Kettenlinien zeichnet: eines Katenographen. Es wird dabei von der bekannten Eigenschaft der Kettenlinie Gebrauch gemacht, daß für jede Stelle ihr Krümmungsradius gleich ist dem Stücke der Normalen, das zwischen der Kurve und ihrer Leitlinie liegt. Man betrachte in der Fig. 2 die Gleichheit der Strecken MP und PL, bezw. $M'P'$ und $P'L'$.



Denken wir uns jetzt auf diese Figur die vorhin betrachtete Rollenkoppel aufgesetzt, und zwar so, daß sich die Rolle R_1 im Punkte P, die Rolle R_2 im Punkte M befindet; dann wird R_1 offenbar zwangläufig auf der Kettenlinie entlangrollen, wenn wir Sorge tragen, daß der Punkt L, der ja in jeder Lage der Koppel (durch die Verlängerung der Strecke $\overline{MP}$ über P hinaus um sich selbst) *ideell bestimmt* ist, sich nur auf der Leitgeraden l bewegen kann. Dies gelingt nun sehr

einfach dadurch, daß wir in der Weise, wie es die Fig. 3 andeutet, mittels eines Storchschnabels für den Punkt L eine *kinematische Realisierung* schaffen, und dann den in diesem Punkte befindlichen Fahrstift auf der Geraden l entlang führen.

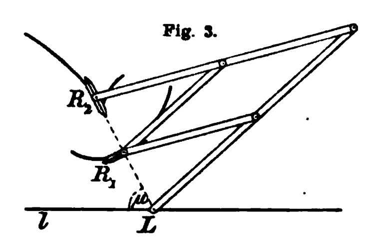


Fig. 3.

In dieser Vereinigung unserer Rollenkoppel mit dem Storchschnabel haben wir daher einen Apparat, der mit seiner Rolle R_1 *unsere Kettenlinie beschreibt.* Von einer beliebigen Anfangslage aus erhalten wir stets Kettenlinien, sobald wir den Fahrstift in L auf einer Geraden bewegen. Und der Apparat gestattet offenbar im Prinzip auch *jede* Kettenlinie zu zeichnen. Schreiben wir etwa die Leitlinie l und den Wert des Parameters a (Abstand des Scheitels von der Leitlinie) vor, so ergibt sich für die Anfangseinstellung des Apparates die Bedingung:

$$\varrho \sin^2 \mu = a,$$

worin ϱ den Abstand der Rollen $\overline{R_1 R_2}$ und μ den Winkel der geradlinigen Verbindung $\overline{R_2 L}$ mit der Leitlinie l (Fig. 3) bei der Einstellung bedeutet.

2. Die technische Ausführung des Katenographen.

Die Fig. 4 zeigt den Katenographen in fertiger Ausführung.[1]) Wir sehen zunächst den Storchschnabel mit seinen vier Gelenkpunkten A, B, C, D und seinen beiden freien Enden E, F; der Punkt B halbiert die Strecke $\overline{AE}$, D die Strecke $\overline{AF}$.

In den Gelenken bei A, B und D bewegt sich jedesmal der eine Stab zwischen zwei einander gegenüberstehenden Spitzenschrauben, die der andre Stab mittels eines Bügels trägt.

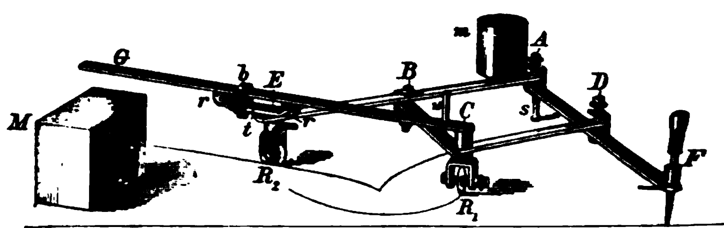
Das Gelenk bei C wird durch eine *drehbare vertikale Achse* gebildet, welche die hier zusammentreffenden Stäbe BC und DC durchbohrt. Diese Achse trägt an ihrem unteren Ende die Gabel, in der die scharfrandige Rolle R_1 läuft; am oberen Ende ist sie mit einer horizontalen Lenkstange CG starr verbunden, von der wir sogleich noch reden werden.

1) Der hier abgebildete Apparat ist nach den Angaben des Verf. von der „Mechanischen Werkstätte Spindler & Hoyer" in Göttingen mit Sorgfalt ausgeführt worden und funktioniert gut. Er war bereits auf dem *III. Internationalen Mathematikerkongreß* zu Heidelberg, im August 1904, ausgestellt und ist seither nur in einigen technischen Details abgeändert worden. (Wegen etwaiger Bestellungen wolle man sich an die genannte Werkstätte wenden.)

Im Punkte E hält der Storchschnabel ebenfalls eine *drehbare vertikale Achse.* Diese läuft an ihrem unteren Ende in eine Gabel mit der scharfrandigen Rolle R_2 aus; an ihrem oberen Ende trägt sie ein längliches horizontales Tischchen t, das seinerseits der Träger zweier kleiner *Laufrollen* rr ist. Diese Laufrollen besitzen eine gemeinsame vertikal gestellte Drehungsebene, die zugleich durch die Seele der Achse in E hindurchgeht.

Auf den Laufrollen rr liegt nun die Lenkstange CG mit einer an ihrer Unterseite befindlichen, von C bis G reichenden Rille auf. (Ein an dem Tischchen befestigter Bügel b bewirkt, daß die Laufrollen


Fig. 4. Der Katenograph.



überhaupt nicht aus der Rille herausspringen können). Infolgedessen realisiert die Lenkstange, bezw. ihre Rille, fortgesetzt die geradlinige Verbindung der Punkte C und E; und gleichzeitig hat auch das Tischchen relativ zu der geraden Linie CE stets dieselbe Orientierung, wie man auch den Storchschnabel bewegen mag. Mit der Lenkstange und dem Tischchen sind aber (wie schon gesagt) die Gabeln der beiden scharfrandigen Rollen bezüglich fest verbunden, und zwar (wie wir nun hinzufügen) so, daß die Drehungsebene der Rolle R_1 senkrecht zur Längsrichtung der Lenkstange CG orientiert ist, und die Ebene der Rolle R_2 mit der Ebene der erwähnten Laufrollen zusammenfällt. *Indem also die Lenkstange mit ihrer Rille auf den Laufrollen aufliegt, haben die Rollen R_1, R_2 in der Tat die gewünschte Orientierung und behalten sie in jeder Lage des Storchschnabels bei.*

In F befindet sich der Fahrstift, den man längs einer geraden Linie zu führen hat, wenn man den Apparat als Kettenlinienzeichner benutzen will. Dieser Fahrstift ist in einer mit dem Stabe AF verbundenen Hülse vertikal verschiebbar. Bei F wird infolgedessen der Apparat auf die Zeichenebene nicht gestützt. Er liegt vielmehr zunächst nur an den Stellen C und E mittels der Rollen R_1, R_2 auf. Um aber den Storchschnabel in horizontaler Lage zu halten, ist an dem Stabe AF eine kleine *Stütze* s angebracht, die bei Bewegung des Apparates über das Zeichenpapier hingleitet.

Zur Benutzung des Katenographen ist noch erforderlich, auf die Lenkstange bei dem Stift u (ein wenig seitlich von C) ein Gewicht M aufzusetzen (das wieder abgehoben wird, sobald der Apparat außer Tätigkeit ist). In der Fig. 4 erscheint es der besseren Sichtbarkeit der Details wegen abgehoben und an die Seite gerückt. Dieses Gewicht sorgt einerseits dafür, daß die Lenkstange mit ihrer Rille auf den Laufrollen rr fest aufliegt, wie es ja erforderlich ist (der Bügel b berührt dann die Lenkstange gar nicht). Andererseits aber gibt es den beiden Rollen R_1, R_2 diejenige Belastung, die sie zu ihrer richtigen Funktion nötig haben, d. h. wenn sie in das Zeichenpapier ein wenig einschneiden und stets nur in Richtung ihrer Drehungsebene rollen, nicht aber auf dem Papier irgendwie rutschen sollen.

Dabei hat die Änderung des Belastungsverhältnisses der beiden Rollen, welche bei Bewegungen des Apparates nach dem Hebelgesetz eintritt, ihren bestimmten Zweck. Benutzt man nämlich den Apparat als Kettenlinienzeichner, indem man den Fahrstift F längs einer Geraden führt, so erleidet die Rolle R_1, wenn sie verhältnismäßig weit vom Scheitel der Kettenlinie entfernt ist (also bei gespreiztem Storchschnabel), einen starken seitlichen Druck, sodaß durch eine größere Belastung der Rolle verhindert werden muß, daß sie rutscht. Die Rolle R_2 dagegen bedarf in dieser Lage einer besonders geringen Belastung.

Ein *kleines Gewicht* m ist auf der Stange AE befestigt; es verhindert, daß der Apparat, wenn er das Gewicht M trägt, allzuleicht um die Gerade EF umkippt.

Die Reibung in den Gelenken, in den Rollenlagern usw. ist durch sorgfältige mechanische Ausführung auf ein Minimum reduziert. Die Stütze s trägt unten eine hochglanzpolierte Stahlkuppe, die beim Gleiten auf dem Papier einen so geringen Reibungswiderstand findet, daß die Wirkung der scharfrandigen Rollen nicht beeinträchtigt wird.

Sollen übrigens die zu erzeugenden Kurven (die Kettenlinien sowie ihre Evoluten) von den scharfrandigen Rollen nicht bloß in das Zeichenpapier eingedrückt, sondern auch farbig aufgezeichnet werden, so betupft man vor dem Gebrauch des Apparates den Rand der Rollen (mittels eines Korkes oder eines Stempelkissens) mit ein wenig Stempelfarbe, — ein praktisches Verfahren, das sauber gezeichnete Kurven liefert.

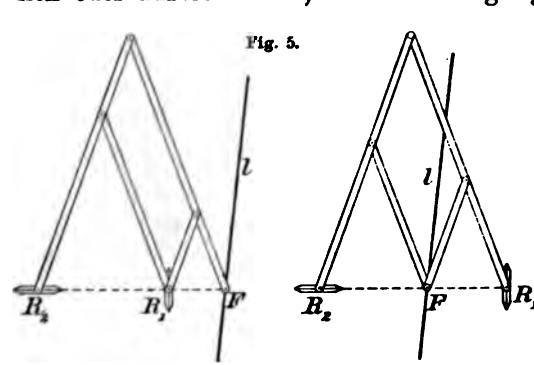
3. Hinweis auf weitere Anwendungen des obengenannten Prinzips.

Im vorhergehenden haben wir das unter 1 angegebene Prinzip der Rollenkoppel in ganz spezieller Durchführung angewendet. Wir haben

unsere Rollenkoppel mit einem Storchschnabel verbunden, bei dem der Abstand der beiden Rollen R_1, R_2 durch den Fahrstift F äußerlich in dem konstanten Verhältnis geteilt wird

$$\varkappa = \frac{\overline{R_1 F}}{\overline{F R_2}} = -\tfrac{1}{2}.$$

In ähnlicher Weise läßt sich nun jeder beliebige Teilpunkt F, der den Abstand der Rollen R_1, R_2 in konstantem Verhältnis $\varkappa$ innerlich oder äußerlich teilt, mittels eines geeigneten Storchschnabels kinematisch realisieren (Fig. 5). Führt man an einem derartigen, hier im Schema angegebenen Apparat den Punkt F längs einer geraden Linie, so beschreibt die Rolle R_1 eine sog. Ribaucoursche Kurve[1]), d. h. eine Kurve von der Eigenschaft: daß in jedem Punkte ihr Krümmungsradius ϱ proportional ist dem Stück n der Normalen, das zwischen der Kurve und einer festen Geraden l liegt.



In der zweiparametrigen Schar der Ribaucourschen Kurven — kongruente Kurven je nur als eine einzige gezählt — sind außer der einparametrigen Schar der Kettenlinien ($\varkappa = -\frac{1}{2}$) bekanntlich auch die einparametrige Schar der gemeinen Parabeln ($\varkappa = -\frac{1}{3}$) und die der gemeinen Zykloiden ($\varkappa = +1$) enthalten. Auf Grund des angegebenen Prinzips läßt sich also wie der Katenograph ebenso ein Parabolograph und ein Zykloidograph konstruieren. Man könnte auch mittels eines verstellbaren Storchschnabels einen Universalapparat für beliebige Ribaucoursche Kurven herstellen. Nur der geringeren Einfachheit der technischen Ausführung wegen wurde darauf verzichtet. —

Unser Prinzip der Rollenkoppel gestattet indes noch weitere Ausblicke. Das Charakteristische der Rollenkoppel war, daß der Abstand der Rollen fortgesetzt den Krümmungsradius ϱ der von R_1 durchlaufenen Kurve realisierte. Durch den Storchschnabel wurde der Krümmungsradius mit einer anderen Ortsfunktion n der zu erzeugenden

1) G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven; Theorie und Geschichte. Deutsche Ausgabe von F. Schütte. Leipzig (Teubner) 1902, S. 521—530. Auch *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* III 3 D 4: G. Scheffers, Besondere transzendente Kurven (1903), 26f.

Kurve in einfache Verbindung gesetzt. Die Idee wird also sein, weitere solche Ortsfunktionen von Kurven heranzuziehen, die sich ebenfalls in bequemer Weise kinematisch realisieren lassen.

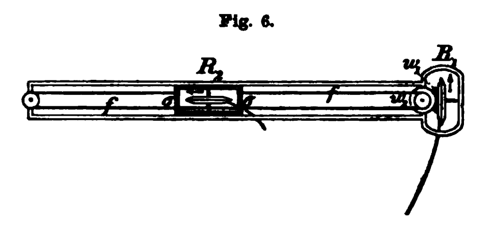
Dies ist z. B. mit der Bogenlänge s der Fall. Sie wird an der Rollenkoppel ohne weiteres durch den Drehungswinkel der Rolle R_1 (und ihren Radius) gegeben. Setzt man daher ϱ und s in eine bestimmte kinematische Beziehung, so gewinnt man einen Apparat zur Erzeugung aller der Kurven, für welche diese Abhängigkeit

$$\varrho = f(s)$$

charakteristisch ist. Hieraus erhellt, daß man auf diese Weise *kinematische Erzeugungsapparate für alle solche Kurven herstellen kann, deren natürliche Gleichung hinreichend einfach ist, bezw. sich durch einfache Mechanismen kinematisch darstellen läßt.*

Als einfachster Spezialfall sei die logarithmische Spirale angeführt, für welche $\varrho = \alpha s + \beta$ ist (α, β = const.). Wir können diese Abhängigkeit etwa so realisieren (Fig. 6).[1] Die Drehung der Rolle R_1 um ihre horizontale Achse wird durch Anwendung zweier Winkelräder $w_1 w_2$ in eine Drehung um eine vertikale Achse verwandelt; und diese Drehung übersetzt sich dann einfach mittels eines Fadens ff in die Hin- und Herbewegung eines Schlittens $\sigma\sigma$, der die Rolle R_2 trägt. Der Schlitten wird in zwei Gleitschienen so geführt, daß die Ebene der Rolle R_2 beständig die Achse der Rolle R_1 in sich enthält. Ein nach diesem Schema konstruierter Apparat zeichnet offenbar logarithmische Spiralen von einem bestimmten α.

Fig. 6.



Mit diesen Andeutungen mögen wir uns hier begnügen.

Göttingen, Ostern 1905.

---

1) Freilich ist zu bemerken, daß der von Abdank-Abakanowicz (Die Integraphen usw., S. 8f.) angegebene Apparat zur Erzeugung logarithmischer Spiralen wesentlich einfacher erscheint.

Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion.

Von A. Timpe in Göttingen.

Einleitung.

Die elastischen Probleme, die in der vorliegenden Arbeit behandelt werden, sind gelöst auf Grund der folgenden fundamentalen Voraussetzungen:

1. Die Körper, mit deren Spannungszustand wir uns beschäftigen, sind vollkommen isotrop, ihr elastisches Verhalten wird bestimmt durch das Hookesche Gesetz.

2. Hinsichtlich der Verschiedenheit der wirklichen und der theoretischen Randbedingungen gilt das von de Saint-Venant aufgestellte und von Boussinesq noch mehr begründete Prinzip: „Zwei Systeme von Kräften, deren Angriffspunkte über ein kleines Stück ω der Begrenzung eines Körpers verteilt sind und die dieselbe Resultante besitzen, rufen in ihm, von „lokalen Störungen“ in der Nähe von ω abgesehen, merklich den gleichen Spannungszustand hervor.“

3. Hierzu tritt noch die schon in dem Titel der Arbeit zum Ausdruck gebrachte wichtige Beschränkung, daß es sich um sogenannte ebene Systeme[1]) handeln soll.

Was die praktische Brauchbarkeit der erhaltenen Lösungen insbesondere im Hinblick auf technische Anwendungen (Balken- und Gewölbeprobleme usw.) anbetrifft, so sind, von der Beschränkung auf das „ebene Problem“ abgesehen, folgende Umstände wohl im Auge zu behalten:

1. Vom Eigengewicht, das jedenfalls bei Gewölben, Bogenträgern usw. für den Spannungszutand von primärer Bedeutung ist, ist überall abstrahiert.

2. Die Widerlager sind nicht, wie bei manchen Autoren üblich, als starr behandelt, sondern es ist die Fiktion gemacht, daß (etwa durch Symmetriebetrachtungen und ähnliche Überlegungen) die auf

---

1) Vgl. die Anmerkung S. 5.

die einzelnen Widerlager übertragenen Kräfte bekannt sind. Nimmt ein Widerlager nur ein kleines Stück der Begrenzung des ebenen Systems ein, so genügt, dem Saint-Venantschen Prinzip zufolge, die Kenntnis der Resultante besagter Kräfte. — Immerhin ist im Auge zu behalten, daß in der Regel die Bedingung des Gleichgewichts in der Annahme der einzelnen Resultanten noch Spielraum läßt; bei den gegebenen speziellen Lösungen z. B. handelt es sich also nur um eine statisch mögliche Beanspruchung der Widerlager, von der zweifelhaft bleibt, ob sie in der Natur verwirklicht ist.

Die Beschränkung auf das „ebene Problem" ist für die anzuwendende Methode von entscheidender Bedeutung: sie ermöglicht die Einführung der Airyschen Spannungsfunktion und damit die Zurückführung aller Probleme auf die Integration einer einzigen linearen Differentialgleichung. Diese Methode, die merkwürdigerweise noch ziemlich unbekannt zu sein scheint und auf die ich von meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. F. Klein hingewiesen wurde, erweist sich als äußerst fruchtbar. Insbesondere gestattet sie, wie J. H. Michell[1]) gelehrt hat, ähnlich einem bekannten Verfahren der Elektrizitätslehre, die Heranziehung des Prinzips der Inversion, vermöge dessen aus jeder erhaltenen Lösung ohne weiteres neue gewonnen werden können. — Um den Gang der Entwicklungen nicht zu häufig mit Erläuterungen unterbrechen zu müssen, erscheint es angezeigt, in einem ersten, hauptsächlich referierenden Teil der Arbeit einige für die Airysche Funktion in Betracht kommenden Tatsachen zusammen zu stellen. Im weiteren verweise ich dabei auf die Abhandlung von F. Klein und K. Wieghardt, „Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme ...." im Archiv. d. Math. u. Phys., 8. Bd., 1. u. 2. Heft. (1904.)

I. Teil.

Eigenschaften der Airyschen Funktion.

§ 1. Einführung der Spannungsfunktion; Differentialgleichung.

In der Elastizitätstheorie ist es Brauch, auch dann, wenn die Randbedingungen sich auf die Kräfte beziehen, nicht mit den Spannungen, sondern mit den Verzerrungen zu operieren. Der Grund hierfür dürfte darin zu suchen sein, daß sich bei dieser Methode durch Einführung der Verschiebungen die Zahl der Variabeln verringern läßt.

---

1) „The inversion of plane stress", Lond. M. S. Proc. 34 (1901/02).

Beim „ebenen Problem"[1]) bietet sich nun aber, wie zuerst Airy[2]) gezeigt hat, auf dem andern Wege eine viel hervorragendere Vereinfachung dar, die auf der eleganten Darstellung der drei Spannungskomponenten P, Q, U[3]) durch eine einzige Funktion F, die von Maxwell[4]) sogenannte Airysche Spannungsfunktion, beruht. In der Tat folgt aus den statischen Gleichungen bei fehlender Massenkraft:

$$(1)\qquad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

ohne weiteres:

$$(2)\qquad P = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2};\quad Q = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2};\quad U = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Kombiniert man nun (2) mit den „stress-strain-Gleichungen"

$$(3)\qquad \begin{aligned} P &= (\lambda' + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \\ Q &= \lambda' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda' + 2\mu)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}, \\ U &= \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \end{aligned}$$

so ergibt sich:

$$(4)\qquad \Delta\Delta F = 0,$$ [5])

wo $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. — Nun gehorcht bekanntlich die Verrückung w der senkrecht zu ihrer Ebene gebogenen Platte derselben Differential-

---

1) Das „ebene Problem" liegt bekanntlich in zwei wohl zu unterscheidenden Fällen vor:
a) beim unendlich langen Zylinder, der jede seiner Erzeugenden entlang gleichmäßig zu ihr senkrecht beansprucht wird;
b) bei der unendlich dünnen Scheibe.

Im Fall a) gelten die Gl. (3) für $\lambda' = \lambda$, im Falle b) für $\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$.

2) Brit. Assoc. Report, Cambridge, 1862, S. 82 und Philos. Transactions 1863, S. 49.

3) In der Bezeichnungsweise schließe ich mich an den „Treatise on the Theory of Elasticity" von A. E. H. Love an.

4) „Scientific Papers", vol. II, p. 102. Zu den Maxwellschen Untersuchungen vergleiche man den bereits zitierten Aufsatz von F. Klein und K. Wieghardt.

5) J. H. Michell, „On the direct determination of stress in an elastic solid", Lond. M. S. Proc. 31 (1899).

gleichung. Somit gewinnen wir mit Hilfe der Airyschen Funktion ein äußerst anschauliches Bild von dem in unserem ebenen System herrschenden Spannungszustande

Unterwerfen wir eine Lamelle den für F in einem bestimmten Falle geltenden Randbedingungen, so biegt sie sich von selbst zu der der Airyschen Fläche $z = F(xy)$ eignenden Form; die Krümmungen an einer Stelle der Lamelle repräsentieren die Spannungen in dem entsprechenden Punkte des ebenen Systems. Außerdem stimmt die in letzterem herrschende potentielle Energie bis auf einen konstanten Faktor überein mit der (gleichsam fühlbaren) Energie der Biegung an der entsprechenden Stelle der Lamelle.

Letzteres folgt ohne weiteres durch Vergleich der betreffenden aus Rayleighs „Theory of Sound" und A. E. H. Loves „Treatise on the Theory of Elasticity" zu entnehmenden Ausdrücke bei Berücksichtigung der Relationen (2).

§ 2. Die Lösungen der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ als Spannungsfunktionen.

Wie wir gesehen haben, ist die Lösung des allgemeinen ebenen Spannungsproblems gleichbedeutend mit der Integration der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$. Mit der Theorie dieser Gleichung und ihren Anwendungen beschäftigt sich eine umfangreiche Literatur, von der im Anhang eine Zusammenstellung gegeben ist, auf welche die im folgenden in Klammern beigefügten Nummern Bezug nehmen. Es wird gezeigt (Nr. 15, Nr. 12), daß die in einem beliebigen Gebiete überall reguläre Lösung von $\Delta\Delta F = 0$ eindeutig bestimmt ist, sofern auf dem Rande die Werte von F und $\frac{\partial F}{\partial n}$ vorgeschrieben sind. In unserm Falle lassen sich nun tatsächlich die Randwerte $\overline{F}$ und $\overline{\frac{\partial F}{\partial n}}$ aus den gegebenen Komponenten G und H der am Rande angreifenden Kräfte ermitteln; nach Michell (Nr. 17) ist:

$$(5)\quad \begin{aligned} \overline{F} &= \int_0^s \left(G_0^s \cdot \frac{dy}{ds} - H_0^s \cdot \frac{\partial x}{ds}\right) ds + \alpha x + \beta y + \gamma, \\ \overline{\frac{\partial F}{\partial n}} &= G_0^s \cdot \frac{dx}{ds} + H_0^s \cdot \frac{dy}{ds} - \alpha \frac{dy}{ds} + \beta \frac{dx}{ds}, \end{aligned}$$ [1])

1) Zur Bestimmung der Konstanten α, β, γ an jedem Rande dienen drei Bedingungen, die Michell (Nr. 17) aus der Forderung der Eindeutigkeit der Verschiebungen ableitet.

wo s die Bogenlänge und $G_0^s = \int_0^s G ds$; $H_0^s = \int_0^s H ds$. Jedoch ist die Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ allgemein erst für eine beschränkte Anzahl von Gebieten gelöst, nämlich für den Kreis (Nr. 1, Nr. 11), den Kreisring (Nr. 6, Nr. 17), die durch eine Gerade begrenzte Halbebene (Nr. 1, Nr. 12) und für die durch Polynome auf den Kreis konform abbildbaren Gebiete, wie z. B eine Klasse von Epizykloiden (Nr. 4, Nr. 5). Wollen wir darüber hinaus die Methode der Airyschen Funktion bei ebenen Spannungsproblemen anwenden, so sind wir darauf angewiesen, gewissermaßen einen umgekehrten Weg einzuschlagen, nämlich: bekannte partikuläre Lösungen der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ (und deren gibt es eine ziemlich große Zahl) als Spannungsfunktionen zugrunde zu legen und zu versuchen, ob bei geeigneter Kombination derselben sich Randwerte erzielen lassen, die den in der Praxis vorkommenden Belastungsfällen möglichst genau entsprechen. Man könnte diesen Weg, als Gegenstück zu der semiinversen Methode de Saint-Venants bei seinem bekannten Balkenproblem, geradezu als die inverse Methode bezeichnen.

Mehr oder minder versteckte Anwendungen derselben liefern bereits die Arbeiten Michells „Elementary Distributions of plane Stress" (Nr. 18) und „The Inversion of plane Stress" (Nr. 19); den dort behandelten interessanten Spannungsverteilungen liegen Airysche Funktionen zugrunde, die im Gebiete selbst eine Singularität aufweisen und so zu „konzentrierten" Kräften[1]) Anlaß geben. — Allgemein sind als Lösungen der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ bezw. als für die Definition von Spannungszuständen geeignete Funktionen zu nennen:

1. Die Grundlösungen: const., $\lg r$, r^2, $r^2 \lg r$ und die daraus abgeleiteten „zweiten Potentiale" $\int\int \varrho(x_1, y_1) \cdot \frac{r^2}{4}(1 - \lg r) dx_1 dy_1$ an den Stellen von der Dichte $\varrho = 0$ (Nr. 16), analog natürlich alle logarithmischen Potentiale.

2. Die Funktionen von der Form $(ax + by) \cdot \varphi(x, y)$ oder $(x^2 + y^2) \cdot \varphi(x, y)$, wo $\varphi(x, y)$ eine beliebige Lösung von $\Delta\varphi = 0$ (Nr. 6).

1) Man spricht von einer konzentrierten Kraft in einem Punkte, wenn daselbst die Spannung bezogen auf die Längeneinheit unendlich groß, ihre Resultante aber endlich ist. Für die physikalische Realisierung hat man natürlich die Umgebung eines solchen Punktes auszusondern bezw. durch eine starre Füllung zu ersetzen.

3. Die trigonometrischen Lösungen (Nr. 20)

$$r^n \cos n\theta,\ r^n \sin n\theta;\ r^{n+2}\cos n\theta,\ r^{n+2}\sin n\theta;$$
$$\frac{\cos n\theta}{r^n},\ \frac{\sin n\theta}{r^n};\ \frac{\cos n\theta}{r^{n-2}},\ \frac{\sin n\theta}{r^{n-2}}.$$

(bezw. die entsprechenden einfachen rationalen Funktionen von x, y), sowie θ, $r^2\theta$ (Nr. 19). Wir notieren beiläufig, daß umgekehrt jede Lösung von $\varDelta\varDelta F = 0$ sich darstellen läßt:

1. als Summe eines logarithmischen und eines zweiten Potentials;
2. in der Form $(ax + by)\varphi(x, y) + \psi(x, y)$
   oder $(x^2 + y^2)\cdot\varphi(x, y) + \psi(x, y)$

wo $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ Lösungen von $\varDelta\varphi = 0$ bezw. $\varDelta\psi = 0$.

3. Demgemäß im Kreise und Kreisringe durch trigonometrische Reihen.

§ 3. Inversion von Spannungsverteilungen.

Von großer Bedeutung ist schließlich noch die von Levi-Civita (Nr. 14) und Michell (Nr. 19) bewiesene Tatsache, daß die Differentialgleichung $\varDelta\varDelta F = 0$ gegenüber der Substitution

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2};\ y' = \frac{y}{x^2 + y^2};\ F' = \frac{F}{x^2 + y^2} \tag{6}$$

invariant ist, daß man also aus jeder Airyschen Funktion F vermöge obigen Inversionsprozesses eine neue Spannungsfunktion F' ableiten kann. Wie Michell weiter beweist, ist der Zusammenhang der beiden durch F und F' definierten Spannungszustände äußerst einfach.

Legt man nämlich Polarspannungskomponenten $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{U}$ zugrunde, so gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} && \text{(radiale Normalspannung)},\\
\mathfrak{Q} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} && \text{(peripherische ")},\\
\mathfrak{U} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) && \text{(Schubspannung)}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Die radiale Verschiebung $\mathfrak{u}$ und die peripherische Verschiebung $\mathfrak{v}$ sind mit den Spannungen durch die Formeln verknüpft:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= (\lambda' + 2\mu)\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial r} + \lambda'\cdot\left(\frac{\mathfrak{u}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \theta}\right),\\
\mathfrak{Q} &= \lambda'\cdot\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial r} + (\lambda' + 2\mu)\cdot\left(\frac{\mathfrak{u}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \theta}\right)\\
\mathfrak{U} &= \mu\cdot\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \theta} - \frac{\mathfrak{v}}{r}\right).
\end{aligned} \tag{8}$$

Es zeigt sich nun, daß die aus der Funktion F' abgeleiteten Spannungen $\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}', \mathfrak{U}'$ mit den $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{U}$ durch die Formeln zusammenhängen:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{P}' &= r^2 \cdot \mathfrak{P} + 2M, \\
\mathfrak{Q}' &= r^2 \cdot \mathfrak{Q} + 2M, \\
\mathfrak{U}' &= -r^2 \cdot \mathfrak{U}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Hier hat $M = F - r\frac{\partial F}{\partial r} = -r^2 \cdot \left(F' - r'\frac{\partial F'}{\partial r'}\right)$ den Wert des resultierenden Moments der Spannungen, die längs einer beliebigen von einem festen Punkte bis zu (r, θ) erstreckten Kurve herrschen. — In Worten lautet (9):

Sieht man von einer hydrostatischen (d. h. an einer Stelle allseitig gleichen) Spannung $2M$ ab, so verhält sich der stress bei der Inversion invariant: auf korrespondierende Linienelemente ds und $ds' = \frac{ds}{r^2}$ wirkt die gleiche Spannung in korrespondierender Richtung; die Spannungstrajektorien gehen in Spannungstrajektorien über.

Zudem wird bewiesen:

Ein gleichförmig gespannter, z. B. spannungsfreier Rand geht bei der Inversion stets wieder in einen gleichförmig gespannten Rand über.

Wir werden von diesen Sätzen im zweiten Teil der Arbeit eine Reihe wichtiger Anwendungen machen.

II. Teil.

Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen.

1. Kapitel: Der gerade Streifen und der von sich berührenden Kreisen begrenzte krumme Streifen.

A. Die Hauptlösungen.

Bemerkung. Als Hauptlösungen für einen Streifen bezeichnen wir jene Spannungsverteilungen, bei welchen nur seine beiden Schmalseiten von äußeren Kräften beansprucht werden, während die beiden Langseiten frei sind.[1])

1) Von einer „uneigentlichen“ Hauptlösung wollen wir beim krummen Streifen sprechen, wenn die Langseiten je unter gleichmäßiger Spannung stehen.

§ 4. Zug oder Druck an den Schmalseiten.

a) Die Spannungsfunktion

(1) $$F = \frac{\varkappa}{2} \cdot y^2$$

liefert in kartesischen Komponenten:

(1') $$P = \varkappa, \quad Q = 0, \quad U = 0.$$

Dies entspricht dem an den Schmalseiten $x = a$ und $x = -a$ gleichförmig auf Zug oder Druck beanspruchten geraden Streifen. (Fig. 1.)

Als einfachste Verallgemeinerung sei erwähnt:

(2) $$F = \frac{\varkappa}{2} y^2 + \frac{\varkappa'}{2} x^2, \quad \mathfrak{P} = \varkappa, \quad \mathfrak{Q} = \varkappa', \quad \mathfrak{U} = 0.$$

Für $\varkappa = \varkappa'$ erhalten wir den Fall der gleichmäßigen Spannung $\varkappa$.

b) Wir wollen nun den durch (1) definierten Spannungszustand invertieren. Bei Anwendung von Polarkoordinaten erhält man offenbar:

(3) $$F' = \frac{\varkappa}{2} \sin^2 \theta';$$

(3') $$\mathfrak{P}' = \frac{\varkappa \cos 2\theta'}{r'^2}, \quad \mathfrak{Q}' = 0, \quad \mathfrak{U}' = \frac{\varkappa}{2} \frac{\sin 2\theta'}{r'^2}.$$

Spannungstrajektorien sind jetzt (vgl. § 3) die aus den Geraden $y = \text{const.}$ und $x = \text{const.}$ hervorgegangenen Kreisscharen η und ξ, die die Achse $y = 0$ bez. $x = 0$ in O zur gemeinsamen Tangente haben; längs jedes dieser Kreise herrscht konstante Spannung. Haben z. B. die als Begrenzung gewählten η-Kreise 1 und 2 die Durchmesser d_1 und d_2, so wirkt normal auf ihnen die Spannung $-\frac{\varkappa}{d_1^2}$ bezw. $-\frac{\varkappa}{d_2^2}$. Wir können nun durch Überlagerung einer konstanten Spannung $\frac{\varkappa}{d_2^2}$ den Kreis 2 spannungsfrei machen; die Lösung ist dann:

Fig. 1.

(4) $$F = \frac{\varkappa}{2}\left(\sin^2\theta' + \frac{r'^2}{d_2^2}\right);$$

$$\mathfrak{P}' = \frac{\varkappa\cos 2\theta'}{r'^2} + \frac{\varkappa}{d_2^2},$$

(4') $$\mathfrak{Q}' = \frac{\varkappa}{d_2^2},$$

$$\mathfrak{U}' = \frac{\varkappa\sin 2\theta'}{2r'^2}.$$

Die Beanspruchung des Kreises 1 ist pro Längeneinheit:

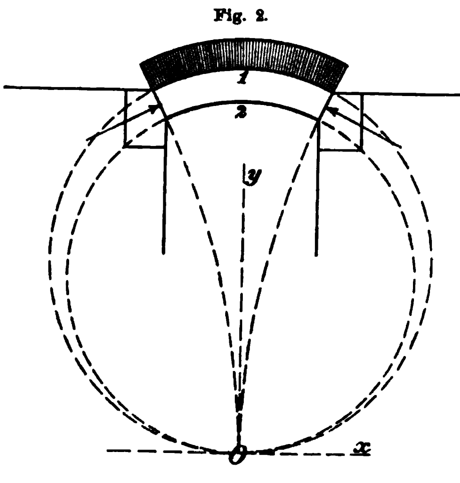
(5) $$W = \varkappa\left(\frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{d_1^2}\right).$$

Wählen wir rechts und links als Begrenzung Stücke von zwei (symmetrischen oder unsymmetrischen) ξ-Kreisen, so üben diese auf ihre Widerlager pro Längeneinheit die normal gerichtete Kraft

(6) $$D = \frac{\varkappa\cos 2\theta'}{r'^2} + \varkappa\left(\frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_1^2}\right)$$

aus, wo r', θ' sich auf die auf 1 gelegene Ecke beziehen. Damit haben wir die Lösung für einen krummen Streifen, der längs seiner einen Langseite senkrecht zu ihr gleichmäßig gespannt wird (Fig. 2). — Eine interessante Ausartung erhalten wir, wenn wir als Kreis 1 die X-Achse wählen und aus dem von 1 und 2 begrenzten Gebiet an der Einschnürungsstelle O ein Stück herausschneiden. Offenbar wird dann in O eine **konzentrierte** Kraft $K = \frac{\varkappa}{d_2}$ übertragen (wovon man sich am einfachsten durch Zurückgehen auf den Parallelstreifen überzeugt). Nehmen wir den Fall, daß Kreis 2 spannungsfrei ist, die X-Achse aber eine gleichförmige vertikale Last W trägt, so gelten die Gleichungen (4), (4'), (6) für $d_1 = \infty$:

Fig. 2.



$$\mathfrak{P}' = W\left(1 + \frac{d_2^2}{r'^2}\cdot\cos 2\theta'\right),$$

(7) $$\mathfrak{Q}' = W,$$

$$\mathfrak{U}' = \frac{W}{2}\cdot\frac{d_2^2}{r'^2}\cdot\sin 2\theta';$$

$$(7')\qquad D = W\left(1 + \frac{d_2^2}{l^2}\right),$$

wenn $2l$ die Spannweite auf der X-Achse. Die zugehörigen radialen und peripherischen Verschiebungen sind:

$$(8)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{u} &= \frac{W}{(2\lambda' + \mu)}\left(r' - \frac{\lambda' + 2\mu}{2\mu}\cdot\frac{d_2^2}{r'}\cdot\cos 2\theta'\right),\\ \mathfrak{v} &= \frac{W}{4\mu}\cdot\frac{d_2^2}{r'}\cdot\sin 2\theta'. \end{aligned}$$

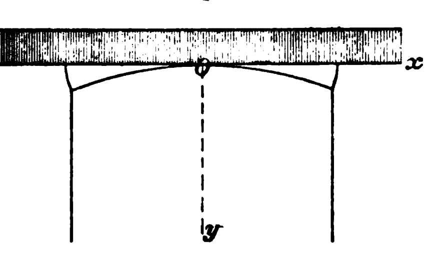


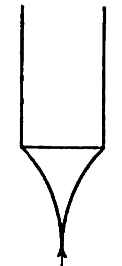
Fig. 3.

Diese Lösung entspricht in etwa einem vollwandigen Bogenträger mit Scharnier, der eine gleichmäßige Vertikallast W trägt (Fig. 3). Die Kämpferfugen sind so geschnitten, daß in ihnen keine Schubspannungen entstehen. Schneiden wir dagegen gerade und vertikal im Abstand $+l$ und $-l$ ab, so werden die Reaktionen:

$$(9)\qquad \begin{aligned} (xx) &= W\cdot\left[1 + \frac{d_2^2}{l^2}\cdot\cos^2\theta'\cdot(\cos^2\theta' - 3\sin^2\theta')\right],\\ (xy) &= \frac{W}{2}\frac{d_2^2}{l^2}\cos^2\theta'\cdot\sin 4\theta'. \end{aligned}$$

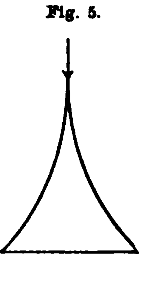
Endlich möge noch erwähnt werden, daß damit zugleich das Problem der „geschärften[1]) Schneide" (Fig. 4) erledigt ist. In der Tat, wenn wir den Parallelstreifen invertieren, der von den Geraden $y = \frac{1}{d^2}$ und $y = -\frac{1}{d^2}$ begrenzt wird, und sodann durch Überlagerung der gleichförmigen Spannung $\frac{\varkappa}{d_2^2}$ die aus jenen hervorgegangenen Kreise spannungsfrei machen, so werden wir auf dieselbe Lösung geführt.

Fig. 4.



Angenähert läßt sich unsere Formel natürlich auch für Bockgerüste mit schmaler First (Fig. 5) usw. verwenden. Die auf die Spitze wirkende Kraft $K = \frac{2\varkappa}{d_2}$ bewirkt eine Reaktion des Bodens vom Betrage:

Fig. 5.



$$\text{Normalreaktion} = \frac{K}{2d_2}\left[1 + \frac{d_2^2}{l^2}\cos^2\theta'(\cos^2\theta' - 3\sin^2\theta')\right],$$

$$\text{Schubkraft} = \frac{K}{4}\frac{d_2}{l^2}\cos^2\theta'\sin 4\theta',$$

1) Bezüglich der konvexen und der geraden Schneide vgl. Michell (Nr. 18).

wo die Normalreaktion jedenfalls solange mit K gleichen Zeichens ist als $\theta' < 30^0$.

§ 5. Reine Biegung des geraden Streifens und Inversion derselben.

a) Die Spannungsfunktion

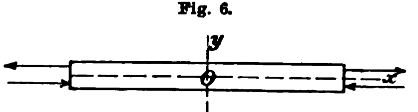
(10) $$F = \frac{\varkappa}{6} y^3$$

liefert in kartesischen Komponenten:

(10′) $$P = \varkappa y, \quad Q = 0, \quad U = 0.$$

Nehmen wir einen von den Geraden $y = +b$ und $y = -b$ begrenzten Streifen, so resultiert über jeden Querschnitt die Kraft 0 und das konstante Moment $\mathsf{M} = \frac{2}{3}\varkappa b^3$. Demnach haben wir den Fall der reinen Biegung des geraden Streifens vor uns (Fig. 6); es gilt das lineare Spannungsgesetz, d. h. das in der technischen Literatur so bezeichnete Gesetz, daß die Normalspannungen über einen Querschnitt linear verteilt sind. Die Verschiebungen $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ sind wieder nach Einsetzen von (10′) in die stress-strain-Gleichungen durch einfache Quadraturen zu berechnen. Nehmen wir die beiden Geraden $y = c + b$ und $y = c - b$ als Begrenzung, so kommt zu dem konstanten Moment M noch eine in der Mittellinie ($y = c$) wirkende Resultante $K = 2\varkappa \cdot bc$ hinzu.

Fig. 6.



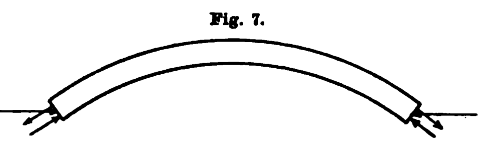
b) Wir führen nun Polarkomponenten ein und invertieren den durch (10) bestimmten Spannungszustand:

(11) $$F' = \frac{\varkappa}{6} \cdot \frac{\sin^3\theta'}{r'};$$

(11′) $$\mathfrak{P}' = \frac{\varkappa}{3r'^3}(3\sin\theta' \cdot \cos^2\theta' - 2\sin^3\theta'),$$
$$\mathfrak{Q}' = \frac{\varkappa}{3r'^3} \cdot \sin^3\theta',$$
$$\mathfrak{U}' = \frac{\varkappa}{r'^3}\sin^2\theta' \cdot \cos\theta'.$$

Spannungstrajektorien sind natürlich wieder die beiden Kreisscharen ξ und η, und zwar findet man leicht, daß auf den η-Kreisen mit den Durchmessern d die konstanten Spannungen $-\frac{8}{3}\frac{\varkappa}{d^3}$ herrschen. Somit können wir (vgl. § 4, b) das Problem des etwa auf der Oberseite **gleichmäßig**

beanspruchten krummen Streifens lösen, wenn dieser an den Schmalseiten durch ein Moment und eine jener Beanspruchung korrespondierende Kraft angegriffen wird; letztere wird im allgemeinen nicht mehr in die Mittellinie des Streifens fallen. Nun wollen wir diejenige Verteilung (4), (4′) überlagern, die mit der vorliegenden Lösung kombiniert den oberen Rand gleichfalls spannungsfrei macht. Wir erhalten dann die Lösung für den unbelasteten, auf Biegung beanspruchten krummen Streifen, an dessen Enden noch zwei gleiche und entgegengesetzte horizontale Kräfte angreifen. (Letzteres lehrt die statische Betrachtung). (Fig. 7)


Fig. 7.

(12) $$F' = \frac{\varkappa}{6}\frac{\sin^3\theta}{r'} + \frac{1}{3}\frac{\varkappa}{d_2^2} - \frac{\varkappa}{8}\frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2 (d_1 + d_2)}\left(\sin^2\theta' + \frac{r'^2}{d_2^2}\right);$$

$$\mathfrak{P}' = \frac{\varkappa}{8 r'^3}\cdot(3\sin\theta'\cos^2\theta' - 2\sin^2\theta') + \frac{2}{3}\frac{\varkappa}{d_2^2}$$

$$- \frac{2}{3}\varkappa\frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2 (d_1 + d_2)}\cdot\left(\frac{\cos 2\theta'}{r'^2} + \frac{1}{d_2^2}\right),$$

(12′) $$\mathfrak{Q}' = \frac{\varkappa}{8 r'^3}\sin^3\theta' - \frac{2}{3}\varkappa\frac{1}{d_1 d_2 (d_1 + d_2)},$$

$$\mathfrak{U}' = \frac{\varkappa}{r'^3}\sin^2\theta'\cos\theta' - \frac{\varkappa}{8}\frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2 (d_1 + d_2)}\cdot\frac{\sin 2\theta'}{r'^2}.$$

Die horizontalen Resultanten haben den Betrag:

(13) $$K = \frac{\varkappa}{6}\frac{(d_1 - d_2)^3}{d_1 + d_2}\frac{1}{d_1^2 d_2^2}.$$

Das Moment beträgt an der höchsten Stelle:

(14) $$\mathsf{M} = \frac{\varkappa}{12}\frac{(d_1 - d_2)^3}{d_1^2 d_2^2}.$$

Allgemein ist das Moment über einen Querschnitt gleich dem Produkte aus K und dem Abstand des Mittelpunktes von der X-Achse.

§ 6. Das de Saint-Venantsche Problem des geraden Streifens und Inversion desselben.

a) Ein an einem Ende $x = 0$ eingeklemmter Streifen[1]) von der Höhe $2b$ wird an der Stirnfläche $x = a$ mit der Kraft K belastet

1) Ein Streifen heißt im Punkte $x = y = 0$ eingeklemmt, wenn dort die Befestigungsbedingungen $u = v = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ erfüllt sind.

(Fig. 8). Die Airysche Funktion, die dem dadurch hervorgerufenen Spannungszustand entspricht, muß folgenden Bedingungen genügen: $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ müssen für $y = \pm b$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ muß für $x = a$ verschwinden. Man verifiziert, daß diese Bedingungen nebst der Differentialgleichung $\Delta \Delta F = 0$ erfüllt werden von

$$F = \varkappa \cdot (y^3 - 3b^2 y)(a - x)^2)\text{[1]}. \tag{15}$$

$$\begin{aligned} P &= 6\varkappa y (a - x), \\ Q &= 0, \\ U &= 3\varkappa (y^2 - b^2). \end{aligned} \tag{15'}$$

In der Tat sind der obere und untere Rand spannungsfrei; über jeden Schnitt $x =$ const. resultiert aus den Normalspannungen, für die das lineare Gesetz gilt, ein Moment $M = b^3 4\varkappa \cdot (a - x)$ und eine Vertikalkraft $K = -4b^3 \cdot \varkappa$. Nach dem Saint-Venantschen Prinzip realisiert eine am freien Ende angebrachte Kraft K den diskutierten Spannungszustand, wenn von lokalen Störungen abgesehen wird. — Führt man die gefundenen Werte der Spannungen in die stress-strain-Gleichungen ein, so erhält man durch bloße Quadraturen das Saint-Venantsche Resultat für die Verschiebungen, falls die Balkenbreite verschwindend klein genommen wird.

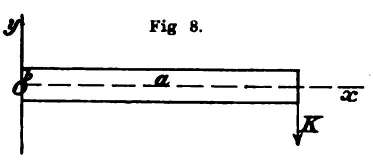


Fig 8.

b) Invertieren wir diese Lösung, so erhalten wir z. B. den Fall des auf Biegung beanspruchten krummen Streifens, dessen obere Kante gleichmäßig gespannt ist, während für die freie Stirnfläche sich eine im allgemeinen nicht in die Richtung der Mittellinie fallende Resultante ergibt. Kombinieren wir nun die uneigentlichen Hauptlösungen b) der §§ 4, 5 und 6 mit einer konstanten gleichmäßigen Spannung, so können wir für unseren krummen Streifen offenbar die (vier) Bedingungen aufstellen, daß die beiden Ränder eine vorgeschriebene gleichförmige Spannung erfahren und an der freien Stirnfläche das Moment einen bestimmten Betrag, die durch den Mittelpunkt gehende Resultante eine vorgeschriebene Richtung habe. Soll letztere auch eine bestimmte Größe haben, so müssen wir etwa die Stärke der gleichmäßigen Spannung des einen Randes disponibel lassen.

---

1) S. Abhandlung von F. Klein und K. Wieghardt (Nr. 9).

B. Die Lösungen für den stetig belasteten Streifen.[1])

Bemerkung: Bei den folgenden Lösungen ist das Augenmerk stets nur auf die Befriedigung der auf den beiden Langseiten vorgeschriebenen Bedingungen gerichtet. Die an den Schmalseiten geforderte Beanspruchung ist dann stets gemäß dem Saint-Venantschen Prinzip durch Überlagerung der Hauptlösungen zu realisieren. Beim geraden Streifen nämlich, der ev. eine vertikale Last trägt, können, wie die statische Betrachtung zeigt, nur folgende vier Elementarfälle hinsichtlich der Bedingungen an den Schmalseiten vorliegen:

a) zwei gleiche und entgegengesetzte horizontale Resultanten;

b) zwei gleiche und entgegengesetzte Momente;

c) zwei vertikale Resultanten gleicher Richtung;

d) eine vertikale Resultante einerseits, eine gleiche und entgegengesetzte vertikale Resultante nebst einem equilibrierenden Moment andererseits.

a) und b) lassen sich immer mit Hilfe der ersten und zweiten Hauptlösung regulieren, während c) und d) sowohl beim beiderseitig unterstützten als auch beim einseitig eingeklemmten Streifen durch die dritte Hauptlösung den gegebenen Bedingungen angepaßt werden. — Bei dem durch Inversion erhaltenen krummen Streifen müssen wir noch eine vierte uneigentliche Hauptlösung hinzunehmen, die aus der in § 7 a) gegebenen Lösung durch Inversion hervorgeht. Durch Heranziehung einer gleichmäßigen konstanten Spannung können wir dann in der Tat außer der Bedingung der Spannungsfreiheit der beiden Langseiten noch die drei Bedingungen an der einen Schmalseite: Resultante nach Richtung und Größe und gegebenes Moment, befriedigen. Wenn aber das superponierte Hauptlösungssystem für die Erfüllung der Vorschriften auf der einen Schmalseite Sorge trägt, so muß aus statischen Gründen am andern Ende die richtige Beanspruchung von selbst eintreten.

§ 7. Der gerade Streifen unter gleichmäßiger, linear oder quadratisch wachsender Belastung.

a) Die Funktion

$$F = \frac{\varkappa}{2} \cdot x^2(y^3 - 3b^2y - 2b^3) - \frac{\varkappa}{10} \cdot y^3(y^2 + 5a^2) \tag{16}$$

genügt der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ und definiert folgenden Spannungszustand:

1) In die Almansischen Arbeiten über Balkenprobleme, von denen ich kurz vor Drucklegung dieser Arbeit erfuhr, konnte ich leider nicht mehr Einsicht nehmen.

$$(16') \quad \begin{aligned} P &= 3\varkappa \cdot y(x^2 - a^2) - 2\varkappa y^3, \\ Q &= \varkappa \cdot (y^3 - 3b^2 y - 2b^3), \\ U &= -3\varkappa \cdot x(y^2 - b^2) \end{aligned}$$

Für $y = \pm b$ verschwindet U, für $y = -b$ ist $Q = 0$; für $y = +b$ wird $Q = -4\varkappa \cdot b^3$. Unsere Lösung entspricht also dem eine gleichmäßige Last

Fig. 9.

$$(17) \quad W = -4\varkappa \cdot b^3$$

pro Längeneinheit tragenden geraden Streifen (Fig. 9). Das lineare Spannungsgesetz, das in der technischen Literatur für alle Belastungsfälle als richtig angenommen wird, gilt nur noch in erster Annäherung, insofern das Zusatzglied in y von dritter Ordnung ist.

Die Verschiebungen werden:

$$(18) \quad \begin{aligned} u &= \frac{\varkappa}{4\mu(\lambda'+\mu)} \cdot \{xy[(\lambda'+2\mu)(x^2-3a^2)-(3\lambda'+4\mu)y^2+3\lambda' b^2]+2\lambda' b^3 x\}, \\ v &= \frac{\varkappa}{4\mu(\lambda'+\mu)} \cdot \Big\{(3\lambda'+2\mu)\frac{y^4}{3} - \tfrac{3}{2}y^2[(\lambda'+2\mu)b^2+\lambda'(x^2-a^2)] \\ &\quad -2(\lambda'+2\mu)b^3 y + \tfrac{3}{2}x^2[(\lambda'+2\mu)a^2+(3\lambda'+4\mu)b^2-(\lambda'+2\mu)\cdot\frac{x^2}{4}\Big\}, \end{aligned}$$

wobei als Befestigungsbedingungen $u = v = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ für $x = y = 0$ gewählt sind.

b) Die Funktion

$$(19) \quad F = \varkappa \cdot \left\{\tfrac{1}{6}x^3y^3 - \tfrac{1}{10}xy^5 - \tfrac{1}{2}b^2 \cdot x^3 y + \frac{b^4}{2} \cdot xy - \frac{b^3}{3} \cdot x^3\right\}$$

genügt der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ und definiert folgenden Spannungszustand:

$$(19') \quad \begin{aligned} P &= \varkappa \cdot xy(x^2 - 2y^2), \\ Q &= \varkappa \cdot x(y^3 - 3b^2y - 2b^3), \\ U &= \varkappa \cdot \{-\tfrac{3}{2}x^2(y^2 - b^2) + \tfrac{1}{2}(y^4 - b^4)\}. \end{aligned}$$

Für $y = \pm b$ verschwindet U. Für $y = -b$ wird $Q = 0$, für $y = +b$ wird $Q = -4\varkappa \cdot b^3 x$. Demnach stellt unsere Lösung den Spannungszustand in einem geraden Streifen dar, der eine stetige, linear wachsende Belastung trägt (Fig. 10). Wiederum gilt das lineare Spannungsgesetz nur in erster Annäherung, insofern das Zusatzglied in y von dritter Ordnung ist.

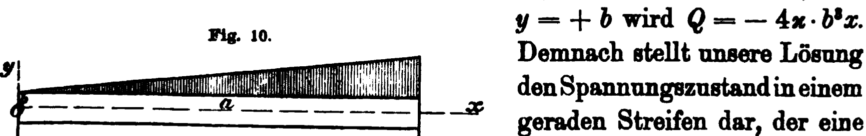


Fig. 10.

Die Verschiebungen werden:

$$u=\frac{\varkappa}{4\mu(\lambda'+\mu)}\cdot\Big\{(\lambda'+2\mu)\cdot x^2y\left(\tfrac{1}{4}x^2-y^2\right)-\lambda'\frac{x^2}{2}\left(y^3-3b^2y-2b^3\right)$$
$$+(5\lambda'+6\mu)\frac{y^5}{20}-2(\lambda'+\mu)\,b^4y+(\lambda'+2\mu)b^2y^2\left(b+\frac{y}{2}\right)\Big\},$$

(20)

$$v=\frac{\varkappa}{4\mu(\lambda'+\mu)}\cdot\Big\{(\lambda'+2\mu)xy\left(\tfrac{1}{4}y^3-\tfrac{3}{2}b^2y-2b^3\right)-\frac{\lambda'}{2}xy^2(x^2-y^2)$$
$$+(3\lambda'+4\mu)b^2\cdot\frac{x^3}{2}-(\lambda'+2\mu)\frac{x^5}{20}\Big\},$$

wobei wieder die Befestigungsbedingungen $u=v=\frac{\partial v}{\partial x}=0$ für $x=y=0$ gewählt sind.

c) Die Funktion

(21) $$F=\varkappa\cdot\left(\tfrac{1}{12}x^4y^3-\frac{b^2}{4}x^4y-\frac{b^3}{6}x^4-\tfrac{1}{10}x^2y^5+\frac{b^4}{2}x^2y+\frac{b^3}{6}y^4+\tfrac{9}{20}b^5x^2+\frac{b^2}{20}y^5+\tfrac{3}{420}y^7\right)$$

genügt der Differentialgleichung $\varDelta\varDelta F=0$ und definiert folgenden Spannungszustand:

$$P=\varkappa\cdot\left(\tfrac{1}{2}x^4y-2x^2y^3+2b^3y^2+b^2y^3+\tfrac{3}{10}y^5\right),$$

(21′) $$Q=\varkappa\cdot\left(x^2y^3-3b^2x^2y-2b^3x^2-\tfrac{1}{5}y^5+b^4y+\tfrac{9}{10}b^5\right),$$

$$U=\varkappa\cdot\{-x^3(y^2-b^2)+x(y^4-b^4)\}.$$

Für $y=\pm b$ verschwindet U; für $y=-b$ ist $Q=0$, für $y=+b$ erhalten wir

(22) $$Q=-4\varkappa\cdot b^3x^2+\tfrac{17}{10}\varkappa\cdot b^5.$$

Den konstanten Teil von Q können wir, wenn wir wollen, durch Überlagerung einer Lösung (16) zum Verschwinden bringen und haben dann die Lösung für einen geraden Streifen, der eine quadratisch wachsende stetige Belastung trägt (Fig. 11). Das lineare Spannungsgesetz kann noch als in erster Annäherung gültig bezeichnet werden, da das in y quadratische Glied mit dem Koeffizienten b^3 behaftet ist.

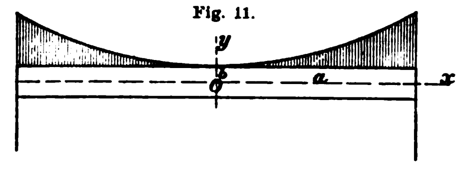


Fig. 11.

Die zu (22′) gehörigen Verschiebungen werden:

$$u=\frac{\varkappa}{4\mu(\lambda'+\mu)}\cdot\Big\{\tfrac{1}{10}(\lambda'+2\mu)x^5y-\tfrac{1}{3}(3\lambda'+4\mu)x^3y^3+\lambda'b^2x^3\left(y+\tfrac{2}{3}b\right)$$

(23) $$+\left[\tfrac{1}{10}(5\lambda'+6\mu)\cdot y^5+(\lambda'+2\mu)\cdot b^2y^2(y+2b)-\lambda b^4y-\tfrac{9}{10}\lambda b^5\right]\cdot x\Big\},$$

$$v=\frac{\varkappa}{4\mu(\lambda'+\mu)}\cdot\Big\{-\tfrac{1}{60}(\lambda'+2\mu)x^6+\tfrac{1}{4}(3\lambda'+4\mu)\cdot b^2x^4-\frac{\lambda'}{4}x^4y^2$$
$$-(3\lambda'+4\mu)\frac{b^4}{2}x^2+\tfrac{1}{4}(3\lambda+2\mu)x^2y^4-(\lambda'+2\mu)b^2x^2y\cdot\left(\tfrac{3}{2}y+2b\right)$$
$$-(5\lambda'+4\mu)\cdot\frac{y^6}{60}-\lambda'\left(\frac{b^2}{4}y^4+\tfrac{2}{3}b^3y^3\right)+(\lambda'+2\mu)y\cdot\left(\frac{b^4}{2}y+\tfrac{9}{10}b^5\right)\Big\}$$

bei den Befestigungsbedingungen $u=v=\frac{\partial v}{\partial x}=0$ für $x=y=0$.

§ 8. Der gerade oder krumme Streifen unter beliebiger Beanspruchung.

a) Wir nehmen an, daß sich die beliebige normale Belastung eines geraden Streifens in Form einer Fourier-Entwicklung darstellen lasse. Dementsprechend setzen wir zunächst F als Produkt eines allgemeinen Sinusgliedes in x, $\sin \omega x$, und einer reinen Funktion Y von y an und sehen zu, in welche Bedingung für Y dann die Differentialgleichung $\varDelta \varDelta F = 0$ übergeht. Wir erhalten die Gleichung:

$$\omega^4 \cdot Y - 2\omega^2 \cdot Y'' + Y'''' = 0$$

deren allgemeine Lösung gegeben ist durch $Y = \varkappa_1 e^{\omega y} + \varkappa_2 e^{-\omega y} + \varkappa_3 y e^{\omega y} + \varkappa_4 y e^{-\omega y}$. Somit erhalten wir:

$$(24) \quad F = \sin \omega x \cdot \{\varkappa_1 e^{\omega y} + \varkappa_2 e^{-\omega y} + \varkappa_3 y e^{\omega y} + \varkappa_4 y e^{-\omega y}\};$$

$$P = \sin \omega x \cdot \{\varkappa_1 \omega^2 e^{\omega y} + \varkappa_2 \omega^2 e^{-\omega y} + 2\varkappa_3 \omega e^{\omega y} - 2\varkappa_4 \omega e^{-\omega y} + \varkappa_3 \omega^2 y e^{\omega y} + \varkappa_4 \omega^2 y e^{-\omega y}\},$$

$$(24') \quad Q = -\omega^2 \cdot \sin \omega x \cdot \{\varkappa_1 e^{\omega y} + \varkappa_2 e^{-\omega y} + \varkappa_3 y e^{\omega y} + \varkappa_4 y e^{-\omega y}\},$$

$$U = -\omega \cdot \cos \omega x \cdot \{\varkappa_1 \omega e^{\omega y} + \varkappa_2 \omega e^{-\omega y} + \varkappa_3 e^{\omega y} + \varkappa_4 e^{-\omega y} + \varkappa_3 \omega y e^{\omega y} - \varkappa_4 \omega y e^{-\omega y}\}.$$

Schreibt man nun die Randbedingungen: $U = 0$ für $y = 0$ und $y = 2b$ und $Q = 0$ für $y = 0$, $Q = \text{const.} \sin \omega x$ für $y = +2b$ vor, so erhält man für die Konstanten die Werte:

$$\varkappa_1 = -\varkappa_2 = c,$$

$$\varkappa_3 = c\omega \cdot \frac{-1 + 4\omega b + e^{4\omega b}}{1 - 2\omega b - (1 + 2\omega b)e^{4\omega b}},$$

$$\varkappa_4 = c\omega \cdot \frac{-1 + e^{4\omega b} + 4\omega b e^{4\omega b}}{1 - 2\omega b - (1 + 2\omega b)e^{4\omega b}}.$$

Ist nun die Belastung des Streifens (Fig. 12) von der Länge $2a$ dargestellt etwa durch die Reihe $W = \sum_1^\infty A_i \sin \omega_i x$, wo $\omega_i = \frac{i\pi}{2a}$, so lautet die Lösung:

$$(25) \quad F = \sum_{i=1}^\infty c_i \sin \omega_i x \cdot \{e^{\omega_i y} - e^{-\omega_i y} + \gamma_1 \omega_i y e^{\omega_i y} + \gamma_2 \omega_i y \cdot e^{-\omega_i y}\};$$

$$P = \sum_{i=1}^\infty c_i \omega_i^2 \sin \omega_i x \{e^{\omega_i y} - e^{-\omega_i y} + \gamma_1 \cdot (2e^{\omega_i y} + \omega_i y e^{\omega_i y}) + \gamma_2 (\omega_i y e^{-\omega_i y} - 2e^{-\omega_i y})\},$$

$$(25') \quad Q = -\sum_{i=1}^\infty c_i \omega_i^2 \sin \omega_i x \{e^{\omega_i y} - e^{-\omega_i y} + \gamma_1 \omega_i y e^{\omega_i y} + \gamma_2 \omega_i y e^{-\omega_i y}\},$$

$$U = -\sum_{i=1}^\infty c_i \omega_i^2 \cos \omega_i x \cdot \{e^{\omega_i y} + e^{-\omega_i y} + \gamma_1 (1 + \omega_i y) e^{\omega_i y} + \gamma_2 (1 - \omega_i y) e^{-\omega_i y}\}.$$

Dabei ist gesetzt:

$$c_i = -\frac{A_i}{\omega_i^3} : \{e^{2\omega_i b} - e^{-2\omega_i b} + \gamma_1 \cdot 2\omega_i b \cdot e^{2\omega_i b} + \gamma_2 \cdot 2\omega_i b e^{-2\omega_i b}\}$$

und

$$\gamma_1 = \frac{-1 + 4\omega_i b + e^{4\omega_i b}}{1 - 2\omega_i b - (1 + 2\omega_i b)e^{4\omega_i b}},$$

$$\gamma_2 = \frac{-1 + e^{4\omega_i b} + 4\omega_i b \cdot e^{4\omega_i b}}{1 - 2\omega_i b - (1 + 2\omega_i b)e^{4\omega_i b}}.$$

Die Berechnung der Verschiebungen vermittels der stress-strain-Gleichungen bietet in einem speziellen Fall keine Schwierigkeiten dar, sodaß das Problem des eine beliebige normale Belastung tragenden Streifens als erledigt angesehen werden kann. — Man sieht übrigens, daß unser Verfahren gleichfalls zum Ziele führt, wenn Q auch auf der Geraden $y = 0$ und U auf $y = 0$ und $y = 2b$ beliebig vorgeschrieben ist, wenn also der allgemeinste Belastungsfall vorliegt.[1]) Dies deckt sich mit der Lösung der allgemeinen Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ im Parallelstreifen. — Nebenbei bemerkt bedarf es zur Bewältigung des (außer dem diskutierten) in der Praxis wohl noch am häufigsten vorkommenden Falles, daß nämlich auch die Unterseite des Streifens eine beliebig verteilte normale Last trägt, keiner neuen Rechnungen mehr: wir haben dann nur zwei Lösungen vom Typus (26) zu überlagern.

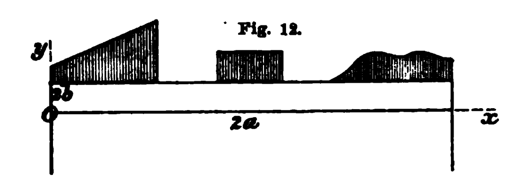


Fig. 12.

b) Um die Spannungsverteilung in dem mehrfach betrachteten **krummen Streifen** bei beliebiger Beanspruchung zu ermitteln, transformieren wir ihn durch Inversion in einen geraden Streifen; bezüglich der Umformung der durch die Beanspruchung vorgeschriebenen Randbedingungen sind die Sätze von § 3 anzuwenden. Da M und mithin die beiden Hauptspannungen nur bis auf eine additive Konstante bestimmt sind, so haben wir zum Schluß, wenn wieder auf den krummen Streifen transformiert wird, eventuell noch eine gleichmäßige konstante Spannung zu überlagern.

1) In diesem Fall ist natürlich das in der Vorbemerkung, S. 361, über die Bedingungen an den Schmalseiten Gesagte zu modifizieren.

2. Kapitel: Der von sich nicht schneidenden, insbesondere von konzentrischen Kreisen begrenzte Streifen.

A. Die Hauptlösungen.

§ 9. Die reine Biegung des Kreisringsektors.

Um für den von konzentrischen Kreisen begrenzten Streifen die Hauptlösungen, d. h. diejenigen Lösungen zu erhalten, die die Kreisränder spannungsfrei lassen, greifen wir zunächst die Airyschen Funktionen heraus, die nicht vom Winkel θ abhängen und deshalb bei Benutzung von Polarkomponenten keine Schubspannungen liefern, also die Grundlösungen der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$.

Wir setzen an:

$$F = \varkappa_1 \cdot \lg r + \varkappa_2 \cdot r^2 \lg r + \varkappa_3 \cdot r^2. \tag{1}$$

Die zugehörigen radialen und peripherischen Verschiebungen werden:

$$\mathfrak{u} = -\frac{\varkappa_1}{2\mu r} + \left[\frac{\varkappa_3}{\lambda' + \mu} - \frac{\varkappa_2}{2\mu}\right] r + \frac{\varkappa_2}{\lambda + \mu} r \lg r,$$

$$\mathfrak{v} = \frac{\lambda' + 2\mu}{\mu(\lambda' + \mu)} \varkappa_2 r \theta.$$

Da $\mathfrak{v}$ im Vollringe unendlich vieldeutig sein würde, so erkennen wir, daß wir den mit $\varkappa_2$ multiplizierten Term nur solange beibehalten dürfen, als wir es mit einem Ringsektor zu tun haben.

Wir bestimmen unter dieser Voraussetzung die Verhältnisse der Konstanten $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ so, daß auf den beiden Kreisrändern $r = a$ und $r = b$ die Normalspannungen verschwinden. Es ergibt sich:

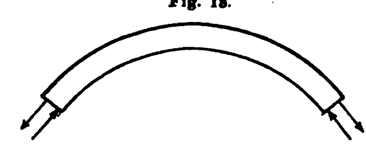
$$F = \varkappa \cdot \left\{2a^2b^2 \frac{\lg a - \lg b}{a^2 - b^2} \lg r + r^2 \lg r - \left(\frac{a^2 \lg a - b^2 \lg b}{a^2 - b^2} + \tfrac{1}{2}\right) r^2\right\}; \tag{2}$$

$$\mathfrak{P} = \varkappa \cdot \left\{\frac{2a^2b^2}{r^2} \frac{\lg a - \lg b}{a^2 - b^2} + 2 \lg r - 2\frac{a^2 \lg a - b^2 \lg b}{a^2 - b^2}\right\},$$

$$\mathfrak{Q} = \varkappa \cdot \left\{-\frac{2a^2b^2}{r^2} \frac{\lg a - \lg b}{a^2 - b^2} + 2(\lg r + 1) - 2\frac{a^2 \lg a - b^2 \lg b}{a^2 - b^2}\right\}, \tag{2'}$$

$$\mathfrak{U} = 0.$$

Fig. 13.

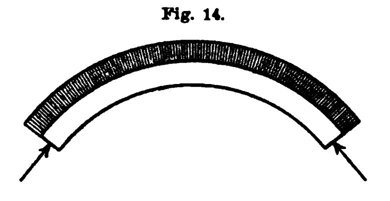


Wie die statische Betrachtung zeigt, muß uns (2), (2′) den Fall der reinen Biegung des Kreisringsektors (Fig. 13) repräsentieren, was durch Resultantenbildung über einen Querschnitt $\theta = \text{const.}$ in der Tat bestätigt wird. Für das Moment ergibt sich

$$\mathsf{M} = \varkappa \cdot \left\{2a^2b^2 \frac{(\lg a - \lg b)^2}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 - b^2}{2}\right\}. \tag{3}$$

Daß wir bei unserm Ansatz eine von 0 verschiedene Hauptlösung erhielten, verdanken wir offenbar der Existenz von mehr als zwei Grundlösungen der Gleichung $\Delta\Delta F = 0$. Dementsprechend gibt es auch, wie hier nebenbei erwähnt sei, unendlich viele Lösungen von der Form (1), die dem Fall des ein- oder beiderseitig belasteten Ringsektors entsprechen. Erst wenn wir eine weitere Bedingung für die Schmalseiten vorschreiben, etwa daß kein Moment auftreten soll (Fig. 14), ist das Resultat eindeutig bestimmt. In dem bezeichneten Falle ergeben sich, falls die Seite $r = a$ unbelastet ist, für die Konstanten $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ die Werte:

Fig. 14.



(4)
$$\varkappa_1 = - W \cdot \frac{b^2(\lg a - \lg b) + a^2 - b^2}{4(\lg a - \lg b)^2 - 2\dfrac{(a^2-b^2)^2}{a^2 b^2}},$$

$$\varkappa_2 = - W \frac{2(\lg a - \lg b) + \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}}{4(\lg a - \lg b)^2 - 2\dfrac{(a^2-b^2)^2}{a^2 b^2}},$$

$$\varkappa_3 = W \frac{2\lg a(\lg a - \lg b) + \dfrac{a^2 \lg a - b^2 \lg b + a^2 - b^2}{a^2}}{4(\lg a - \lg b)^2 - 2\dfrac{(a^2-b^2)^2}{a^2 b^2}}.$$

§. 10. Das de Saint-Venantsche Problem des Kreisringsektors.

Wie sich in § 11 bei Behandlung des allgemeinen Belastungsproblems für den Kreisring mit Hilfe der trigonometrischen Lösungen der Gleichungen $\Delta\Delta F = 0$ im Zusammenhang herausstellen wird, müssen die niedrigsten trigonometrischen Terme passend kombiniert gleichfalls eine Hauptlösung liefern. Machen wir jetzt einfach den Ansatz:

(5)
$$F = \left[\varkappa_1 r \lg r + \varkappa_2 \cdot \frac{1}{r} + \varkappa_3 r^3\right] \cos\theta,$$

wo $\Delta\Delta F = 0$ erfüllt ist. Die zugehörigen Verschiebungen werden:

(5′)
$$\mathfrak{u} = \varkappa_1 \cdot \frac{\lambda' + 2\mu}{2\mu(\lambda' + \mu)} \cdot \theta \sin\theta + \left[\frac{\varkappa_1}{2(\lambda' + \mu)} \lg r + \frac{\varkappa_2}{2\mu r^2} + \frac{\mu - \lambda'}{2\mu(\lambda' + \mu)} \varkappa_3 r^2\right] \cos\theta,$$
$$\mathfrak{v} = \varkappa_1 \cdot \frac{\lambda' + 2\mu}{2\mu(\lambda' + \mu)} \cdot \theta \cos\theta + \left[\frac{-\varkappa_1}{2(\lambda' + \mu)} \lg r + \frac{\varkappa_2}{2\mu r^2} + \frac{3\lambda' + 5\mu}{2\mu(\lambda' + \mu)} \varkappa_3 r^2\right] \sin\theta.$$

Da die mit $\varkappa_1$ multiplizierten Terme im Vollringe unendlich vieldeutige Verschiebungen veranlassen würden, so ist dort immer $\varkappa_1 = 0$ zu setzen. Nur im Ringsektor kann $\varkappa_1 + 0$ beibehalten werden.

Wir bestimmen nun in letzterem die Konstanten so, daß die Schubspannungen über die Kreisränder $r = a$ und $r = b$ verschwinden; dann zeigt sich, daß dort gleichzeitig die Normalspannungen verschwinden, und man erhält:

$$F = \varkappa \frac{\cos\theta}{a^2 + b^2} \cdot \left[(a^2 + b^2) \cdot r \lg r + \frac{a^2 b^2}{2r} - \frac{r^2}{2}\right]; \tag{6}$$

$$\mathfrak{P} = \varkappa \frac{\cos\theta}{a^2 + b^2} \cdot \left[\frac{a^2 + b^2}{r} - \frac{a^2 b^2}{r^3} - r\right],$$

$$\mathfrak{Q} = \varkappa \frac{\cos\theta}{a^2 + b^2} \cdot \left[\frac{a^2 + b^2}{r} + \frac{a^2 b^2}{r^3} - 3r\right], \tag{6'}$$

$$\mathfrak{U} = \varkappa \frac{\sin\theta}{a^2 + b^2} \cdot \left[\frac{a^2 + b^2}{r} - \frac{a^2 b^2}{r^3} - r\right].$$ [1]

Die Resultante über die längs eines Schnittes $\theta = \theta_0$ wirkenden Schubspannungen ist

$$K_1 = K_0 \cdot \sin\theta_0, \tag{7}$$

die über die Normalspannungen

$$K_2 = K_0 \cdot \cos\theta_0, \tag{8}$$

$$\text{wo } K_0 = \varkappa \cdot \left[\lg b - \lg a - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right].$$

Beide gehen durch den Mittelpunkt des Ringes. Für $\theta_0 = 90^0$ erhält man den Fall einer senkrecht zur Achse des krummen Streifens angreifenden Kraft K_0 (Fig. 15). Soll auf der Außenseite $r = b$ eine konstante Normalspannung lasten, so haben wir nur etwa die Lösung

Fig. 15.

$$F' = \varkappa' \cdot \left(\lg r - \frac{r^2}{2a^2}\right) \tag{9}$$

mit $\varkappa' = W \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}$ zu überlagern und denjenigen Querschnitt zu bestimmen, für den jetzt die Resultante der Normalspannungen verschwindet. Man erhält:

$$\cos\theta_0 = - \frac{b \cdot W}{\varkappa \cdot \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \lg b - \lg a\right)}. \tag{10}$$

1) Diese Lösung findet sich bereits, auf völlig anderem Wege abgeleitet, in dem noch unveröffentlichten Manuskript des Herrn Prof. Prandtl („Spannungszustand eines gekrümmten Stabes nach der strengen Elastizitätstheorie"), in das ich schon vor längerer Zeit durch die gütige Vermittlung von Herrn Prof. Klein Einsicht erhielt. Es ist jene Abhandlung, auf die Föppl in seiner „Festigkeitslehre", 2. Aufl., § 70a (S. 452) Bezug nimmt. Wie ich nachträglich erfahre, ist Herr Prof. Prandtl auch bereits im Besitz einer Lösung für den Fall der reinen Biegung im Ringsektor.

(Das außerdem auftretende Biegungsmoment wird durch Überlagerung einer Hauptlösung (2) entfernt.) Die Resultante der Schubspannungen über diesen Querschnitt ist

Fig. 16.

$$(11)\quad K_1 = \sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \lg a + \lg b\right)^2 K^2 - b^2 W^2}.$$

Gibt man K_1 und W vor, so ist $\varkappa$ und $\varkappa'$ zu berechnen. Damit ist das Problem des krahnähnlichen Streifens, der auf der Außenseite eine konstante Normalbeanspruchung erfährt und am Ende eine vertikale Last trägt (Fig. 16), gelöst.

Wählen wir beide Stirnflächen gemäß den zwei aus (10) zu entnehmenden Werten von θ_0, so erhalten wir den Fall des eine konstante radiale Beanspruchung erfahrenden Sektors, der an den Enden durch Transversalkräfte gehalten wird (Fig. 17).

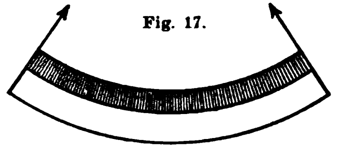
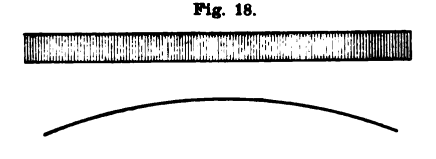


Fig. 17.

Durch Inversion gelangen wir von hier zu einem Streifen, der auf der einen Seite von einer Geraden begrenzt ist, die eine gleichmäßige normale Spannung erfährt, während die Stirnflächen durch zwei symmetrische Kräfte gestützt werden. Wir haben damit in etwa die Lösung für ein Gewölbe unter gleichmäßiger vertikaler Belastung, also einen praktisch recht bedeutsamen Fall, gewonnen (Fig. 18). In der Tat stellen uns die Lösungen (1) und (6) im ganzen vier unabhängige Konstante zur Verfügung, so daß wir folgende vier Bedingungen erfüllen können: die Unterseite des Gewölbes sei unbelastet, die Oberseite trage eine gleichmäßige normale Last W; an den Stirnflächen habe die Resultante durch den Mittelpunkt gegebene Richtung und das Moment einen gegebenen Betrag.

Fig. 18.



B. Die allgemeine Lösung.

Bemerkung. Das zuletzt behandelte Beispiel zeigt bereits, wie man auf Grund des Saint-Venantschen Prinzips durch Kombination einer den Bedingungen auf den Kreisrändern genügenden Lösung mit den Hauptlösungen (im eigentlichen und uneigentlichen Sinn) auch die für die Schmalseiten vorgeschriebenen Bedingungen befriedigt. Wie schon in unserer Bemerkung im 1. Kapitel (S. 361) hervorgehoben, genügt

es im allgemeinen, für die Realisierung der an der einen Schmalseite geforderten Beanspruchung Sorge zu tragen, da die entsprechende Lösung dann aus statischen Gründen den Vorschriften an der andern Schmalseite von selbst nachkommt. — Um nun hier die transversale Resultante zu regulieren, haben wir nur eine geeignete Hauptlösung (6) zu überlagern, für die an der betr. Schmalseite das Moment verschwindet. — Axiale Resultante und Moment werden durch Kombination einer Hauptlösung (2) und einer Hauptlösung (6) geliefert, welch letztere an der Schmalseite verschwindende Schubspannungen haben muß. — Auch für den durch Inversion erhaltenen allgemeinen krummen Streifen gilt Entsprechendes. Man transformiert ihn zunächst in einen von konzentrischen Kreisen begrenzten Streifen, wobei bezüglich der Umformung der Randbedingungen die Sätze von § 3 zu beachten sind, löst die Aufgabe in diesem Gebiete und geht dann auf den ursprünglichen Bereich zurück. Nunmehr überlagert man jene Kombination von Hauptlösungen, die an sich den unteren Rand spannungsfrei läßt und die Bedingungen an der Schmalseite realisiert. Um die damit hereinkommende konstante normale Spannung des oberen Randes zu eliminieren, ist man genötigt, von vornherein ein einer gleichmäßigen Beanspruchung des oberen Randes entsprechendes Zusatzglied mit unbestimmtem Koeffizienten hinzuzufügen und letzteren zum Schluß so zu bestimmen, daß nach Überlagerung der Hauptlösungen sich der tatsächliche Belastungsfall ergibt.

§ 11. Der Kreisring und der Kreisringsektor unter beliebiger Beanspruchung.

Wir gehen aus von der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ für den Kreisring[1]):

$$(12)\qquad \begin{aligned} F = {} & a_0 \lg r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \lg r + \alpha_0 \theta \\ & + \frac{a_1}{2} r\theta \cdot \sin\theta + (b_1 r^3 + \alpha_1 r^{-1} + \beta_1 r \lg r)\cos\theta \\ & - \frac{c_1}{2} r\theta \cdot \cos\theta + (d_1 r^3 + \gamma_1 r^{-1} + \delta_1 r \lg r)\sin\theta \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} (a_i r^m + b_i r^{m+2} + \alpha_i r^{-m} + \beta_i r^{-m+2})\cos m\theta \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} (c_i r^m + d_i r^{m+2} + \gamma_i r^{-m} + \delta_i r^{-m+2})\sin m\theta. \end{aligned}$$

1) S. Nr. 17.

Setzen wir F als Spannungsfunktion an, so würde sich ergeben:

$$
(12')\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= \frac{a_0}{r^2} + 2b_0 + c_0(2\lg r + 1) \\
&+ \left(\frac{a_1+\beta_1}{r} + 2b_1 r - \frac{2\alpha_1}{r^3}\right)\cos\theta \\
&+ \left(\frac{c_1+\delta_1}{r} + 2d_1 r - \frac{2\gamma_1}{r^3}\right)\sin\theta \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\left[m(1-m)a_m r^{m-2} + (m+2-m^2)b_m r^m\right. \\
&\qquad \left. - m(1+m)\alpha_m r^{-m-2} - (m-2+m^2)\beta_m r^{-m}\right]\cos m\theta \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\left[m(1-m)c_m r^{m-2} + (m+2-m^2)d_m r^m\right. \\
&\quad \left. - m(1+m)\gamma_m r^{-m-2} - (m-2+m^2) r^{-m}\right]\sin m\theta, \\
\mathfrak{Q} &= -\frac{a_0}{r^2} + 2b_0 + c_0(2\lg r + 3) \\
&+ \left(6b_1 + \frac{2\alpha_1}{r^3} + \frac{\beta_1}{r}\right)\cdot\cos\theta \\
&+ \left(6d_1 + \frac{2\gamma_1}{r^3} + \frac{\delta_1}{r}\right)\cdot\sin\theta \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\left[(m-1)m\cdot a_m r^{m-2} + (m+1)(m+2)b_m r^m\right. \\
&\quad \left. + m(m+1)\alpha_m\cdot r^{-m-2} + (m-2)(m-1)\beta_m r^{-m}\right]\cos m\theta \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\left[(m-1)m\cdot c_m r^{m-2} + (m+1)(m+2)\cdot d_m r^m\right. \\
&\qquad \left. + m(m+1)\cdot\gamma_m\cdot r^{-m-2} + (m-2)(m-1)\delta_m r^{-m}\right]\sin m\theta, \\
\mathfrak{U} &= \frac{\alpha_0}{r^2} + \left(2b_1 r - \frac{2\alpha_1}{r^3} + \frac{\beta_1}{r}\right)\sin\theta \\
&- \left(2d_1 r - \frac{2\gamma_1}{r^3} + \frac{\delta_1}{r}\right)\cos\theta \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\left[(m-1)m a_m r^{m-2} + m(m+1)b_m r^m\right. \\
&\quad \left. - m(m+1)\alpha_m r^{-m-2} - m(m-1)\beta_m r^{-m}\right]\sin m\theta \\
&- \sum_{m=2}^{\infty}\left[(m-1)m c_m r^{m-2} + m(m+1)d_m r^m\right. \\
&\quad \left. - m(m+1)\gamma_m r^{-m-2} - (m-1)m\cdot\delta_m r^{-m}\right]\cos m\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

Seien nun andererseits die Spannungen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{U}$ auf den Rändern $r = a$ und $r = b$ vorgegeben durch die Entwicklungen:

(13)
$$\mathfrak{P} = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin m\theta.$$
$$\mathfrak{U} = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin m\theta;$$

(13′)
$$\mathfrak{P}' = A_0' + \sum_{m=1}^{\infty} A_m' \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} B_m' \sin m\theta,$$
$$\mathfrak{U}' = C_0' + \sum_{m=1}^{\infty} C_m' \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} D_m' \sin m\theta.$$

Setzt man nun die aus (12′) sich für $r = a$ und $r = b$ ergebenden Werte von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{U}$ gleich mit (13) und (13′) und identifiziert die Koeffizienten entsprechender trigonometrischer Terme, so erhält man ein unendliches System von achtköpfigen Gleichungsfamilien zur Bestimmung der $a_m, b_m, c_m, d_m, \alpha_m, \beta_m, \gamma_m, \delta_m$. Diese Bestimmung gelingt ohne weiteres für alle $m \geq 2$. Für $m = 0$ und $m = 1$ dagegen treten exzeptionelle Fälle ein.

a) Was den Fall $m = 0$ angeht, so sondern sich die vier Gleichungen in zwei, die nur a_0, b_0, c_0 enthalten, und zwei, in denen nur α_0 vorkommt. Die letzteren beiden sind mit einander verträglich, da aus den statischen Bedingungen für den Ring (Verschwinden der Drehmomente um O) folgt: $a^2 C_0 = b^2 C_0'$. Das erste Paar ist unterbestimmt; die damit gegebene Willkür wird, wie wir weiter unten sehen werden, beseitigt durch die Forderung, daß die Verschiebungen im Ringe eindeutig resultieren müssen.

b) Was den Fall $m = 1$ angeht, so haben die beiden Gleichungsquadrupel nur dann Lösungen, wenn $a(A_1 - D_1) = b(A_1' - D_1')$ und $a(B_1 + C_1) = b(B_1' + C_1')$. Das sind aber gerade die beiden weiteren aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Ring folgenden Relationen. Es wird:

$$a_1 = a(A_1 - D_1),$$
$$c_1 = a(B_1 + C_1).$$

Wenn z. B. an jedem Rande für sich die angreifenden Spannungen im Gleichgewicht stehen bezw. ein Kräftepaar ergeben, so ist $A_1 = D_1$, $B_1 = -C_1$, folglich $a_1 = c_1 = 0$. — Für die Bestimmung der Konstantentripel b_1, α_1, β_1 und d_1, γ_1, δ_1 verbleiben dann nur noch je zwei Gleichungen; hierzu treten aber wieder die Bedingungen, die aus dem Verlangen nach Eindeutigkeit der Verschiebungen entspringen.

J. H. Michell hat diese bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten zu berücksichtigenden Bedingungen allgemein diskutiert (Nr. 17). Wir

wollen einfach die den einzelnen Elementarlösungen entsprechenden Verschiebungen frischweg berechnen und hinterher die Koeffizienten der mehrdeutigen Glieder gleich Null setzen. Wir erhalten:

(14) Radialverschiebung $\mathfrak{u} = -\frac{a_0}{2\mu r} + \left[\frac{b_0}{\lambda' + \mu} - \frac{c_0}{2\mu}\right] r$

$$+ \frac{c_0}{\lambda'+\mu} \cdot r \lg r + \left(\frac{a_1}{4(\lambda' + \mu)} + \frac{\lambda' + 2\mu}{2\mu(\lambda' + \mu)} \beta_1\right) \theta \sin\theta$$

$$- \left(\frac{c_1}{4(\lambda' + \mu)} + \frac{\lambda' + 2\mu}{2\mu(\lambda' + \mu)} \delta_1\right) \cdot \theta \cos\theta$$

$$+ \left[\left(\frac{\lambda' + 2\mu}{4\mu(\lambda' + \mu)} a_1 + \frac{\beta_1}{2(\lambda' + \mu)}\right) \lg r + \frac{\mu - \lambda'}{2\mu(\lambda' + \mu)} b_1 r^2 + \frac{\alpha_1}{2\mu r^2} + A\right] \cos\theta$$

$$+ \left[\left(\frac{\lambda' + 2\mu}{4\mu(\lambda' + \mu)} c_1 + \frac{\delta_1}{2(\lambda' + \mu)}\right) \lg r + \frac{\mu - \lambda'}{2\mu(\lambda' + \mu)} d_1 r^2 + \frac{\gamma_1}{2\mu r^2} + B\right] \sin\theta$$

$$+ \sum_{m=2}^{\infty} \left[-\frac{m}{2\mu} a_m r^{m-1} - \frac{m\lambda' + (m-2)\mu}{2\mu(\lambda' + \mu)} b_m r^{m+1}\right.$$

$$\left. + \frac{m}{2\mu} \cdot \alpha_m r^{-m-1} + \frac{m\lambda' + (m+2)\mu}{2\mu(\lambda' + \mu)} \beta_m r^{-m+1}\right] \cos m\theta$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\frac{m}{2\mu} c_m r^{m-1} - \frac{m\lambda' + (m-2)\mu}{2\mu(\lambda' + \mu)} d_m r^{m+1}\right.$$

$$\left. + \frac{m}{2\mu} \cdot \gamma_m r^{-m-1} + \frac{m\lambda' + (m+2)\mu}{2\mu(\lambda' + \mu)} \delta_m r^{-m+1}\right] \sin m\theta.$$

(15) Peripherische Verschiebung $\mathfrak{v} = Cr - \frac{\alpha_0}{2\mu r}$

$$+ \frac{\lambda' + 2\mu}{\mu(\lambda' + \mu)} c_0 r\theta + \left(\frac{a_1}{4(\lambda' + \mu)} + \frac{\lambda' + 2\mu}{2\mu(\lambda' + \mu)} \beta_1\right) \cdot \theta \cos\theta$$

$$+ \left(\frac{c_1}{4(\lambda' + \mu)} + \frac{\lambda' + 2\mu}{2\mu(\lambda' + \mu)} \delta_1\right) \theta \sin\theta$$

$$+ \left[\left(-\frac{\lambda' + 2\mu}{4\mu(\lambda'+\mu)} \cdot \alpha_1 - \frac{\beta_1}{2(\lambda'+\mu)}\right) \lg r - \frac{a_1}{4\mu} + \frac{3\lambda' + 5\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)} b_1 r^2 + \frac{\alpha_1}{2\mu r^2} - A\right] \sin\theta$$

$$+ \left[\left(\frac{\lambda' + 2\mu}{4\mu(\lambda'+\mu)} \cdot c_1 + \frac{\delta_1}{2(\lambda'+\mu)}\right) \lg r + \frac{c_1}{4\mu} - \frac{3\lambda' + 5\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)} \cdot d_1 r^2 - \frac{\gamma_1}{2\mu r^2} + B\right] \cos\theta$$

$$+ \sum_{m=2}^{\infty} \left[\frac{m}{2\mu} a_m r^{m-1} + \frac{(m+4)(\lambda' + 2\mu) + \lambda' m}{4\mu(\lambda' + \mu)} b_m r^{m+1}\right.$$

$$\left. + \frac{m}{2\mu} \cdot \alpha_m r^{-m-1} + \frac{(m-4)(\lambda' + 2\mu) + \lambda' m}{4\mu(\lambda' + \mu)} - \beta_m r^{-m+1}\right] \sin m\theta$$

$$+ \sum_{m=2}^{\infty} \left[-\frac{m}{2\mu} \cdot c_m r^{m-1} - \frac{(m+4)(\lambda' + 2\mu) + \lambda' m}{4\mu(\lambda' + \mu)} d_m r^{m+1}\right.$$

$$\left. - \frac{m}{2\mu} \cdot \gamma_m r^{-m-1} - \frac{(m-4)(\lambda' + 2\mu) + \lambda' m}{4\mu(\lambda' + \mu)} \delta_m r^{-m+1}\right] \cos m\theta,$$

unter A, B, C Integrationskonstanten verstanden, die durch die Befestigungsbedingungen zu bestimmen sind. — Damit alle Terme eindeutig werden, muß man setzen:

(16) $$c_0 = 0$$

(17) $$\beta_1 = -\frac{\mu}{2(\lambda' + \mu)} \cdot a_1$$
$$\delta_1 = -\frac{\mu}{2(\lambda' + \mu)} \cdot c_1.$$

In dem besonderen Fall, daß die Spannungen längs jedes Randes im Gleichgewicht sind oder ein Kräftepaar ergeben, wird $a_1 = c_1 = 0$ und daher auch $\beta_1 = \delta_1 = 0$. Wir haben damit das wichtige Resultat gewonnen:

Satz: Beim geschlossenen Ringe fällt aus dem Ausdruck (12) für die Spannungsfunktion F das Glied $c_0 r^2 \lg r$ stets ganz heraus. Die Koeffizienten der Terme $r\theta \sin\theta$, $r \lg r \cos\theta$; $r\theta \cos\theta$, $r \lg r \sin\theta$ sind durch die die Elastizitätsmoduln enthaltenden Relationen (17) mit einander verknüpft, sodaß sich der Spannungszustand im Vollringe im allgemeinen als von den elastischen Konstanten abhängig erweist. Nur in dem Falle, wo die äußeren Kräfte längs jedes Randes im Gleichgewicht sind oder ein Kräftepaar liefern, besteht eine solche Abhängigkeit nicht.

Diese Ergebnisse bestätigen Michells allgemeine Sätze.

Künstliche Selbstspannungen.[1]

Die Beschränkungen, die infolge der bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten zu berücksichtigenden Bedingungen in den Formeln (14), (15) bez. (12) eintreten, fallen natürlich beim ungeschlossenen Ringe fort. Dies wird von höchster Bedeutung dann sein, wenn es möglich ist, das nicht geschlossene Ringgebiet in einen Vollring zu deformieren; denn dann eröffnet sich für letzteren die Möglichkeit wesentlich neuartiger Spannungszustände. — Es genügt offenbar zu untersuchen, welche Arten von Selbstspannungen man durch einen derartigen Prozeß im Ringe herstellen kann; die diesen entsprechende Lösung F^0 kann man dann stets im allgemeinen Falle über die durch die Randkräfte bestimmte Lösung superponieren.

Die Funktion

(18) $$F = a_0 \lg r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \lg r$$

definiert die Spannungen

(18′) $$\mathfrak{P} = \frac{a_0}{r^2} + 2b_0 + c_0(2\lg r + 1),$$
$$\mathfrak{Q} = -\frac{a_0}{r^2} + 2b_0 + c_0(2\lg r + 3),$$
$$\mathfrak{U} = 0$$

1) Nach Abschluß dieser (als Dissertation vom 14. Dez. 1904 datierenden) Arbeit erschien eine eingehende Untersuchung über Selbstspannungen von V. Volterra, Atti Acc. Linc. Rend. (5) vol. 14 (1905).

und die Verschiebungen:

$$(19)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{u} &= -\frac{a_0}{2\mu r} + \left(\frac{b_0}{\lambda' + \mu} - \frac{c_0}{2\mu}\right) r + \frac{c_0}{\lambda' + \mu} r \lg r, \\ \mathfrak{v} &= \frac{\lambda' + 2\mu}{\mu(\lambda' + \mu)} c_0 r \theta. \end{aligned}$$

Alle Querschnitte $\theta = \text{const.}$ bleiben eben und werden um einen mit θ proportionalen Winkel gedreht. Ein nicht ganz geschlossener Ring (Fig. 19) bezw. ein solcher mit einander etwas überdeckenden Enden (Fig. 20) wird sich daher in einen Vollring deformieren lassen. Wir wollen die Kreisränder spannungsfrei nehmen; dann bestimmen sich (vgl. § 9) die Verhältnisse der Konstanten a_0, b_0, c_0 so, daß wir für F erhalten:

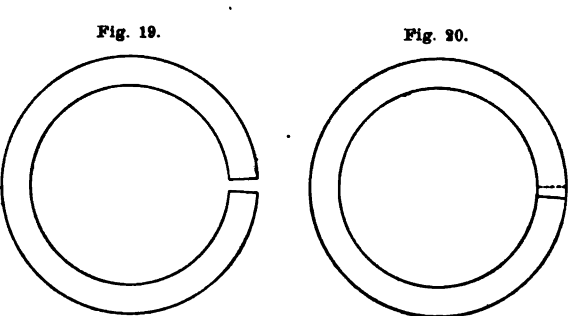


Fig. 19. Fig. 20.

$$(20)\qquad F_1^0 = \varkappa \left\{2a^2b^2 \frac{\lg a - \lg b}{a^2 - b^2} \lg r + r^2 \lg r - \left(\frac{a^2 \lg a - b^2 \lg b}{a^2 - b^2} + \tfrac{1}{2}\right) r^2\right\}.$$

Der Sektor sei begrenzt von den Schnitten $\theta = 0$ und $\theta = 2\pi - \varepsilon$, wo ε von der Größenordnung der Verschiebungen sein soll. Die Stirnfläche $\theta = 2\pi - \varepsilon$ wird bei der Deformation gedreht um

$$-\varkappa \cdot \left(\frac{a^2 \lg a - b^2 \lg b}{a^2 - b^2} + \tfrac{1}{2}\right) \frac{\lambda' + 2\mu}{\mu(\lambda' + \mu)} (2\pi - \varepsilon).$$

Wählen wir $\varkappa$ so, daß dieser Ausdruck $= \varepsilon$ wird, so geht der Sektor durch die Deformation in einen Vollring über. In der Berührungslinie $\theta = 0$ müssen zu beiden Seiten Element für Element entgegengesetzt gleiche Spannungen herrschen. Die radialen Verschiebungen sind beiderseits gleich. Denken wir uns aber jetzt die beiden Stirnflächen mit einander befestigt (verlötet oder vernietet), so erhalten wir einen geschlossenen Ring, in dem die durch (20) definierten Selbstspannungen herrschen. Wir schließen:

In einem Vollring kann der durch (20) definierte sogenannte konzentrische Selbstspannungszustand herrschen.

Die Funktion

$$(21)\qquad F = (d_1 r^3 + \gamma_1 r^{-1} + \delta_1 r \lg r) \sin \theta$$

definiert die Spannungen:

$$\mathfrak{P} = \left(\frac{\delta_1}{r} + 2d_1 r - \frac{2\gamma_1}{r^3}\right)\sin\theta,$$

$$\mathfrak{Q} = \left(\frac{\delta_1}{r} + 6d_1 r - \frac{2\gamma_1}{r^3}\right)\sin\theta,$$

$$\mathfrak{U} = -\left(\frac{\delta_1}{r} + 2d_1 r - \frac{2\gamma_1}{r^3}\right)\cos\theta$$

und die Verschiebungen:

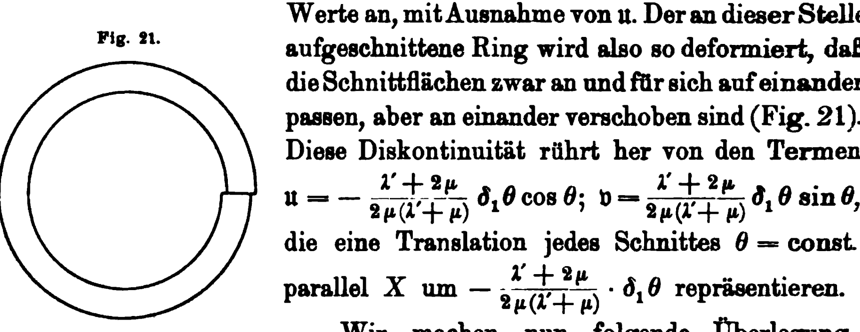
$$(22)\quad \begin{aligned} \mathfrak{u} &= \left(\frac{\delta_1}{2(\lambda'+\mu)}\cdot \lg r + \frac{\mu-\lambda'}{2\mu(\lambda'+\mu)} d_1 r^2 + \frac{\gamma_1}{2\mu r^2}\right)\sin\theta - \frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\delta_1\theta\cos\theta, \\ \mathfrak{v} &= \left(\frac{\delta_1}{2(\lambda'+\mu)} \lg r + \frac{3\lambda'+5\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)} d_1 r^2 - \frac{\gamma_1}{2\mu r^2}\right)\cos\theta + \frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\delta_1\theta\sin\theta. \end{aligned}$$

Sind speziell die Ränder spannungsfrei, so lautet die Lösung:

$$(23)\qquad F_2^0 = \varkappa \frac{\sin\theta}{a^2+b^2}\left[(a^2+b^2) r \lg r + \frac{a^2 b^2}{2r} - \frac{r^3}{2}\right].$$

Spannungen und Verschiebungen nehmen für $\theta = 0$ und $\theta = 2\pi$ gleiche Werte an, mit Ausnahme von $\mathfrak{u}$. Der an dieser Stelle aufgeschnittene Ring wird also so deformiert, daß die Schnittflächen zwar an und für sich aufeinander passen, aber an einander verschoben sind (Fig. 21). Diese Diskontinuität rührt her von den Termen

Fig. 21.

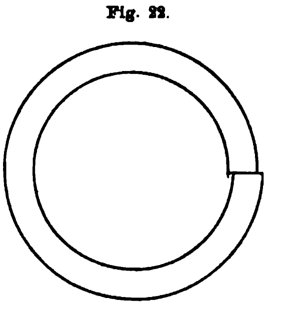


$$\mathfrak{u} = -\frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\delta_1\theta\cos\theta;\quad \mathfrak{v} = \frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\delta_1\theta\sin\theta,$$

die eine Translation jedes Schnittes $\theta = \text{const.}$ parallel X um $-\frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\cdot\delta_1\theta$ repräsentieren.

Wir machen nun folgende Überlegung. Nach den Grundvoraussetzungen der Elastizitätstheorie sind die Verschiebungen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ als unendlich klein gegen die Dimensionen des deformierten Gebiets anzusehen. Wir können daher die für den Kreisringsektor geltenden Formeln anwenden auf ein von dieser Form in demselben Sinne unendlich wenig abweichendes Gebiet; dabei werden wir für die Spannungen einen Fehler erhalten, der gegen diese selbst von erster Ordnung unendlich klein ist, für die Verschiebungen einen Fehler, der gegenüber den Dimensionen des Gebiets von zweiter Ordnung unendlich klein ist. — Wenden wir dies an, indem wir statt des Kreisringsektors ein Gebiet nehmen, das aus jenem durch Translation der Schnitte $\theta = \text{const.} \parallel X$ um $\frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\delta_1\theta$ erhalten wird (Fig. 22). Die

Fig. 22.



beiden Stirnflächen $\theta = 0$ und $\theta = 2\pi$ werden dann nach der Deformation, von unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung abgesehen, auf einander passen und sich gegen einander legen. Die Spannungen beiderseits werden Element für Element entgegengesetzt gleich sein, wenn von unendlich kleinen Größen erster Ordnung abgesehen wird. Wenn wir also jetzt die beiden Stirnflächen mit einander vernieten oder verlöten, so erhalten wir einen Vollring, in dem sich alle Spannungen und Verschiebungen eindeutig und bis auf unendlich kleine Sprünge stetig verhalten. Wir erhalten somit das Resultat:

In einem Vollring kann der durch (23) definierte sogenannte diametrale Selbstspannungszustand herrschen, bei dem entlang $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ nur Schubspannungen auftreten.

Der diametrale Selbstspannungszustand, bei dem entlang $\theta = \frac{\pi}{2}$ und $\theta = \frac{3\pi}{2}$ nur Schubspannungen herrschen, ist natürlich definiert durch:

$$F_3^0 = \varkappa \frac{\cos\theta}{a^2 + b^2} \cdot \left[(a^2 + b^2) r \lg r + \frac{a^2 b^2}{2r} - \frac{r^3}{2}\right]. \tag{24}$$

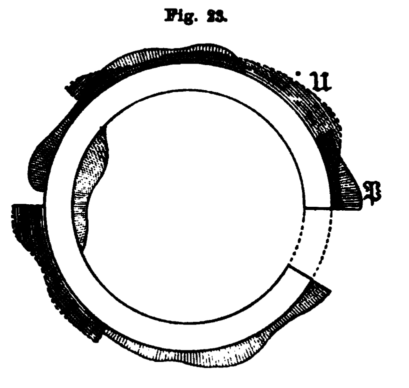
Im ganzen erhalten wir für den geschlossenen Ring ∞^3 Selbstspannungen, entsprechend der Funktion

$$F^0 = F_1^0 + F_2^0 + F_3^0. \tag{25}$$

Dies Ergebnis bildet genau das Analogon zu dem Resultat, das von F. Klein und K. Wieghardt für mehrfach zusammenhängende Fachwerke erhalten wurde (Nr. 9).

Kreisringsektor. Wir haben schließlich noch das Problem des Ringsektors zu erledigen, der längs der Kreisränder beliebige Normal- und Schubspannungen erleidet (Fig. 23). Um auch hier in den exzeptionellen Fällen $m = 0$ und $m = 1$ die Bestimmung der Unbekannten zu ermöglichen, haben wir nur an die entsprechenden Ausführungen für den Vollring anzuknüpfen. Demgemäß haben wir die Randspannungen an dem fehlenden Ringstücke, wo sie durch die Aufgabe nicht definiert sind, so festzusetzen, daß für den Vollring ein Gleichgewichtssystem resultiert. — Die überzähligen Konstanten werden hier durch die hinzutretenden Bedingungen an den Schmalseiten des Sektors bestimmt (vgl. Vorbemerkung).

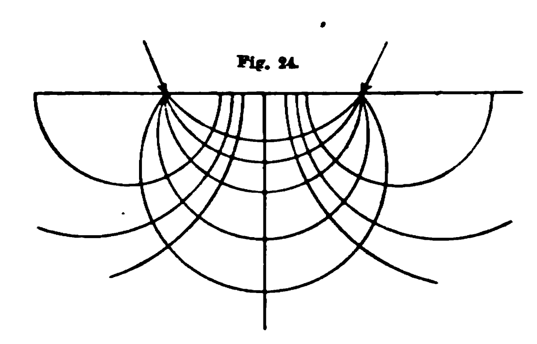
Fig. 23.



3. Kapitel: Der von sich schneidenden Kreisen begrenzte Streifen.

§ 12. Zentrische Verteilungen.

Nachdem die Spannungsprobleme für sich berührende und sich nicht schneidende Kreise erledigt sind, erscheint es naturgemäß, nun auch für das von sich schneidenden Kreisen begrenzte Gebiet eine Lösung zu versuchen. Da aber für den einfachsten Bereich, in den jenes durch Inversion übergeführt werden kann, nämlich den Keil, eine einwandfreie Lösung der Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ z. Z. meines Wissens nicht vorliegt[1]), so müssen wir uns darauf beschränken, auf einige spezielle hierher gehörige Airysche Funktionen von Interesse hinzuweisen. Zunächst stellen wir den unmittelbar einleuchtenden Satz auf:


Fig. 24.

Bei einem Spannungszustand, der aus einer zentrischen Verteilung durch Inversion von einem beliebigen nicht mit dem Zentrum derselben zusammenfallenden Punkte O' aus abgeleitet wird, sind Spannungstrajektorien die beiden durch O' und den Bildpunkt O'' von O als Grundpunkte definierten Kreisbüschel (Fig. 24).

Als zentrische Verteilungen bezeichnen wir dabei die durch die Airyschen Funktionen $F = \frac{\varkappa}{2} r\theta \sin\theta$; $F = \varkappa r^2 \lg r$[2]) und $F = \varkappa \lg r$ bestimmten Spannungszustände, bei denen die Spannungstrajektorien von den Systemen der konzentrischen Kreise und der Radien gebildet werden, und die im Zentrum zu einer konzentrierten Kraft Anlaß geben.

---

1) Zu der Lösung Venskes in den Göttinger Nachrichten 1891 bemerkt Levi-Civita (Nr. 14): „Tale (sc. una soluzione completa) non può dirsi certamente quella abozzata dal sig. Venske loc. cit., tanto più che, per il caso dello spazio angolare l'autore si appoggia sopra la asserzione inesatta che certa funzione W (p. 29) sia armonica."

2) Bei beiden Funktionen darf, wie wir im 2. Kap. gesehen haben, das in Betracht gezogene Gebiet den 0-Punkt nicht umschließen, wenn die Verschiebungen eindeutig resultieren sollen; dies ist besonders bei der Inversion zu beachten.

Für die sog. „einfache radiale Verteilung" $F = \frac{x}{2} r\theta \sin\theta$ hat bereits Michell (Nr. 18, 19) obigen Satz in zwei speziellen Fällen ausgesprochen. Da bei ihr die Radien spannungsfrei sind, so geht durch Inversion aus ihr offenbar eine Lösung hervor, bei der die in den beiden Grundpunkten sich schneidenden Kreise unter gleichmäßiger Spannung stehen. Diese liefert uns in Verbindung mit einer konstanten gleichförmigen Spannung den Fall eines auf der einen Seite unbelasteten, auf der andern gleichmäßig gespannten krummen Streifens, dessen Schmalseiten symmetrisch beansprucht werden (Fig. 25). Die beiden andern zentrischen Verteilungen führen durch Inversion offenbar zu künstlichen Belastungsfällen besagten krummen Streifens. Als künstlich zu bezeichnen ist auch die in Fig. 26 angedeutete Kombination von drei in den Ecken eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks entspringenden einfachen radialen Verteilungen, bei der die drei Seiten zwar Spannungstrajektorien sind, aber nicht unter gleichmäßiger Spannung stehen.

Fig. 25.

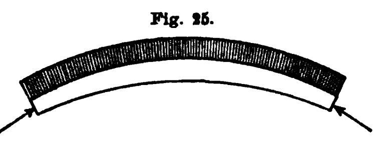
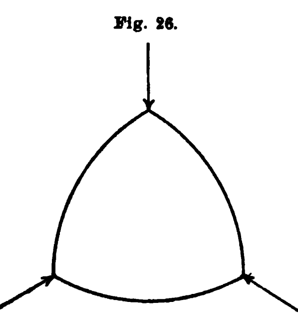


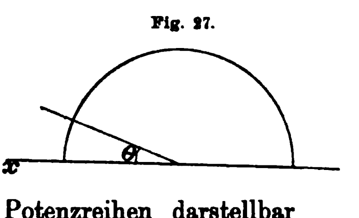
Fig. 26.



§ 13. Lösung für zwei auf einander senkrecht stehende Kreise.

Von zwei zu einander senkrechten Kreisen soll der eine beliebig vorgeschriebene Spannungen erleiden, während von dem andern nichts weiter verlangt wird, als daß er nur Normalspannungen überträgt. — Wir invertieren das von den Kreisen begrenzte Gebiet in einen Halbkreis, dessen Durchmesser wir zur x-Achse machen (Fig. 27). Wir nehmen an, daß die längs dieses Durchmessers vorgeschriebenen Spannungen durch Potenzreihen darstellbar seien:

Fig. 27.



$$(1)\qquad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{N}} &= k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots \\ \bar{\mathfrak{U}} &= l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \cdots \end{aligned}$$

Andererseits setzen wir als Spannungsfunktion an:

$$(2)\qquad \begin{aligned} F = {} & b_0 r^2 + b_1 r^3 \cos\theta + d_1 r^3 \sin\theta \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} [a_m r^m + b_m r^{m+2}] \cos m\theta \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} [c_m r^m + d_m r^{m+2}] \sin m\theta, \end{aligned}$$

woraus sich ergibt:

$$
(2') \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= 2b_0 + 2b_1 r\cos\theta + 2d_1 r\sin\theta \\
&\quad + \sum_{m=2}^{\infty}[(1-m)ma_m r^{m-2} + (m+2-m^2)b_m r^m]\cos m\theta \\
&\quad + \sum_{m=2}^{\infty}[(1-m)mc_m r^{m-2} + (m+2-m^2)d_m r^m]\sin m\theta, \\
\mathfrak{Q} &= 2b_0 + 6b_1 r\cos\theta + 6d_1 r\sin\theta \\
&\quad + \sum_{m=2}^{\infty}[(m-1)ma_m r^{m-2} + (m+1)(m+2)b_m r^m]\cos m\theta \\
&\quad + \sum_{m=2}^{\infty}[(m-1)mc_m r^{m-2} + (m+1)(m+2)d_m r^m]\sin m\theta, \\
\mathfrak{U} &= 2b_1 r\sin\theta - 2d_1 r\cos\theta \\
&\quad + \sum_{m=2}^{\infty}[(m-1)ma_m r^{m-2} + m(m+1)b_m r^m \sin m\theta \\
&\quad - \sum_{m=2}^{\infty}[(m-1)m\cdot c_m r^{m-2} + m(m+1)d_m r^m]\cos m\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

Nun soll $\mathfrak{U}$ für $r = R$ verschwinden; daraus ergibt sich das Gleichungssystem:

$$
(3) \qquad
\begin{array}{cc}
b_1 = 0 & d_1 = 0 \\
2a_2 + 6b_2R^2 = 0 & 2c_2 + 6d_2R^2 = 0 \\
\text{— — — — — —} & \text{— — — — — —} \\
(m-1)a_m + (m+1)b_mR^2 = 0 & (m-1)c_m + (m+1)d_mR^2 = 0
\end{array}
$$

Andererseits gehen Q und U für $\theta = 0$ und $\theta = 180^0$ über in:

$$\mathfrak{Q} = 2(b_0 + a_2) + 6(b_1 + a_3)x + \cdots + (m+1)(m+2)(b_m + a_{m+2})x^m + \cdots$$

$$\mathfrak{U} = -2c_2 - 2(d_1 + 3c_3) - 3(2d_2 + 4c_4)x^2 + \cdots + (m+1)[md_m + (m+2)c_{m+2}]x^m + \cdots$$

Identifizieren wir diese Reihen mit den gegebenen Potenzentwicklungen (1), so erhalten wir das Gleichungssystem:

$$
(4) \qquad
\begin{array}{rr}
2(b_0 + a_2) = k_0 & -2c_2 = l_0 \\
6(b_1 + a_3) = k_1 & -2(d_1 + 3c_3) = l_1 \\
12(b_2 + a_4) = k_2 & -3(d_2 + 4c_4) = l_2 \\
\text{— — — — —} & \text{— — — — —} \\
(m+1)(m+2)(b_m + a_{m+2}) = k_m & -(m+1)[md_m + (m+2)c_{m+2}] = l_m
\end{array}
$$

Aus (3) und (4) folgen die Rekursionsformeln:

$$(5)\qquad a_m = \frac{k_{m-2}}{m(m-1)} - b_{m-2}; \qquad b_m = -\frac{m-1}{m+1}\frac{a_m}{R^2},$$

ausgehend von $b_1 = 0$ und $a_2 = \text{const.}$,

$$(6)\qquad c_m = -\frac{l_{m-2}}{m(m-1)} - \frac{m-2}{m} d_{m-2}; \qquad d_m = -\frac{m-1}{m+1}\frac{c_m}{R^2},$$

ausgehend von $d_1 = 0$ und $c_2 = -\frac{l_0}{2}$.

Daß die damit für $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{U}$ erhaltenen Reihen konvergieren, folgt unter Voraussetzung der absoluten Konvergenz der gegebenen Potenzreihen (1) ohne weiteres aus der Tatsache, daß sich zu den nach den Vorzeichen zusammengefaßten Partialreihen stets konvergente (dem Argument $\theta = 0$ entsprechende) Majoranten angeben lassen.

Schluß.

Durch geeignete Kombination bezw. ev. Spaltung der diskutierten Spannungsfunktionen, verbunden mit dem wichtigen Hilfsmittel der Inversion würden sich natürlich noch mancherlei Lösungen von größerem oder geringerem praktischen Interesse ableiten lassen. Allerdings wird unsere inverse Methode auch oft zu „künstlichen“ Verteilungen führen. Als Beispiel hierfür sei erwähnt, daß die Funktion $F = \frac{1}{12}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$ einen Zustand definiert, bei dem die beiden Orthogonalsysteme der gleichseitigen Hyperbel die Spannungstrajektorien repräsentieren, während die Spannung selbst dem Quadrat des Abstandes vom 0-Punkte proportional ist. Die Lösungen $F = \theta$ und $F = r^2\theta$ (natürlich nur für ein den 0-Punkt nicht umschließendes Gebiet brauchbar) liefern als Spannungstrajektorien die Systeme logarithmischer Spiralen $r \cdot e^{\theta} = \text{const.}$ und $r \cdot e^{-\theta} = \text{const.}$, während die Hauptspannungen in dem einen Falle mit dem Quadrat der Entfernung abnehmen, im andern Fall mit $2\theta - 1$, bezw. $2\theta + 1$ proportional sind. Dagegen gewinnt man, wie Michell (Nr. 19) gezeigt hat, durch Überlagerung zweier Lösungen $r^2\theta$ mit verschiedenem Koordinatenanfang unmittelbar eine praktisch bedeutsame Lösung: die Verteilung in einer von einer Geraden begrenzten Halbebene, die eine über ein Stück der Grenzgeraden gleichmäßig verteilte normale Last trägt. Von hier gelangt man übrigens direkt zur Darstellung des Falls beliebiger normaler Belastung W der Halbebene durch den Ansatz $F = \frac{1}{2\pi}\int^{x} r_1^2\theta_1 \cdot \frac{dW}{dx} \cdot dx$. Man sieht jedenfalls, daß das Studium der Lösungen der Differential-

gleichung $\Delta\Delta F = 0$ noch manche interessante Anwendungen auf ebene elastische Probleme verspricht.

Es erscheint mir nun nicht zweifelhaft, daß eine in ähnlicher Weise durchgeführte Untersuchung der Lösungen der Laméschen Relationen für die Verschiebungen: $\Delta\Delta u = 0$, $\Delta\Delta v = 0$, $\Delta\Delta w = 0$[1]) gleichfalls sich als recht lohnend erweisen würde. So leuchtet z. B. ein, daß sich mit Leichtigkeit mögliche Formen verbogener Platten angeben lassen, wenn die Begrenzung von Kurven nicht zu hoher Ordnung gebildet wird. Bei elliptischer Begrenzung z. B. können die Niveaukurven durch $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = \text{const}$ gegeben sein[2]), bei lemniskatischer Begrenzung durch $x^2 - y^2 - 2c^2 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \text{const.}$, bei Begrenzung durch Kreis und gleichseitige Hyperbel durch $(x^2 - y^2 - R_1^2)(x^2 - y^2 - R_2^2) = \text{const.}$ usw.

Anhang.

Literatur zur Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ (Theorie und Anwendungen).

1. E. Almansi, „Sull' integrazione dell' equazione $\Delta^2\Delta^2 u = 0$". Atti della R. Acc. di Torino XXXI (1895/96).
2. —, „Sulla deformazione della sfera elastica". Memorie di Torino XLVII 1897.
3. —, „Sulla integrazione dell' equazione $\Delta^2\Delta^2 u = 0$". Atti della R. Acc. di Torino XXXIV (1898/99).
4. —, „Sull' integrazione dell' equazione differenziale $\Delta^2\Delta^2 = 0$". Atti della R. Acc. dei Lincei. Rendiconti. Roma Ser. 5, vol. 8, 1 (1899).
5. —, „Sulla ricerca delle funzioni poli-armoniche in un' area semplicemente connessa per date condizioni al contorno". Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo XIII 1899.
6. —, „Sull' integrazione dell' equazione differenziale $\Delta^{2n} = 0$". Annali di Matematica S. 3, II 1899.
7. —, „Integrazione della doppia equazione di Laplace". Atti della R. Acc. dei Lincei. Rendiconti. Roma Ser. 5, vol. 9, 1 1900.
8. Goursat, „Sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$". Bull. de la Soc. Mathém. de France XVI (1888).
9. F. Klein und K. Wieghardt, „Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten". Archiv d. Math. u. Phys. 3. Reihe VIII 1904.

[1]) Bezw. der dafür eintretenden [illegible] Relationen für die erzeugenden Funktionen Somiglianas (Nr. 2, 21).

[2]) $w = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2$ [illegible] liefert offenbar den Fall der gleichmäßig belasteten, am Rande horizontal eingeklemmten elliptischen Platte $\Delta\Delta w = c$, am Rande $w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$.

10. **Lamé**, „Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides", Paris 1866.
11. G. **Lauricella**, „Integrazione dell' equazione $\Delta^2\Delta^2 = 0$ in un campo di forma circolare", Atti della R. Acc. di Torino XXXI (1895/96).
12. —, „Sull' equazione delle vibrazioni delle placche incastrate", Mem. di Torino 2, XLVI (1896).
13. F. **Levi Civita**, „Sull' integrazione dell' equazione $\Delta^2\Delta^2 = 0$", Atti della R. Acc. di Torino XXXIII (1897/98).
14. —, „Sopra una trasformazione in sè stessa della equazione $\Delta_2\Delta_2 = 0$", Venezia 1898 (Tip. Ferrari).
15. E. **Mathieu**, „Sur le mouvement vibratoire des plaques", Journal de Math. 2, XIV (1869).
16. —, Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta u = 0$ et sur l'équilibre d'élasticité d'un corps solide", Journal de Math. 2, XIV (1869).
17. J. H. **Michell**, „On the direct determination of stress in an elastic solid, with applications to the theory of plates", Proc. Lond.. M. Soc. 31 (1899).
18. —, „Elementary distributions of plane stress", Proc. Lond. M. Soc. 32 (1900).
19. —, „The Inversion of plane stress", Proc. Lond. M. Soc. 34 (1901/02).
20. **Somigliana**, „Sulle equazioni della elasticità", Annali di Mat. 2, XVIII (1889/90).
21. —, „Sopra gli integrali della equazioni della isotropia elastica", Nuovo Cimento 3, XXXVI (1894).
22. O. **Venske**, „Zur Integration der Differentialgleichung $\Delta\Delta u = 0$, Gött. Nachr. 1891.
23. K. **Wieghardt**, Über ein Verfahren, verwickelte theoretische Spannungsverteilungen auf experimentellem Wege zu finden. Vortrag im Aachener Bezirksverein deutscher Ingenieure 3. Mai 1905.

Über die elastische Deformation eines kreisförmigen Rings.

Von Th. Weitbrecht in Tübingen.

Ein kreisförmiger Ring, dessen Querschnitt gegenüber seinem Radius sehr klein und zur Mittelebene des Rings symmetrisch sein möge, werde von Kräften angegriffen, die in dieser Ebene wirken. Das Material des Rings setzen wir als homogen voraus. Das Problem ist damit auf ein ebenes beschränkt. An einem solchen Ring denken wir uns, gleichförmig verteilt, zahlreiche homogene radiale Zugstangen angebracht, die auf einer Nabe im Mittelpunkt aufsitzen und in einen Zustand der Spannung versetzt sind, so daß der Ring nach ihrer Anspannung einen etwas kleineren Radius erhält, als in seinem natürlichen Zustand. Die Anzahl der Zugstangen wollen wir so groß annehmen, daß sich die Summe ihrer Wirkungen auf ein endliches Stück des Rings durch das Integral über ein diesem Ringstück entsprechendes

Intervall ersetzen läßt. Diese gespannten Zugstangen, die sich bei der Deformation des Rings verlängern bezw. verkürzen, bedingen einen gewissen Zustand der Starrheit des ganzen Systems, so daß nur kleine Deformationen desselben in Betracht zu ziehen sind. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Verlängerungen und Verkürzungen der Zugstangen in dem Ring selbst beträchtliche Kräfte hervorrufen, welche Komponenten in der Richtung der Tangente an die kreisförmige Achse des Rings besitzen. Sie veranlassen Längenänderungen der Achse, die gegenüber der geringen Änderung der Krümmung nicht von vornherein zu vernachlässigen sind. Man darf daher auf das vorliegende Problem nicht ohne weiteres die gewöhnlichen Biegungsformeln für gekrümmte Stäbe anwenden. Wohl aber sind gewisse zuerst von Winkler[1]) für gekrümmte Stäbe angegebene Beziehungen zwischen den in einem Querschnitt wirkenden Kräften und den Formänderungen, die sie hervorrufen, auch auf unser Problem anwendbar. Diese Formeln dienen zur Herstellung der Differentialgleichungen für die Verschiebungsgrößen der Punkte der Ringachse. Wir werden diese zunächst für den Fall ermitteln, daß der Kreisring an den Endpunkten eines Durchmessers von zwei gleich großen in der Richtung nach dem Mittelpunkt wirkenden Kräften angegriffen wird. Dann werden wir den Fall untersuchen, daß ein Druck von der Nabe aus nach einem festgehaltenen Punkt der Peripherie hin wirkt, so daß der Ring in derselben Weise beansprucht wird, wie etwa ein Fahrrad beim Gebrauch.

Das Nachfolgende ist die Umarbeitung einer Preisschrift, welche 1904 der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Tübingen vorgelegt war; meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor von Brill, sage ich meinen herzlichsten Dank für die mannigfaltige Anregung und Förderung, die ich von seiner Seite erfahren durfte.

§ 1. Herleitung der Differentialgleichungen.

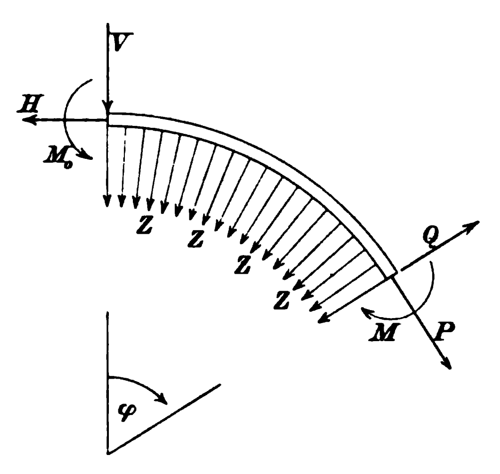
Der Mittelpunkt des Kreisrings sei der Anfangspunkt eines Polarkoordinatensystems (r, φ); $\varphi = 0$ entspreche dem obersten Punkt der Ringachse, φ wachse im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers. Wir denken uns, nachdem durch äußere Kräfte, die etwa im Zentrum oder an der Peripherie wirken, die Deformation eingetreten ist, aus dem aus Ring und Zugstangen bestehenden System durch zwei Querschnitte an der Stelle $\varphi = 0$ und an der beliebigen Stelle φ ein endliches Ringstück mit Teilen der daran befestigten Zugstangen herausgeschnitten; die vor dem Durchschneiden an den durchschnittenen Stellen wirkenden Drucke

---

1) Winkler, Elastizität und Festigkeit § 283.

ersetzen wir durch Kräfte, die in den Schwerpunkten der nun frei gewordenen Querschnitte angreifen, und durch Kräftepaare, welche die Krümmung der Ringachse an diesen Stellen zu vergrößern streben.

An dem Querschnitt bei $\varphi = 0$ bringen wir eine nach dem Mittelpunkt gerichtete Kraft V an; senkrecht zu ihr, in der Richtung der Ringachse, den horizontalen Zug H, dazu ein Kräftepaar M_0. An dem Querschnitt in φ wirke in der Richtung der Tangente an die Ringachse der Zug P, senkrecht dazu die Kraft Q, und das Kräftepaar M. Die Deformation eines an der Stelle φ befindlichen Ringelements, das wir uns durch zwei senkrecht auf der Ringachse stehende, einen sehr kleinen Winkel einschließende Ebenen begrenzt denken, hängt ab von den an dieser Stelle wirkenden Kräften P und Q und dem Kräftepaar M; der Einfluß der an dem Element angebrachten Zugstangen auf die Deformation ist gegen die Wirkung von P, Q und M zu vernachlässigen. Nach dem Vorgang von Kirchhoff[1]) wollen wir statt des gekrümmten Ringelements das eines ursprünglich zylindrischen Stabes untersuchen, und an der gefundenen Formel nachträglich eine der ursprünglichen Krümmung des Rings entsprechende Veränderung anbringen.



P ist die Resultante der zur Ringachse parallel wirkenden Spannungen N der zur Achse parallelen Fasern pro Flächeneinheit des Querschnitts φ. Da das Hookesche Gesetz gilt, so setzen wir

$$N = E\frac{\varDelta d s_y}{ds};$$

dabei bedeutet $\frac{\varDelta d s_y}{ds}$ die Verlängerung der betrachteten Faser pro Längeneinheit, y ihren Abstand von einer zur Ringebene senkrechten, die Achse des Elements enthaltenden Ebene, wo die y von der Innen- nach der Außenseite des Rings wachsen mögen, E den Elastizitätsmodul des Rings. Ferner gilt bei sehr kleinen Querschnitten die Beziehung[2])

(A) $$\frac{\varDelta d s_y}{ds} = \frac{\Delta\, ds}{ds} + \frac{y}{\varrho},$$

1) Kirchhoff, Mechanik, 28. Vorl. § 2 a. E.

2) Grashof, Elast. u. Festk. Nr. 36. Winkler, § 283.

wo $\frac{\Delta ds}{ds}$ die relative Verlängerung der Achse, $\frac{1}{\varrho}$ ihre Krümmung nach der Deformation bedeutet. Diese Formel drückt aus, daß die Längsänderungen der Fasern so vor sich gehen, als ob ursprünglich ebene Querschnitte bei der Deformation eben blieben. Man geht zu einem Ring mit der ursprünglichen Krümmung $\frac{1}{r}$ über, indem man die Annahme macht, daß auch für diesen jede zur Achse parallele Faser für sich jenem Gesetz folgt, daß also nur an die Stelle von $\frac{1}{\varrho}$ die *Änderung* der Krümmung, $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}$ tritt[1]), für die man $\frac{\Delta d\varphi}{ds}$ setzen kann, wo $r\,d\varphi = ds$ ist. Für einen Ring von der ursprünglichen Krümmung $\frac{1}{r}$ ist

$$ds_y = ds\,\frac{r+y}{r}$$

und wegen $N = E\frac{\Delta ds_y}{ds_y}$ geht (A) dann über in

$$N = E\left(\frac{\Delta ds}{ds} + y\frac{\Delta d\varphi}{ds}\right)\frac{r}{r+y}.$$

Bildet man nun[2])

$$P = \int N df \quad \text{und} \quad M = \int N y\, df,$$

wo df ein Element des Querschnitts bedeutet und die Integration sich über den ganzen Querschnitt erstreckt, und berücksichtigt man dabei, daß die Achse des Ringelements durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht, sowie daß y klein gegen r ist, so erhält man, wenn man die so entstehenden Gleichungen nach $\frac{\Delta ds}{ds}$ und $\frac{\Delta d\varphi}{ds}$ auflöst und dabei

$$\int df = F, \quad \int y^2 df = W$$

setzt:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\Delta ds}{ds} &= \frac{P}{EF} + \frac{M}{EFr}, \\ \frac{\Delta d\varphi}{ds} &= \frac{P}{EFr} + \frac{M}{EFr^2} + \frac{M}{EW}. \end{aligned}$$

Dies sind die Winklerschen Formeln.[3]) Sie verwandeln sich in die Differentialgleichungen des Problems, indem man für s, φ Polarkoordinaten und für P, M die der Annahme über die Zugstangen und die äußeren Kräfte entsprechenden Werte einsetzt.

Die Ringachse denken wir uns zunächst durch die Zugstangen gespannt, aber immer noch kreisförmig. Ein Punkt derselben, (r, φ),

---

1) Kirchhoff l. c. 2) Winkler, § 63.
3) Winkler, § 283; Grashof Nr. 168.

werde dann durch die Deformation an den Ort $\left(r+q,\ \varphi+\frac{p}{r}\right)$ versetzt, so daß also q die Zunahme des Radius Vektor, $\frac{p}{r}$ die Zunahme des Winkels φ bedeutet. Die Deformation des Rings ist vollkommen beschrieben, wenn p und q als Funktionen von φ bekannt sind. Zunächst sind also die linken Seiten der Gleichungen (1) als Funktionen von p, q und φ auszudrücken. Nennt man die Bogenlänge der undeformierten (aber gespannten) Achse des Rings s, die der deformierten s', von $\varphi = 0$ an gerechnet, so läßt sich mit Vernachlässigung von Ausdrücken zweiter Ordnung in p und q und ihren Ableitungen nach φ setzen

$$\Delta ds = (r+q)\,d\left(\varphi+\frac{p}{r}\right) - r\,d\varphi = q\,d\varphi + p'\,d\varphi,$$

wo der Akzent eine Differentiation nach φ bedeutet; hieraus

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{q+p'}{r}. \tag{2}$$

In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{p'-q''}{r^2} \tag{3}$$

ist.

Weiter sind die Größen P und M als Funktionen des Winkels φ und gewisser Konstanten (Belastung, ursprünglicher Spannung, Abmessungen und Materialkonstanten des Rings) auszudrücken.

Die Zugstangen denken wir uns, bevor die äußeren Kräfte angebracht werden, also vor Eintritt der Deformation, bereits in gespanntem Zustand derart, daß sie (senkrecht) auf die Längeneinheit der Ringachse den Zug Z_0 ausüben, während der hierdurch in der Richtung der Längsachse des Ringes hervorgerufene Gesamtdruck P_1 sein möge. Es ist nun leicht zu sehen, daß

$$P_1 = -Z_0 r$$

ist. Ein durch die Querschnitte $-\varphi$ und $+\varphi$ begrenztes Stück des Rings nämlich ist in diesem gespannten Zustand nur dann im Gleichgewicht, wenn

$$2P_1 \sin\varphi = -\int_{-\varphi}^{+\varphi} Z_0 \cos\varphi\, r\, d\varphi = -2Z_0 \sin\varphi \cdot r$$

ist. Der gesamte Druck P' an einer Stelle φ nach der Deformation setzt sich zusammen aus P_1 und dem durch die Deformation hervorgerufenen Druck P, sodaß man hat

$$P' = P + P_1.$$

Da die Deformation des Rings als sehr klein vorausgesetzt wird, so werden die Kräfte Z, welche die Zugstangen auf den Ring ausüben, auch nach der Deformation noch senkrecht auf den Ringelementen stehen und den Verlängerungen der Zugstangen proportional sein, sodaß man hat

$$Z = Z_0 + aq.$$

Die Bedeutung der Größe a ergibt sich folgendermaßen. Der Ring werde dadurch in den gespannten Zustand versetzt, daß die Speichen, die ursprünglich, vom Mittelpunkt des Rings aus gerechnet, die Länge $r_2 < r$ besaßen, an dem Ring mit dem ursprünglichen Radius $r_1 > r$ befestigt wurden, wobei sie sich sämtlich auf die Länge r verlängerten, während sich der Ring zusammenzog. Die Nabe im Mittelpunkt des Rings habe den Radius ϱ, der Ringquerschnitt bilde etwa ein Quadrat von der Seitenlänge b, derjenige der Zugstangen sei ein schmales Rechteck, dessen größere Seite ebenfalls die Länge b haben möge. Nennt man nun den Querschnitt einer Zugstange m, die Anzahl der an der Längeneinheit der Peripherie angreifenden Zugstangen n, und denkt man sich dieselben auf der Nabe so befestigt, daß sich je zwei längs der Seite b berühren, so hat man, wenn E_1 der Elastizitätsmodul der Zugstangen ist,

$$Z_0 = m \cdot n \cdot E_1 \frac{r - r_2}{r_2 - \varrho}.$$

Werden nun äußere Kräfte angebracht, so erfolgt eine Deformation des Rings, durch welche Z_0 in Z, r in $r + q$ und n in $\frac{n \cdot r}{r + q}$ oder, da q gegen r sehr klein ist, wieder in n übergeht, und man hat aus

$$Z = Z_0 + aq,$$

$$a = \frac{m \cdot n \cdot E_1}{r_2 - \varrho}.$$

Nun ist $\frac{m}{b} \cdot n = \frac{\varrho}{r}$, daher $a = \frac{\varrho \cdot E_1 \cdot b}{r(r_2 - \varrho)}$.

Setzt man jetzt die Kräfte, die an dem von den Querschnitten $\varphi = 0$ und φ begrenzten Ringstück und an den (stetig verteilt gedachten) Speichen wirken, ins Gleichgewicht, zuerst hinsichtlich der Richtung P', so erhält man

$$P' + V \sin\varphi - H \cos\varphi + \int_0^\varphi Z \sin(\varphi - \psi)\, r\, d\psi = 0,$$

wo ψ einen veränderlichen Winkel zwischen 0 und φ bedeutet. Mit Rücksicht auf die Gleichung

$$P_1 = - Z_0 r,$$

sowie auf die Beziehungen

$$P' = P_1 + P \quad \text{und} \quad Z = Z_0 + aq$$

wird

$$(4)\qquad \begin{aligned} P = H\cos\varphi - V\sin\varphi + Z_0 r\cos\varphi + ar\cos\varphi\int_0^\varphi q\sin\varphi\, d\varphi \\ - ar\sin\varphi\int_0^\varphi q\cos\varphi\, d\varphi. \end{aligned}$$

Die Gleichsetzung der Momente ergibt

$$M = M_0 + Vr\sin\varphi + Hr(1-\cos\varphi) + \int_0^\varphi Zr^2 d\psi \sin(\varphi - \psi),$$

oder

$$\begin{aligned} M = M_0 + Vr\sin\varphi + Hr(1-\cos\varphi) + Z_0 r^2(1-\cos\varphi) \\ + ar^2\left[\sin\varphi\int_0^\varphi q\cos\varphi\, d\varphi - \cos\varphi\int_0^\varphi q\sin\varphi\, d\varphi\right]. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der in (4) und (5) angegebenen Werte von P und M ergibt sich aus (1) und (2)

$$(6)\qquad (q + p')EF = M_0 + Hr + Z_0 r^2.$$

Multiplizieren wir die Gleichung (3) mit r und subtrahieren sie von (2), so erhalten wir mit Rücksicht auf (1)

$$(q + q'')EW = -Mr^2.$$

Differenziert man diese Gleichung zweimal nach φ und addiert, so erhält man mit Rücksicht auf (5)

$$(q + 2q'' + q^{IV})\frac{EW}{r^2} = -(M_0 + Hr + Z_0 r^2 + ar^2 q),$$

und hieraus, wenn man

$$\frac{ar^4}{EW} + 1 = a_1$$

setzt, durch nochmalige Differentiation

$$(7)\qquad a_1 q' + 2q''' + q^V = 0.$$

Aus dieser Differentialgleichung und den Gleichungen (5) und (6) lassen sich p und q als Funktionen von φ berechnen. Sie gilt für jede Deformation eines mit gespannten Zugstangen versehenen Rings; wenn an mehreren Stellen äußere Kräfte angreifen, so ist sie für jedes freie Ringstück besonders anzusetzen. Dem Fall, daß keine Zugstangen wirken, entspricht $a_1 = 1$. In diesem Fall wird die Längenänderung

der Achse außerordentlich klein sein; setzt man also in (2) $\Delta ds = 0$, so wird

$$q = -p',$$

und (7) geht über in

$$p'' + 2p^{IV} + p^{VI} = 0.$$

Diese einem Reif *ohne* Zugstangen entsprechende Differentialgleichung hat schon Herr Lamb[1]) aufgestellt und behandelt.

§ 2. Erste Anwendung.

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Fall, daß der Ring in den Punkten $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ von zwei gleich großen entgegengesetzt gerichteten radialen Drucken $2V$ angegriffen wird. Dann ist

$$q_0' = 0; \quad q'_{\frac{\pi}{2}} = 0; \quad q'_\pi = 0;$$

$$p_0 = 0; \quad p_{\frac{\pi}{2}} = 0; \quad p_\pi = 0.$$

Mit Hilfe der Substitution

$$q' = e^{t\varphi}$$

erhält man zunächst aus (7)

$$t = \pm\sqrt{-1 \pm \sqrt{\frac{-ar^4}{EW}}};$$

setzt man $\sqrt{-1 + i\sqrt{\frac{ar^4}{EW}}} = \alpha + i\beta$, so kommt

(8) $$\alpha^2 - \beta^2 = -1; \quad 2\alpha\beta = \sqrt{\frac{ar^4}{EW}}$$

und hieraus

$$\alpha = \sqrt{-\tfrac{1}{2} + \sqrt{\frac{ar^4 + EW}{4EW}}}; \quad \beta = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \sqrt{\frac{ar^4 + EW}{4EW}}}.$$

Die vier Werte von t sind

$$t_1 = \alpha + i\beta; \quad t_2 = \alpha - i\beta; \quad t_3 = -\alpha + i\beta; \quad t_4 = -\alpha - i\beta.$$

Dem Fall eines von Zugstangen *freien* Rings entspricht $\alpha = 0$. Dann werden je zwei Werte von t einander gleich. Um trotzdem die nötige Zahl von Konstanten zu erhalten, setzen wir

$$q' = e^{\alpha\varphi}(c \cdot e^{i\beta\varphi} + d \cdot e^{-i\beta\varphi}) + \frac{e^{\alpha\varphi} - e^{-\alpha\varphi}}{2\alpha}(f \cdot e^{i\beta\varphi} + g \cdot e^{-i\beta\varphi}),$$

wo c, d, f und g willkürliche Konstanten sind. Wegen $q_0' = 0$ ergibt sich hieraus mit Hilfe neuer Konstanten A, C, D:

(9) $$q' = A \cdot e^{\alpha\varphi} \sin\beta\varphi + \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\varphi}{\alpha}[C\cos\beta\varphi + D\sin\beta\varphi],$$

1) Proc. Lond. Math. Soc. XIX, 1888, pag. 369 f.

und hieraus wegen $q'_{\frac{\pi}{2}} = 0$ und $q'_\pi = 0$

$$C = -\frac{A \cdot \alpha \sin \beta\pi}{\mathfrak{Sin}\, \alpha\pi}; \quad D = \frac{A \cdot \alpha (\cos \beta\pi - e^{\alpha\pi})}{\mathfrak{Sin}\, \alpha\pi}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\alpha^2 + \beta^2 = t^2 \quad \text{und} \quad \alpha = t \cos \tau; \; \beta = t \sin \tau,$$

und berücksichtigt, daß

$$\int e^{\alpha\varphi} \sin \beta\varphi \, d\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}}{t} \sin(\beta\varphi - \tau)$$

und
$$\int e^{\alpha\varphi} \cos \beta\varphi \, d\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}}{t} \cos(\beta\varphi - \tau)$$

ist, so erhält man durch Integration von (9)

$$(11) \quad \begin{aligned} q = A\frac{e^{\alpha\varphi}}{t} \sin(\beta\varphi - \tau) + \frac{C}{\alpha t^2}(\alpha \cos \beta\varphi \, \mathfrak{Cof}\, \alpha\varphi + \beta \sin \beta\varphi \, \mathfrak{Sin}\, \alpha\varphi) \\ + \frac{D}{\alpha t^2}(\alpha \sin \beta\varphi \, \mathfrak{Cof}\, \alpha\varphi - \beta \cos \beta\varphi \, \mathfrak{Sin}\, \alpha\varphi) + C', \end{aligned}$$

wo C' eine noch zu bestimmende Integrationskonstante bedeutet. Dieser Ausdruck geht mit Hilfe von Beziehungen wie:

$$\mathfrak{Sin}\, \alpha\pi \cdot e^{\alpha(\pi - \varphi)} - \mathfrak{Cof}\, \alpha(\pi - \varphi) \cdot e^{\alpha\pi} = - \mathfrak{Cof}\, \alpha\varphi$$

in die Form über

$$(11a) \quad \begin{aligned} q = \frac{-A}{t^2 \mathfrak{Sin}\, \alpha\pi}[\alpha(\sin \beta\varphi \, \mathfrak{Cof}\, \alpha(\pi - \varphi) + \mathfrak{Cof}\, \alpha\varphi \sin \beta(\pi - \varphi)) \\ + \beta(\mathfrak{Sin}\, \alpha\varphi \cos \beta(\pi - \varphi) + \cos \beta\varphi \, \mathfrak{Sin}\, \alpha(\pi - \varphi))] + C'. \end{aligned}$$

Für p finden wir mit Rücksicht auf (6)

$$p = \frac{M_0 + Hr + Z_0 r^2}{EF}\varphi - \int q \, d\varphi - \frac{2D'\alpha\beta}{t^4},$$

wo D' eine neue Konstante bedeutet. Diese bestimmt sich mit Rücksicht auf $p_0 = 0$, sowie auf (10) und (11) zu:

$$D' = A \frac{\cos \beta\pi - \mathfrak{Cof}\, \alpha\pi}{\mathfrak{Sin}\, \alpha\pi}.$$

Mit Hilfe derselben Beziehungen, welche auf Gleichung (11a) führten, erhält nun p die Form

$$(12) \quad \begin{aligned} p = \left(\frac{M_0 + Hr + Z_0 r^2}{EF} - C'\right)\varphi - \frac{2A\alpha\beta}{t^4 \mathfrak{Sin}\, \alpha\pi}(\cos \beta\pi - \mathfrak{Cof}\, \alpha\pi) \\ - \frac{A}{t^2 \mathfrak{Sin}\, \alpha\pi}\Big[\frac{2\alpha\beta}{t^2}(\mathfrak{Cof}\, \alpha(\pi - \varphi) \cos \beta\varphi - \cos \beta(\pi - \varphi) \, \mathfrak{Cof}\, \alpha\varphi) \\ - \mathfrak{Sin}\, \alpha(\pi - \varphi) \sin \beta\varphi + \sin \beta(\pi - \varphi) \, \mathfrak{Sin}\, \alpha\varphi\Big], \end{aligned}$$

wo die Konstanten M_0, H, C', A noch zu bestimmen sind. Die Bedingungen $p_{\frac{\pi}{2}} = 0$ und $p_\pi = 0$ führen beide auf die Gleichung

$$(13)\quad \left(\frac{M_0 + Hr + Z_0 r^2}{EF} - C'\right)\pi + \frac{4\alpha\beta A}{t^4 \operatorname{Sin}\alpha\pi}(\operatorname{Cof}\alpha\pi - \cos\beta\pi) = 0.$$

Bildet man die Gleichung

$$(q + q'')EW = -Mr^2$$

für $\varphi = 0$ und für $\varphi = \pi$, so erhält man

$$(14)\qquad -M_0 = C'\frac{EW}{r^2} + \frac{2A\cdot\alpha\beta\cdot EW}{t^2\quad r^2}\cdot\frac{\alpha\operatorname{Sin}\alpha\pi - \beta\sin\beta\pi}{\operatorname{Sin}\alpha\pi}.$$

Berücksichtigt man weiter, daß

$$q_0 = q_\pi \quad \text{und} \quad q_0'' = q_\pi'' \text{ ist,}$$

und subtrahiert man die eine der beiden für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ gebildeten Gleichungen von der andern, so kommt

$$(15)\qquad 2H + 2Z_0 r + ar\int_0^\pi q\sin\varphi d\varphi = 0.$$

Da

$$\int_0^\pi q\sin\varphi d\varphi = q_\pi + q_0 + \int_0^\pi q'\cos\varphi d\varphi$$

ist, so ist zunächst das Integral

$$\int_0^\pi q'\cos\varphi d\varphi$$

zu berechnen. Zu dem Zweck führen wir die Bezeichnungen ein

$$\int e^{\alpha\varphi}\sin\beta\varphi\sin\varphi d\varphi = X,$$
$$\int e^{\alpha\varphi}\sin\beta\varphi\cos\varphi d\varphi = Y,$$
$$\int e^{\alpha\varphi}\cos\beta\varphi\sin\varphi d\varphi = X',$$
$$\int e^{\alpha\varphi}\cos\beta\varphi\cos\varphi d\varphi = Y',$$
$$\int e^{\alpha\varphi}\sin\beta\varphi d\varphi = U,$$
$$\int e^{\alpha\varphi}\cos\beta\varphi d\varphi = U',$$

wo

$$U = \frac{e^{\alpha\varphi}}{t}\sin(\beta\varphi - \tau),$$

$$U' = \frac{e^{\alpha\varphi}}{t}\cos(\beta\varphi - \tau)$$

ist. Durch partielle Integration der Ausdrücke X bis Y' erhalten wir Beziehungen wie:

$$X = U\sin\varphi - \int U\cos\varphi\, d\varphi,$$

welche auf die Relationen führen:

$$\begin{aligned}
X \quad + \frac{\alpha}{t^2}Y \qquad\qquad - \frac{\beta}{t^2}Y' &= U\sin\varphi\\
-\frac{\alpha}{t^2}X \quad + Y \quad + \frac{\beta}{t^2}X' \qquad\quad &= U\cos\varphi\\
\frac{\beta}{t^2}Y \quad + X' \quad + \frac{\alpha}{t^2}Y' &= U'\sin\varphi\\
-\frac{\beta}{t^2}X \qquad\quad - \frac{\alpha}{t^2}X' \quad + Y' &= U'\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Aus diesen vier Gleichungen ergibt sich mit Rücksicht auf (8)

$$\begin{aligned}
X &= U\sin\varphi - U\cos\varphi\frac{t^4+1}{4t^2\alpha\beta^2} + \frac{U'\sin\varphi}{2\alpha\beta} + \frac{U'\cos\varphi}{2\beta};\\
Y &= U\cos\varphi + U\sin\varphi\frac{t^4+1}{4t^2\alpha\beta^2} + \frac{U'\cos\varphi}{2\alpha\beta} - \frac{U'\sin\varphi}{2\beta};\\
X' &= U'\sin\varphi - U'\cos\varphi\frac{t^4+1}{4t^2\alpha\beta^2} - \frac{U\sin\varphi}{2\alpha\beta} - \frac{U\cos\varphi}{2\beta};\\
Y' &= U'\cos\varphi + U'\sin\varphi\frac{t^4+1}{4t^2\alpha\beta^2} - \frac{U\cos\varphi}{2\alpha\beta} + \frac{U\sin\varphi}{2\beta}.
\end{aligned}$$

Nun läßt sich $\int_0^\pi q'\cos\varphi\, d\varphi$ in der Form schreiben

$$\int_0^\pi q'\cos\varphi\, d\varphi = A[Y]_0^\pi + \frac{C}{2\alpha}[Y']_0^\pi - \frac{C}{2\alpha}[Y'_{-\alpha}]_0^\pi + \frac{D}{2\alpha}[Y]_0^\pi - \frac{D}{2\alpha}[Y_{-\alpha}]_0^\pi,$$

wo der Index $-\alpha$ bedeutet: gebildet für $-\alpha$ statt für α, und die eckigen Klammern mit den angesetzten Grenzen die Differenzen für die obere und untere Grenze bedeuten. Berechnet man diese aus den angegebenen Ausdrücken, so erhält man mit Rücksicht auf (10) den einfachen Ausdruck

$$\int_0^\pi q'\cos\varphi\, d\varphi = \frac{A}{\alpha\beta\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\pi}(\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\pi + \beta\sin\beta\pi).$$

Gleichung (15) erhält daher die Form

$$(15a)\qquad H = -Z_0 r - ar(A\lambda + C'),$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{\beta \sin \beta\pi - \alpha \operatorname{Sin} \alpha\pi}{2\alpha\beta t^2 \operatorname{Sin} \alpha\pi} = \lambda$$

gesetzt wurde.

Andererseits findet sich durch Elimination von M_0 aus (13) und (14)

$$(16)\qquad H = -Z_0 r - A\mu + C'\left(\frac{EW}{r} + \frac{EF}{r}\right),$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{4\alpha\beta EF}{\pi r t^4 \operatorname{Sin} \alpha\pi}(\operatorname{Cos} \alpha\pi - \cos\beta\pi) - \frac{2\alpha\beta EW}{r^3 t^2 \operatorname{Sin} \alpha\pi}(\alpha \operatorname{Sin} \alpha\pi - \beta \sin \beta\pi) = \mu$$

gesetzt wurde. Die Elimination von H aus (15a) und (16) liefert

$$C' = \frac{Ar^3(\mu - ar\lambda)}{ar^4 + EW + EFr^2} = \frac{4\alpha\beta r^2 EFA(\operatorname{Cos} \alpha\pi - \cos\beta\pi)}{(ar^4 + EW + r^2 EF)\pi t^4 \operatorname{Sin} \alpha\pi}.$$

Es ist noch A als Funktion von V zu bestimmen. Aus der Gleichung

$$(q + q'')EW = -Mr^2$$

folgt mit Rücksicht auf $q_0' = 0$

$$\left(\frac{dM}{ds}\right)_{\varphi=0} = -q_0''' \cdot \frac{EW}{r^3};$$

nun findet man aber aus (5)

$$\left(\frac{dM}{ds}\right)_{\varphi=0} = V,$$

ferner ist nach (9) mit Rücksicht auf (10)

$$q_0''' = 2\alpha\beta A \frac{\cos\beta\pi - \operatorname{Cos} \alpha\pi}{\operatorname{Sin} \alpha\pi},$$

daher

$$A = \frac{Vr^3}{2EW\alpha\beta} \cdot \frac{\operatorname{Sin} \alpha\pi}{\operatorname{Cos} \alpha\pi - \cos\beta\pi}.$$

Die Größen p und q stellen sich somit folgendermaßen dar:

$$(17)\qquad \begin{aligned} q = \frac{Vr^3}{EWt^2}\Bigg\{&\frac{1}{2\alpha\beta(\cos\beta\pi - \operatorname{Cos} \alpha\pi)}[\alpha(\sin\beta\varphi \operatorname{Cos} \alpha(\pi-\varphi) + \operatorname{Cos} \alpha\varphi \sin\beta(\pi-\varphi)) \\ &+ \beta(\operatorname{Sin} \alpha\varphi \cos\beta(\pi-\varphi) + \cos\beta\varphi \operatorname{Sin} \alpha(\pi-\varphi))] + \frac{EFr^2}{(ar^4 + EW + EFr^2)\pi t^2}\Bigg\} \\ p = \frac{Vr^3}{EWt^4}\Bigg\{&\frac{1}{2\alpha\beta(\cos\beta\pi - \operatorname{Cos} \alpha\pi)}[2\alpha\beta(\operatorname{Cos} \alpha(\pi-\varphi)\cos\beta\varphi - \cos\beta(\pi-\varphi)\operatorname{Cos} \alpha\varphi) \\ &- t^2(\operatorname{Sin} \alpha(\pi-\varphi)\sin\beta\varphi - \sin\beta(\pi-\varphi)\operatorname{Sin} \alpha\varphi)] - \frac{2\varphi}{\pi} + 1\Bigg\}. \end{aligned}$$

Da die Gleichungen (4) und (5) nur für ein Ringstück gelten, an dem außer V keine äußeren Kräfte angreifen, so gelten auch die gefundenen Ausdrücke für p und q nur für Werte von φ zwischen 0 und π. Offenbar aber würde man für die Deformation des andern Halbrings genau dieselben Ausdrücke in ψ erhalten, wenn man $\varphi - \pi = \psi$ setzte, also den Anfangsradius nach $\varphi = \pi$ legte. Die Größen p und q für Werte von φ zwischen π und 2π gehen also aus (17) hervor durch Vertauschung von φ mit $\varphi - \pi$.

Daß die Ausdrücke (17) als Funktionen von φ nicht die Periode 2π besitzen, ist ein Mangel, den sie bekanntlich mit den Lösungen aller derjenigen elastischen Probleme teilen, welche diskontinuierlich wirkende endliche Kräfte, wie hier die auf die Peripherie wirkende Angriffskraft $2V$, voraussetzen.[1]) Die Diskontinuität, die an den Stellen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ auftritt[2]), macht sich übrigens erst bei q''' und p^{IV} bemerklich. Es wird

$$[q''']_{2\pi}^{0} = -\frac{2Vr^3}{EW} \quad \text{und} \quad [p^{IV}]_{2\pi}^{0} = +\frac{2Vr^3}{EW}.$$

§ 3. Zweite Anwendung.

Wir behandeln noch die Deformation eines Rings, auf den im Punkte $\varphi = 0$ eine Last $2V$ gegen die Nabe hin drückt, während diese festgehalten wird und keine weiteren Kräfte angreifen.

Weil wieder

$$q_0' = 0$$

ist, wird:

$$q' = A \cdot e^{\alpha\varphi} \sin\beta\varphi + \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\varphi}{\alpha}\,[C\cos\beta\varphi + D\sin\beta\varphi].$$

Statt $q'_{\frac{\pi}{2}} = 0$ und $q'_{\pi} = 0$ hat man jetzt

$$q'_{\pi} = 0 \quad \text{und} \quad q'_{2\pi} = 0,$$

und es wird

$$C = \frac{-A\cdot\alpha\sin 2\beta\pi}{\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi}; \quad D = \frac{A\alpha\left(\cos 2\beta\pi - e^{2\alpha\pi}\right)}{\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi}.$$

Mit Rücksicht auf diese Werte erhält man

$$q = \frac{-A}{t^2\,\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi}\,[\alpha(\sin\beta\varphi\,\mathfrak{Cof}\,\alpha(2\pi-\varphi) + \mathfrak{Cof}\,\alpha\varphi\sin\beta(2\pi-\varphi))$$
$$+ \beta(\mathfrak{Sin}\,\alpha\varphi\cos\beta(2\pi-\varphi) + \cos\beta\varphi\,\mathfrak{Sin}\,\alpha(2\pi-\varphi))] + C',$$

wo C' noch zu bestimmen ist. Ferner ergibt sich aus

$$p = \frac{M_0 + Hr + Z_0 r^2}{EF}\,\varphi - \int q\,d\varphi - \frac{2D'\alpha\beta}{t^4}$$

1) cfr. z. B. Love, treatise on the theory of elasticity II, arts. 219 f.
2) cfr. Grashof, Nr. 48.

wegen $p_0 = 0$

$$D' = A\frac{\cos 2\beta\pi - \mathfrak{Cof}\, 2\alpha\pi}{\mathfrak{Sin}\, 2\alpha\pi}.$$

Die Bedingungen

$$p_\pi = 0 \quad \text{und} \quad p_{2\pi} = 0$$

führen beide zu der Gleichung

$$(18) \qquad \left(\frac{M_0 + Hr + Z_0 r^2}{EF} - C'\right)\pi - \frac{2D'\alpha\beta}{t^4} = 0.$$

Zur Bestimmung der Konstanten M_0, H, C' und A bilde man wie beim vorigen Problem die Gleichung

$$(q + q'')EW = -Mr^2$$

für $\varphi = 0$ und für $\varphi = \pi$. Berechnet man mit Hilfe der für q' und q gefundenen Ausdrücke die Größen q_0, q_0'', q_π und q_π'', so erhält man für $\varphi = 0$

$$(19) \qquad C' - \frac{2\alpha\beta}{t^2\,\mathfrak{Sin}\, 2\alpha\pi}A(\beta\sin 2\beta\pi - \alpha\,\mathfrak{Sin}\, 2\alpha\pi) = -\frac{M_0 r^2}{EW}$$

und für $\varphi = \pi$

$$(20) \qquad -(q_\pi + q_\pi'')\frac{EW}{r^2} = M_0 + 2Hr + 2Z_0 r^2 + ar^2\int_0^\pi q\sin\varphi\, d\varphi.$$

Da nun

$$\int_0^\pi q\sin\varphi\, d\varphi = q_\pi + q_0 + \int_0^\pi q'\cos\varphi\, d\varphi$$

ist, so haben wir zunächst das Integral

$$\int_0^\pi q'\cos\varphi\, d\varphi$$

zu berechnen. Wir verfahren so wie im vorigen Fall und erhalten mit Benutzung der Werte von C und D

$$\int_0^\pi q'\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{A}{\alpha\beta\,\mathfrak{Sin}\, 2\alpha\pi}[\beta\sin\beta\pi\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\pi + \alpha\cos\beta\pi\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\pi + \tfrac{1}{2}(\alpha\,\mathfrak{Sin}\, 2\alpha\pi + \beta\sin 2\beta\pi)].$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung

$$4EW\cdot\alpha^2\beta^2 = ar^4$$

geht nun Gleichung (20) über in

$$\text{(20a)}\qquad \begin{aligned} &M_0 + 2Hr + 2Z_0r^2 + C'\frac{2ar^4+EW}{r^2}\\ &+\frac{Aar^2}{2\alpha\beta t^2\,\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi}(\beta\sin 2\beta\pi - \alpha\,\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi) = 0. \end{aligned}$$

Aus (18) findet man

$$H = \left(A\frac{\lambda}{\pi} + C'\right)\frac{EF}{r} - \frac{M_0}{r} - Z_0r,$$

wo zur Abkürzung

$$\lambda = \frac{2\alpha\beta}{t^4\,\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi}(\cos 2\beta\pi - \mathfrak{Cof}\,2\alpha\pi)$$

gesetzt wurde. Trägt man H in (20a) ein und eliminiert M_0 aus (20a) und (19), so erhält man

$$C' = \frac{2\alpha\beta r^2 EFA\,(\mathfrak{Cof}\,2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi)}{(ar^4+EW+r^2EF)\pi t^4\,\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi}.$$

Zur Bestimmung von A bilden wir wieder

$$-q_0'''\frac{EW}{r^3} = V$$

und finden

$$A = \frac{Vr^3}{2\alpha\beta EW}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi}{\mathfrak{Cof}\,2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi}.$$

Man erhält schließlich für p und q Ausdrücke, die aus den entsprechenden Ausdrücken (17) dadurch hervorgehen, daß man 2π an die Stelle von π setzt.

§ 4. Diskussion der Resultate.

Um ein Bild von den Deformationen unserer Kreisringe zu gewinnen, und um den Einfluß der Zugstangen beurteilen zu können, wollen wir zunächst die Resultate des § 2 auf den Fall anwenden, daß keine Zugstangen vorhanden sind. In diesem Falle ist

$$Z_0 = 0;\quad a = 0;\quad \alpha = 0;\quad \beta = 1,$$

und man erhält nach Ausführung einiger einfacher Grenzübergänge für $0 < \varphi < \pi$

$$q = -\frac{2Vr^3}{EW}\left(\frac{\sin\varphi}{4} + \frac{\cos\varphi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \frac{r^2F}{\pi(r^2F+W)}\right),$$

$$p = +\frac{2Vr^3}{EW}\left(\frac{\varphi}{\pi} - \frac{\sin\varphi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \frac{1-\cos\varphi}{2}\right).$$

Für $\pi < \varphi < 2\pi$ ist in diesen Ausdrücken $\varphi - \pi$ an Stelle von φ zu setzen. Speziell wird[1])

1) Winkler, § 369.

$$
(21) \quad \begin{aligned}
q_0 &= -\frac{2Vr^3}{EW}\,\frac{(\pi^2-8)r^2F+\pi^2W}{8\pi(r^2F+W)};\\
q_{\frac{\pi}{2}} &= -\frac{2Vr^3}{EW}\cdot\frac{(4-\pi)r^2F-\pi W}{4\pi(r^2F+W)}.
\end{aligned}
$$

Wir wollen an einem Zahlenbeispiel diese Größen, welche die größte Verlängerung und die größte Verkürzung eines Radius darstellen, vergleichen mit denjenigen, welche die Formeln des § 2 liefern. Wir wählen für den Ring ein solches Material, daß seine elastische Reaktion auf Zug und Druck durch denselben Elastizitätsmodul charakterisiert ist, etwa Stahl. Ferner müssen wir den Voraussetzungen der Rechnung gemäß den Radius des Rings sehr groß wählen gegen die Dimensionen des Querschnitts. Wir setzen dementsprechend

$$
r = 1000\text{ mm};\quad b = 1\text{ mm};\quad \varrho = 10\text{ mm};\quad F = 1;\quad W = \tfrac{1}{12};
$$
$$
E = 24\,000\text{ kgmm}^{-2};\quad E_1 = 20\,000\text{ kgmm}^{-2}.
$$

Was die Festsetzung der ursprünglichen Spannung der Zugstangen betrifft, so machen wir die Annahme, das Material des Rings sei so beschaffen, daß eher die Deformation der Zugstangen als die des Rings die Proportionalitätsgrenze[1]) überschreite; wir haben dann bei der Festsetzung der oberen Grenze dieser Spannung nur die Proportionalitätsgrenze der Zugstangen zu berücksichtigen. Wir nehmen sie zu 10 kgmm^{-2} an.[2]) Setzen wir

$$
E_1\frac{r-r_2}{r_2-\varrho} = 10,
$$

so wird $r - r_2 = 0{,}495$ mm, woraus sich als obere Grenze für a

$$
a = 0{,}20212126
$$

ergibt. Die untere Grenze für a ergibt sich aus $r = r_2$:

$$
a = \frac{mnE_1}{r-\varrho} = 0{,}20202020\ldots
$$

Wir wollen sehr nahe an beide Grenzwerte herangehen und noch für einen mittleren Wert die Deformation berechnen. Setzt man

$$
\begin{aligned}
a_{\min} &= 0{,}2020202021,\\
a &= 0{,}20207,\\
a_{\max} &= 0{,}20212125,
\end{aligned}
$$

so findet sich α und β annähernd gleich 71; infolgedessen sind die hyperbolischen Funktionen von $\alpha\pi$ nicht mehr von $\frac{1}{2}e^{\alpha\pi}$ zu unterscheiden;

1) Cfr. Bach, Elast. u. Festigk. § 2.
2) Bach, § 9 S. 31, Probestab IVc.

ihnen gegenüber dürfen endliche Größen als verschwindend klein angesehen werden. Dadurch vereinfacht sich die Rechnung bedeutend; es wird

$$q_0 = C' - \frac{A\beta}{t^2}; \quad q_{\frac{\pi}{2}} = C';$$

$$C' = \frac{4\alpha\beta r^2 EFA}{(ar^4 + EW + r^2EF)\pi t^4}; \quad A = \frac{Vr^3}{2\alpha\beta EW}.$$

Die numerischen Werte der in der Rechnung auftretenden Größen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Urspr. Spannung	minimal	mittel	maximal
a	0,2020202021	0,20207	0,20212125
$r - r_2$	$4 \cdot 10^{-9}$	0,244	0,495
$Z_0 : mn$	$80,808081 \cdot 10^{-9}$	4,930508	10
α	70,8843	70,8895	70,8939
β	70,89139	70,8965	70,900957
$q_{\frac{\pi}{2}} : - q_0$	$9,5446 \cdot 10^{-4}$	$9,5418 \cdot 10^{-4}$	$9,5392 \cdot 10^{-4}$
$2V$	$22,8188 \cdot 10^{-9}$	1,39224	2,825

Die Längen sind in mm, die Kräfte in kg, die Drucke in kgmm^{-2} ausgedrückt. Die in der letzten Horizontalreihe angegebenen Gewichte $2V$ sind diejenigen, welche bei der jeweiligen ursprünglichen Spannung der Zugstangen genügen, um der Zugstange $\varphi = 0$ ihre ursprüngliche Länge r_2 wieder zu geben.

Fehlen dem Ring die Zugstangen, während alles übrige gleich bleibt, so ergibt sich aus (21)

$$q_{\frac{\pi}{2}} : - q_0 = 0,9183.$$

Dieses Verhältnis, beim Ring ohne Zugstangen nahezu gleich 1, wird also durch Anbringen der Zugstangen auf etwa $\frac{1}{1000}$ herabgedrückt.

Was die Größe der Gewichte betrifft, welche die Deformationen hervorrufen, so zeigt die folgende Tabelle, daß dieselbe Verkürzung q_0 bei den Ringen mit Zugstangen ca. $2 \cdot 10^5$mal größere Gewichte erfordert, als bei dem Ring ohne Zugstangen, und daß andererseits dasselbe Gewicht bei dem Ring ohne Zugstangen eine $2 \cdot 10^5$mal größere Verkürzung q_0 hervorbringt, als bei den Ringen mit Zugstangen.

	Ring ohne Zugst.	Ring mit Zugst.		urspr. Spannung
q_0	$0{,}849 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-9}$	$2V = 22{,}8 \cdot 10^{-9}$	minimal
$2V$	$6{,}56 \cdot 10^{-6}$	1,392	$q_0 = 0{,}244$	mittel
$2V$	$13{,}31 \cdot 10^{-6}$	2,825	$q_0 = 0{,}495$	maximal

Auch bei der in § 3 behandelten Belastungsweise des Rings wird

$$q_0 = C' - \frac{A\beta}{t^2}; \quad q_\pi = C'; \quad A = \frac{Vr^3}{2\alpha\beta EW};$$

dagegen wird in diesem Fall

$$C' = \frac{2\alpha\beta r^2 EFA}{(ar^4 + EW + r^2 EF)\pi t^4}.$$

Die größte Verlängerung einer Zugstange (q_π) ist also nur halb so groß, wie im Fall des § 2 $\left(q_{\frac{\pi}{2}}\right)$, während die Verkürzung ($-q_0$) fast genau denselben Wert behält. Sie wird nur sehr wenig größer, als bei der früheren Belastungsweise. Infolgedessen werden die Gewichte $2V$, die der Zugstange $\varphi = 0$ ihre ursprüngliche Länge wieder geben, jetzt etwas kleiner sein, als früher. Sie erhalten die Werte

$$22{,}8075 \cdot 10^{-9}\ \text{kg}; \quad 1{,}3915\ \text{kg}; \quad 2{,}8236\ \text{kg}.$$

Obgleich wir die Diskussion unserer Resultate nur an einem Zahlenbeispiel durchgeführt haben, wird sich doch folgendes allgemein sagen lassen.

Die Tragfähigkeit eines Rades wird durch Anbringen von Zugstangen erheblich gesteigert, und ist, wenn der Druck im obersten Punkt der Peripherie wirkt, etwas größer, als wenn er an der Nabe angebracht wird; die Tragfähigkeit ist der ursprünglichen Spannung der Zugstangen nahezu proportional, wächst jedoch ein wenig rascher als diese. Die Deformation erfolgt, je stärker die Zugstangen angespannt werden, um so mehr in der Weise, daß sich der Durchmesser, der in die Druckrichtung fällt, verkürzt, ohne daß der Ring seitlich merklich ausweicht.

Nachtrag. Längere Zeit nach Beendigung des Manuskripts wurde ich auf einen Aufsatz von Herrn Linsemann aufmerksam gemacht über „Die elastische Linie von Drehstrommaschinen mit großen Durchmessern“.[1]) Da auch bei diesem Problem die stetig über die Ring-

1) Elektrotechn. Zeitschrift. XXIII. Jahrg. 1902, S. 81 ff.

fläche verteilten magnetischen Zugkräfte lineare Funktionen der radialen Deformation q[1]) sind, die aber, zum Unterschied von den Kräften in den Zugstangen mit wachsendem q *abnehmen*, so werden die Differentialgleichungen für q bei beiden Problemen einander ähnlich. Doch gestalten sich, bei der gänzlichen Verschiedenheit der Aufgabe sowie bei den verschiedenen Integrationsbedingungen und wegen der von Herrn Linsemann gemachten Annahme, daß die Peripherie des Rings ihre ursprüngliche Länge behalte, die endlichen Ausdrücke für q durchaus verschieden.

Die vorteilhafteste Pfeilhöhe eines gleichmäßig belasteten symmetrischen Dreigelenkbogens mit kreisförmiger Mittellinie.

Von Dipl. Ing. B. J. W. Reuser in Goes (Niederlande).

In der folgenden Untersuchung sind:

l = die Spannweite des Bogens (horizontale Entfernung der Kämpfergelenke),

f = die Pfeilhöhe des Bogens (Höhe des Scheitelgelenks über den Kämpfergelenken),

R = der Halbmesser der kreisförmigen Bogenmittellinie,

J = das Trägheitsmoment des Bogenquerschnittes,

W = das Widerstandsmoment " "

F = der Inhalt " "

$\xi = \frac{W}{F}$ = der Kernstrahl " "

N_x = die Längskraft für den Querschnitt X, positiv wenn Zugkraft,

M_x = das Moment " " " ", " " rechtsdrehend.

Sonstige Benennungen sind aus der Figur 2 zu entnehmen.

Die erste Aufgabe ist, den Querschnitt zu finden, in welchem die Maximalspannung auftreten wird. Suchen wir dazu N_x und M_x für einen beliebigen Querschnitt X der rechten Bogenhälfte (vgl. Fig. 2):

$$N_x = -H\cos\delta - \int_0^\delta p\,da\,\sin\delta$$

$$M_x = H\cdot h - \int_0^\delta p\,da\,\lambda$$

1) Die radiale Deformation bezeichnet Herr Linsemann mit p, die zu q senkrechte Verschiebung p berechnet er nicht.

Fig. 1.

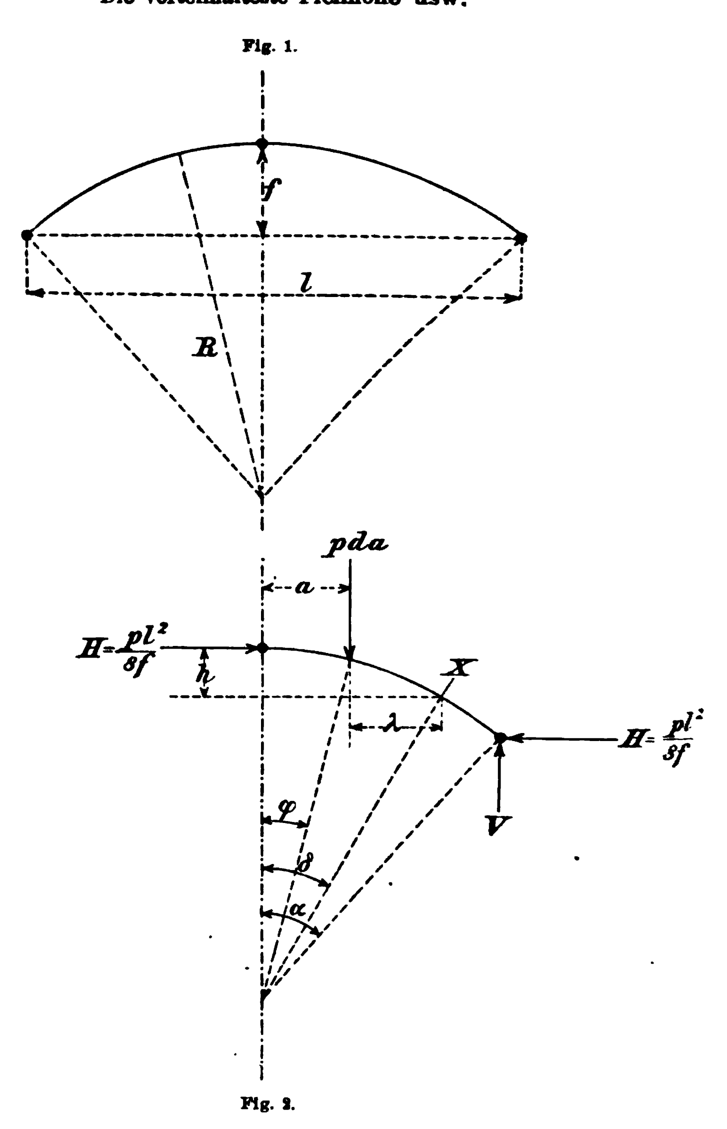


Fig. 2.

In diese Formeln ist einzusetzen:

$$H = \frac{pl^2}{8f} \text{ (aus den Gleichgewichtsbedingungen folgend)}$$

$$a = R \sin\varphi, \text{ und folglich } da = R\cos\varphi\, d\varphi$$

$$h = R(1 - \cos\delta)$$

$$\lambda = R(\sin\delta - \sin\varphi)$$

Dann ergibt sich:

$R \cos\varphi \sin\delta\, d\varphi$

$\delta) - \int_0^\delta p R^2 \cos\varphi (\sin\delta - \sin\varphi)\, d\varphi .$

on ergibt folgende Gleichungen:

$\cos\delta - pR\sin^2\delta$

$R(1-\cos\delta) - \tfrac{1}{2} pR^2 \sin^2\delta .$

kraft Q auftreten; jedoch wollen wir die Schubspannungen vernachlässigen. Die durch N_x und M_x erzeugt werden, sind eraden Stäben, vorausgesetzt daß: 1⁰ die ist im Verhältnis zum Bogenhalbmesser; ist in bezug auf die durch seine Mittel- Müller-Breslau, Graphische Statik der ten Spannungen σ im betrachteten Quer- :

$= \frac{N_x}{F} \pm \frac{M_x}{W}$

ater (1) und (2) gefundenen Werte ein- immer negativ. Es soll gezeigt werden, den beliebigen Wert der veränderlichen

$(1-\cos\delta) \gtrless \tfrac{1}{2} R \sin^2\delta .$

Faktor pR ist fortgelassen);

$\frac{l^2}{8f} \cos\delta \gtrless \tfrac{1}{2} R - \tfrac{1}{2} R\cos^2\delta ,$

$\frac{l^2}{8f} \cos\delta \gtrless \tfrac{1}{2} R - \frac{l^2}{8f},$

$\cos^2\delta - \frac{l^2}{4fR} \cos\delta \gtrless 1 - \frac{l^2}{4fR},$

oder (zu beiden Gliedern $\left(\frac{l^2}{8fR}\right)^2$ addiert)

$$\left(\cos\delta - \frac{l^2}{8fR}\right)^2 \gtrless \left(1 - \frac{l^2}{8fR}\right)^2 .$$

Denkt man sich einen Augenblick diese Ungleichheit in der Form dargestellt: $p^2 \gtrless q^2$, dann kann man auch schreiben:

$$(p+q)(p-q) \gtrless 0;$$

das gibt:

$$M_x \gtrless 0; \text{ wenn } \left(\cos\delta + 1 - \frac{l^2}{4fR}\right)(\cos\delta - 1) \gtrless 0.$$

Die Bedingungen, unter welchen $M_x = 0$, lassen sich hieraus unmittelbar finden:

$M_x = 0$:

$$1^0 \text{ für } \cos\delta = -1 + \frac{l^2}{4fR} = -1 + \left(2 - \frac{f}{R}\right)^{1)} = \frac{R-f}{R}$$

oder $\delta = \alpha$ (Kämpfergelenk),

2^0 „ $\cos\delta = 1$ oder $\delta = 0$ (Scheitelgelenk).

(Diese beiden Ergebnisse hätte man sofort hinschreiben können: es ist selbstverständlich, daß bei Vernachlässigung der Reibung in den Gelenken keine Momente auftreten).

Für *jeden Wert von* $\cos\delta$ *zwischen* $\frac{R-f}{R}$ *und 1* ist folglich der erste Faktor positiv, und der zweite negativ; somit der ganze Ausdruck negativ.

Wir haben also festgestellt: M_x *ist negativ für jeden Querschnitt.* Ein negatives Moment ruft in der oberen Hälfte eines (horizontal) symmetrischen Querschnittes positive, in der unteren negative Spannungen hervor. Weil auch N_x negative Spannungen erzeugt, sind die maximalen Spannungen in einem Querschnitt Druckspannungen und lassen sich in absolutem Wert darstellen durch:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}.$$

In diesem Ausdruck sind die *absoluten* Werte der negativen Größen N_x und M_x einzusetzen, was ergibt:

$$(3) \quad s = \sigma_{\max} = \frac{\frac{pl^2}{8f}\cos\delta + pR\sin^2\delta}{F} + \frac{\frac{1}{2}pR^2\sin^2\delta - \frac{pl^2R}{8f}(1-\cos\delta)}{W}.$$

1) Weil die Bogenlinie kreisförmig ist, und die Bogensehne senkrecht zu dem vertikalen Durchmesser, ist $\frac{l}{2}$ das geometrische Mittel aus f und $2R-f$, $\frac{l^2}{4} = f(2R-f)$, folglich:

$$\frac{l^2}{4fR} = 2 - \frac{f}{R}.$$

Wir kennen jetzt den Wert der maximalen Spannung für einen bestimmten Querschnitt, ausgedrückt durch ein bestimmtes δ. Wir wollen jetzt untersuchen, für welchen Wert der veränderlichen Größe δ diese Spannung (gleich der zulässigen Druckspannung f'') ein Maximum wird. Führen wir die Größe ξ[1]) ein $\left(=\frac{W}{F}\right)$; dann können wir schreiben:

$$(4)\qquad \frac{F}{p}s = f(\delta) = \frac{l^2}{8f}\cos\delta + R\sin^2\delta + \frac{1}{\xi}\left\{\tfrac{1}{2}R^2\sin^2\delta - \frac{l^2R}{8f}(1-\cos\delta)\right\}$$

$$(5)\qquad f'(\delta) = -\frac{l^2}{8f}\sin\delta + 2R\sin\delta\cos\delta + \frac{1}{\xi}\left(R^2\sin\delta\cos\delta - \frac{l^2R}{8f}\sin\delta\right)$$

$$(6)\qquad f''(\delta) = -\frac{l^2}{8f}\cos\delta + 2R\cos 2\delta + \frac{1}{\xi}\left(R^2\cos 2\delta - \frac{l^2R}{8f}\cos\delta\right).$$

Wird $f(\delta)$ ein Maximum, dann muß $f'(\delta)=0$ und zugleich $f''(\delta)$ negativ sein. Es wird

$$f'(\delta)=0,$$

1°. wenn $\sin\delta = 0$ oder $\delta = 0$ (Scheitelgelenk).

Dann sind $\cos\delta$ und $\cos 2\delta = 1$ und wird $f''(\delta) = -\frac{l^2}{8f} + 2R + \frac{1}{\xi}\left(R^2 - \frac{l^2R}{8f}\right)$. Und weil $\frac{l^2}{8f} = R - \frac{f}{2}$, läßt sich der Ausdruck umändern in:

$$f''(\delta) = R + \frac{f}{2} + \frac{Rf}{2\xi}.$$

Weil dieser Ausdruck positiv, entspricht der Wert $\sin\delta = 0$ nicht einem Maximum, sondern einem Minimum.

2°. wenn $-\frac{l^2}{8f} + 2R\cos\delta + \frac{R}{\xi}\left(R\cos\delta - \frac{l^2}{8f}\right) = 0.$

Aus dieser Gleichung finden wir:

$$(7)\qquad \cos\delta = \frac{l^2(\xi+R)}{8fR(2\xi+R)}.$$

Berechnet man hieraus den Wert für $\cos 2\delta\,(=2\cos^2\delta - 1)$, und setzt man die Größe in Gleichung 6 ein, dann ergibt sich nach kleiner Umrechnung:

$$f''(\delta) = \frac{R}{\xi(2\xi+R)}\left\{\left(1-\frac{f}{2R}\right)^2(2\xi^2+2\xi R+R^2) - (4\xi^2+4\xi R+R^2)\right\}.$$

1) Die Werte von ξ sind mit sehr großer Annäherung den nachstehenden Formeln zu entnehmen: (vgl. auch S. 406, Z. 1 v. u.)

$\xi = 0{,}30\ h + 0{,}01$ cm, für [-Eisen D. N. P. No. 8—30
$\xi = 0{,}307\ h + 0{,}15$ cm, „ I-Eisen D. N. P. No. 8—40
} h = Profilhöhe in cm.

Führt man ein: $1 - \frac{f}{2R} = \frac{l^2}{8fR} = \varkappa^2$, welche Größe < 1 und positiv ist; dann läßt sich der Ausdruck für $f''(\delta)$ umgestalten in:

$$f''(\delta) = -\frac{R}{\xi(2\xi + R)}\{2\xi^2(2-\varkappa^2) + 2\xi R(2-\varkappa^2) + R^2(1-\varkappa^2)\}.$$

Der Ausdruck in der Klammer ist positiv, folglich ist $f''(\delta)$ ***negativ und*** $f(\delta)$ ***ein Maximum.*** Die Größe des Maximalwertes für $f(\delta)$ ermitteln wir jetzt, indem wir den Wert für $\cos\delta$ aus Formel (7) in die Gleichung (4) einsetzen. Bequemer ist es, diese etwas umzuändern ($\sin^2\delta = 1 - \cos^2\delta$):

$$\frac{F}{p}s = f(\delta) = \cos\delta\left(\frac{l^2}{8f} + \frac{l^2R}{8f\xi}\right) - \cos^2\delta\left(R + \frac{R^2}{2\xi}\right) + \left(R + \frac{R^2}{2\xi} - \frac{l^2R}{8f\xi}\right).$$

Führen wir die Substitution aus, und bedenken wir, daß die Beziehung $\frac{l^2}{8f} = R - \frac{f}{2}$ besteht, dann kommen wir zu der verhältnismäßig einfachen Formel:

$$(8)\qquad \frac{F}{p}s_{\max} = \{f(\delta)\}_{\max} = \frac{(\xi+R)^2f^2 - 4R\xi^2f + 4R^2\xi(2R+5\xi)}{8R\xi(2\xi+R)}.$$

Die Formel wird bedeutend vereinfacht, wenn man ξ gegen R, 5ξ gegen $2R$ und 2ξ gegen R vernachlässigt, was mit Rücksicht auf die Verhältnisse dieser Größen zulässig ist. Es ergibt sich dann:

$$\frac{F}{p}s_{\max} = \frac{Rf^2 - 4\xi^2f + 8R^2\xi}{8R\xi}.$$

Wird im Zähler das Glied $4\xi^2f$ gestrichen, dann bekommt man:

$$\frac{F}{p}s_{\max} = \frac{f^2}{8\xi} + R,$$

und weil $R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}$, so wird die Formel schließlich:

$$(8a)\qquad \frac{F}{p}s_{\max} = \frac{f^2}{8\xi} + \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}.$$

Aus dieser Formel wäre F zu bestimmen, wenn sich zwischen F und ξ eine Beziehung aufstellen ließe. Das ist aber unmöglich, weil Trägheitsmoment, Widerstandsmoment und damit $\xi = \frac{W}{F}$ von der Form des Querschnittes und folglich von der Einsicht des Konstrukteurs abhängen, und diese läßt sich nicht in funktionelles Gewand kleiden. Wir können uns aber helfen, wenn wir bedenken, daß in der Praxis *die Höhe des Querschnittes gewählt wird.* Bei den Trägerquerschnitten üblicher Form sind nach Müller-Breslau ξ und h_0, Kernstrahl und Höhe des Stehbleches, proportional, und zwar: $\xi \sim \frac{5}{12}h_0$.[1])

1) Müller-Breslau, Graphische Statik der Baukonstruktionen. Bd. I. S. 207.

Wir sind also imstande, F aus der Formel (8a) zu bestimmen als Funktion bekannter Größen und der Pfeilhöhe f:

$$(8b) \qquad F = \frac{p}{s_{\max}}\left(\frac{f^2}{8\xi} + \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}\right).$$

Setzen wir jetzt voraus, daß F *für die ganze Bogenlänge konstant sei*, dann ist die erforderliche Materialmenge:

$$\mathfrak{M} = \text{Bogenquerschnitt} \times \text{totale Bogenlänge}.$$

Die Bogenlänge ist $\frac{\pi R \alpha^0}{90^0}$. Hierin sind einzusetzen:

$$R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} \quad \text{und} \quad \alpha^0 = \text{Winkel sin}\left(\frac{l}{2R}\right)$$

$$= \text{Winkel sin}\left(\frac{l}{f + \frac{l^2}{4f}}\right)$$

$$= \text{Winkel sin}\left(\frac{4fl}{4f^2 + l^2}\right)$$

$$= \frac{180^0}{\pi} \text{Arc sin}\left(\frac{4fl}{4f^2 + l^2}\right).$$

Mithin ist die Bogenlänge:

$$(9) \qquad \begin{aligned} L &= \left(\frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}\right) \times 2 \,\text{Arc sin}\left(\frac{4fl}{4f^2 + l^2}\right) \\ &= \left(f + \frac{l^2}{4f}\right) \text{Arc sin}\left(\frac{4fl}{4f^2 + l^2}\right). \end{aligned}$$

In $\mathfrak{M} = F \times L$, die Werte aus (8b) und (9) einsetzend, bekommen wir:

$$(10) \qquad \mathfrak{M} = \frac{p}{s_{\max}}\left(\frac{f^2}{8\xi} + \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}\right)\left(f + \frac{l^2}{4f}\right) \text{Arx sin}\left(\frac{4fl}{4f^2 + l^2}\right).$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch etwas umändern und vereinfachen. Die Multiplikation der beiden zwischen () stehenden Faktoren wird ausgeführt, und dürfen wir dabei die entstehenden Glieder mit $\frac{f^3}{8\xi}$ und $\frac{f^2}{2}$ streichen:

$$\mathfrak{M} = \frac{p}{s_{\max}}\left(\frac{fl^2}{32\xi} + \frac{l^2}{4} + \frac{l^4}{32f^2}\right) \text{Arc sin}\left(\frac{4fl}{4f^2 + l^2}\right)$$

$$= \frac{pl^2}{s_{\max}}\left(\frac{f}{32\xi} + \frac{1}{4} + \frac{l^2}{32f^2}\right) \text{Arc sin}\left(\frac{4\frac{f}{l}}{4\frac{f^2}{l^2} + 1}\right).$$

Führen wir jetzt ein: $\lambda = \frac{l}{\xi}$ (bekannte Größe) und $\eta = \frac{f}{l}$, dann wird unsere Formel:

$$(10a) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{pl^2}{s_{\max}}\left(\frac{\eta\lambda}{32} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32\eta^2}\right) \text{Arc sin}\left(\frac{4\eta}{4\eta^2 + 1}\right) \\ &= \frac{pl^2}{32 s_{\max}}\left(\eta\lambda + 8 + \frac{1}{\eta^2}\right) \text{Arc sin}\left(\frac{4\eta}{4\eta^2 + 1}\right). \end{aligned}$$

$\mathfrak{M}$ läßt sich also in der Form schreiben:

$$\mathfrak{M} = \text{Konstante} \times f(\eta),$$

und hierin ist dann:

$$(11) \qquad f(\eta) = \left(\eta\lambda + 8 + \frac{1}{\eta^2}\right) \operatorname{Arc\,sin}\left(\frac{4\eta}{4\eta^2 + 1}\right).$$

Ist $\mathfrak{M}$ ein Minimum, dann ist auch $f(\eta)$ Minimum, und es muß $f'(\eta) = 0$ sein. Dabei braucht $f''(\eta)$ nicht untersucht zu werden, weil ein Maximum natürlich ausgeschlossen ist.

$$(12) \quad f'(\eta) = \left(\eta\lambda + 8 + \frac{1}{\eta^2}\right)\frac{4}{4\eta^2 + 1} + \left(\lambda - \frac{2}{\eta^3}\right) \operatorname{Arc\,sin}\left(\frac{4\eta}{4\eta^2 + 1}\right) = 0.$$

Aus dieser Gleichung ist η zu bestimmen. Zu diesem Zweck habe ich sie umgeformt zu:

$$(13) \qquad \operatorname{Arc\,sin}\left(\frac{4\eta}{4\eta^2 + 1}\right) = \frac{4\eta(\eta^3\lambda + 1 + 8\eta^2)}{2 - \eta^3\lambda + 8\eta^2}.$$ [1])

Nach Wahl eines bestimmten λ können für verschiedene Werte von η das erste und das zweite Glied der Gleichung berechnet werden. Stellt man diese Resultate in Tabellenform zusammen, dann läßt sich durch Interpolation bestimmen, welcher Wert für η der Gleichung genügt. Es hat natürlich keinen Zweck, den Lesern dieser Zeitschrift alle von mir berechneten Zahlen vor Augen zu führen. Ich will nur einen kurzen Auszug geben, und zwar für 3 verschiedene Werte von λ, nämlich $\lambda = 50$, 100 und 200.

		$\eta =$ 0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22
$\operatorname{Arc\,sin}\left(\frac{4\eta}{4\eta^2+1}\right)$		0,471	0,546	0,618	0,692	0,762	0,830
$\frac{4\eta(\eta^3\lambda + 8 + 8\eta^2)}{2 - \eta^3\lambda + 8\eta^2}$ für $\lambda =$	50	—	—	—	—	0,717	0,918
	100	—	—	0,576	0,788	—	—
	290	0,392	0,588	—	—	—	—
Differenzen des ersten u. zweiten Gleichungsgliedes für $\lambda =$	50	—	—	—	—	+0,045	−0,088
	100	—	—	+0,042	−0,096	—	—
	200	+0,079	−0,042	—	—	—	—

Die gesuchten Werte für η, bei denen $f'(\eta) = 0$ wird, ergeben sich durch Interpolation und betragen:

$\eta =$		$\lambda =$
0,208	wenn:	50
$0{,}170 \sim \frac{1}{6}$		100
0,134		200

1) Im Nenner ist das vernachlässigbare Glied $-4\eta^5\lambda$ gestrichen.

In dem folgenden Auszug sind einige Werte für $f(\eta)$ zusammengestellt, berechnet aus Formel (11). Die Zahlen müssen noch mit $\frac{pl^2}{32 s_{max}}$ multipliziert werden, um nach Formel (10a) die Werte für $\mathfrak{M}$ zu liefern, sie sind aber proportional damit.

	$\eta =$	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24
$f(\eta)$ für $\lambda =$	50	44,6	39,3	36,1	34,1	33,2	**32,8**	32,9	33,5
	100	46,5	42,2	39,8	**39,1**	**39,3**	40,3	—	—
	200	50,1	**47,7**	**47,5**	49,0	51,8	55,6	—	—

Zwei wichtige Folgerungen lassen sich hieraus ziehen:

1° bei abnehmenden Werten von λ, oder (weil $\lambda = \frac{l}{\xi}$) bei *zunehmenden Werten von* ξ, wächst das Verhältnis $\eta = \frac{f}{l}$, bei dem der Materialverbrauch ein Minimum wird, und *kann also der Pfeil größer werden.*

2° Trotzdem der Pfeil und damit die Länge des Bogens größer werden, wird *der Materialverbrauch kleiner.* (Vgl. die fettgedruckten Zahlen für $f(\eta)$).

Die von Konstrukteuren befolgte Wahl einer möglichst großen Querschnittshöhe ist hiermit als eine durchaus richtige erwiesen (vgl. S. 406).

Schlüsse. Der Wert von $\eta = \frac{f}{l}$, für den der Materialverbrauch ein Minimum wird, ist zwar für jeden Fall ein anderer, weil abhängig von $\lambda = \frac{l}{\xi}$; jedoch läßt sich bemerken, daß, wie es sich aus den von mir angegebenen Zahlen zeigt, der Wert von $f(\eta)$ sich in der Nähe des Minimums praktisch nur sehr wenig ändert und man schließen darf:

Bei einem gleichmäßig belasteten symmetrischen Dreigelenkbogen mit kreisförmiger Mittellinie und konstantem Querschnitt ist die günstigste Pfeilhöhe $f \sim \frac{1}{6}$ von der Spannweite l.

In einem folgenden Aufsatz werde ich untersuchen, wie es sich bei demselben Bogenträger verhält im Falle einer *mobilen* gleichmäßigen Belastung, welche weit ungünstigere Spannungen erzeugt.

Goes, Juli 1905.

Über eine Anwendung der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie auf Größen, welche sich nicht rein zufällig ändern.

Von G. Holtsmark in Aas (Norwegen).

Bei den Feldversuchen mit Ackergewächsen, Düngung usw. wird gewöhnlich ein größeres Feld in kleinere Parzellen geteilt; diese werden mit den verschiedenen Versuchsgegenständen beschickt, und schließlich werden die Ernten der einzelnen Parzellen miteinander verglichen. Mehrere Versuchsfehler werden sich dabei geltend machen. Erstens werden die Parzellen nicht vollständig gleichmäßig besät, zweitens werden bei der Ernte beim Einsammeln und Wägen des Ertrages Fehler unterlaufen, drittens ist die Ausmessung der Parzellen mit Fehlern behaftet, und endlich sind die Böden und überhaupt die natürlichen Wachstumsbedingungen auf den einzelnen Parzellen etwas verschieden. Erfahrungsgemäß sind die Fehler, welche die letzterwähnte Ursache haben, die bedeutendsten. Andererseits macht sich hier die Nachbarschaft der Parzellen in der Art geltend, daß zwei Parzellen, die unmittelbar aneinander grenzen oder sich in relativ kleinem Abstand voneinander befinden, sich weniger in den Wachstumsbedingungen unterscheiden, als zwei solche, die relativ weit voneinander entfernt sind.

Will man zwei Versuchsgegenstände so vergleichen, daß man sie auf je einer Parzelle prüft, so darf man natürlich diese Parzellen unmittelbar nebeneinander wählen, damit die Bodenverschiedenheiten möglichst wenig einwirken. Gewöhnlich wird man aber, um einen sichereren Vergleich zu erlangen, die zwei Versuchsgegenstände nicht auf je einer, sondern auf mehreren Parzellen prüfen und somit durch Wiederholung den Fehler vermindern; außerdem wird man in Praxi gewöhnlich eine größere Anzahl von Gegenständen gleichzeitig auf einem größeren Felde miteinander vergleichen. Je größer das Feld nun wird, um so mehr werden die einzelnen Parzellen durchschnittlich voneinander entfernt. Und will man dann mit Hilfe der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie ein Maß für die Genauigkeit der Versuchsresultate ermitteln, so tritt die Schwierigkeit auf, daß die Abweichungen der einzelnen Parzellen von dem Mittelwerte nicht rein zufällig, sondern zu einem gewissen Grade von der geometrischen Verteilung der Parzellen abhängig sind, wodurch die direkte Anwendung der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie unzulässig wird. Diese setzt nämlich voraus, daß die Verteilung der Elemente, deren Abweichung von einem soge-

nannten wahren Werte in Rechnung gezogen wird, eine rein zufällige ist, dann wird man denselben mittleren Fehler finden, ob dieser aus einer kleineren oder einer größeren Anzahl von einzelnen Elementen berechnet wird. Dagegen wird in dem von uns betrachteten Falle der berechnete mittlere Fehler um so kleiner ausfallen, je kleiner das Versuchsfeld und damit die Anzahl der Parzellen ist. Wie der mittlere Fehler mit der Ausdehnung des Feldes wächst, werde ich in dieser Arbeit untersuchen. Außerdem werde ich theoretisch eine Methode begründen, durch welche man bei Versuchen auch auf größeren Feldern angenähert dieselbe Genauigkeit zu erreichen vermag, wie auf kleineren. Diese Methode ist schon längst von meinem Kollegen Herrn Bastian R. Larsen, dem Leiter der norwegischen staatlichen Versuche mit Ackergewächsen, ersonnen und von ihm seit mehreren Jahren bei den Feldversuchen mit Erfolg benützt worden. Obwohl die Untersuchung aus einem speziellen Bedürfnis der Praxis entsprungen ist, glaube ich doch, daß die Resultate auch ein allgemeines Interesse besitzen, weshalb ich die mehr theoretischen Ausführungen hier mitteilen möchte. Die spezielle Anwendung gehört in die Versuchspraxis, und wird anderswo mitgeteilt werden.[1])

I. Der Einfluß der Größe des Versuchsfeldes auf den mittleren Fehler.

Es sei ein rechteckiges Feld in eine Anzahl gleich großer quadratischer Parzellen geteilt. Die Seitenlänge des Quadrates sei $= 1$, die Seiten des rechteckigen Feldes seien n_1 und n_2. Das Rechteck enthält dann $n_1 n_2 = n$ quadratische Parzellen. Jede Parzelle stelle eine gewisse Größe dar, z. B. den Ertrag eines Gewächses. Die Größen, welche die einzelnen Parzellen darstellen, seien $a, b, c \ldots\ldots k$. Das arithmetische Mittel $\frac{(a+b+c+\ldots\ldots+k)}{n}$, nennen wir den „wahren“ Wert. Weiter bezeichnen wir mit „wahrem Fehler“ die Größen:

$$\Delta_1 = \left(\frac{a+b+\ldots+k}{n} - a\right),$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{a+b+\ldots+k}{n} - b\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_n = \left(\frac{a+b+\ldots+k}{n} - k\right).$$

1) Tidsskrift for Landbrugets Planteavl, redigeret af E. Rostrup, Bd. 12, Kjöbenhavn, 1905, S. 330—351.

Denken wir uns vorläufig die Verteilung der Elemente rein zufällig, so ist nach der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie der sogenannte mittlere Fehler (die mittlere Abweichung):

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}.^{1)}$$

Wir werden uns vorstellen, wie diese Größe m aus den einzelnen Größen $a, b \ldots k$ aufgebaut ist.

Nehmen wir zunächst an, es seien nur zwei Größen a und b, $n = 2$. Wir haben dann:

$$\Delta_1 = \left(\frac{a+b}{2} - a\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{a+b}{2} - b\right) = \left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$m^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}{2} = \frac{1}{2^2}(a-b)^2$$

Seien jetzt $n = 3$ Größen a, b, c vorhanden, dann wird

$$\Delta_1 = \left(\frac{a+b+c}{3} - a\right) = \frac{(b-a)+(c-a)}{3}$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{a+b+c}{3} - b\right) = \frac{(a-b)+(c-b)}{3}$$

$$\Delta_3 = \left(\frac{a+b+c}{3} - c\right) = \frac{(a-c)+(b-c)}{3}$$

$$m^2 = \frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2}{3} = \frac{1}{3^2}[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2].$$

1) Gewöhnlich werden das arithmetische Mittel als der *wahrscheinlichste* Wert, die Abweichungen Δ_1, Δ_2 .... vom arithmetischen Mittel als *scheinbare* Fehler angesehen, und *der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen* aus einer Anzahl von n solchen nach der Formel $m = +\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n-1}}$ berechnet. Wenn hier der mittlere Fehler nach der Formel $m = +\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$ berechnet wird, indem die Abweichungen vom arithmetischen Mittel als wahre Fehler betrachtet werden, so hat das den folgenden Grund: Bei einem Versuche werden die Parzellen mit einer Anzahl verschiedener Versuchsgegenstände beschickt. Nun sind die natürlichen Vegetationsbedingungen auf den Parzellen verschieden, und die Unterschiede in den Ernten rühren nicht nur von der verschiedenen Ertragfähigkeit der einzelnen Versuchsgegenstände, sondern auch von diesen Verschiedenheiten in den Vegetationsbedingungen her. Die letzteren geben zu den „Fehlern" Veranlassung. Um alles gleich zu halten, müßte man sämtliche Versuchsgegenstände gleichzeitig über das ganze Feld prüfen, was selbstverständlich unmöglich ist. Statt dessen werden die einzelnen Gegenstände je auf einzelnen Parzellen geprüft. Man kann sich nun denken, daß man aus der Ernte einer einzigen Parzelle schließt, welche

Mit den Größen a, b, c, d, also $n = 4$, wird

$$m^2 = \frac{1}{4^2}[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2]$$

usw.

Und mit n Größen:

$$(1) \qquad m^2 = \frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{1}{n^2}[(a-b)^2 + (a-c)^2 + \cdots\cdots \quad \cdots].$$

Die Anzahl der Summanden zwischen den Klammern ist offenbar

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Bezeichnen wir mit $\pm \mu'$ die mittlere Differenz zwischen zwei beliebigen Größen $a, b, \ldots k$, d. h.

$$\mu' = \pm \sqrt{\frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + \cdots\cdots}{\frac{n(n-1)}{2}}},$$

so wird:

$$m^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \mu'^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n}\mu'^2.$$

Wenn n eine große Zahl ist, wird somit

$$\mu'^2 = 2m^2,$$

was mit der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie übereinstimmt.

Kehren wir nun zu dem anfangs betrachteten Rechteck zurück. Wenn wir die Formel (1) auf die Größen, welche die quadratischen Parzellen repräsentieren, anwenden, so wird $n = n_1 n_2$. Nehmen wir nun an, daß die mittlere Differenz zwischen zwei Größen eine Funktion des Abstandes der quadratischen Parzellen, zu welchen die Größen gehören, ist, so lassen sich die Differenzenquadrate in (1) nach den Abständen der zugehörigen Parzellen klassifizieren. Die Seite jedes Quadrates haben wir gleich eins gesetzt. Rechnen wir als Abstand zweier beliebiger Quadrate den Abstand ihrer Mittelpunkte, so sehen

Ernte man auf dem ganzen Felde erhalten haben würde, falls das ganze Feld mit dem betreffenden Gegenstande beschickt gewesen wäre. Das kann man nur *mit Annäherung* schließen. Um diese Annäherung kennen zu lernen, muß man einmal das ganze Feld *gleichartig* beschicken. Die Ernte des ganzen Feldes, oder vielmehr $\frac{1}{n}$ desselben ist dann ein „wahrer" Wert. Die Ernte einer Parzelle ist ein „beobachteter" Wert. Und die Differenz zwischen beiden ist ein „wahrer" Fehler.

wir leicht bei Betrachtung einer Figur, mit welchen Abständen wir zu rechnen haben.

n_1

a	b	c		
d	e	f		
g	h	i		n_2
			k	

Abstand	1	z. B.	zwischen	a	und	b
„	$\sqrt{2}$	„	„	a	„	e
„	2	„	„	a	„	c
„	$\sqrt{5}$	„	„	a	„	f
„	$\sqrt{8}$	„	„	a	„	i

usw.

Eine einfache Aufzählung ergibt die Anzahl der Differenzen von den verschiedenen Ordnungen.

Für den Abstand	Anzahl der Differenzen
$= 1$	$(n_1-1)n_2+(n_2-1)n_1 = A$
$\sqrt{2}$	$2(n_1-1)(n_2-1) = B$
2	$(n_2-2)n_1+(n_1-2)n_2 = C$
$\sqrt{5}$	$2[(n_1-2)(n_2-1)+(n_2-2)(n_1-1)] = D$
$\sqrt{8}$	$2(n_1-2)(n_2-2) = E$

usw.

Bezeichnen wir mit $\pm\mu$ die mittlere Differenz für den Abstand $= 1$, mit $\pm p\mu$ für $\sqrt{2}$, mit $\pm q\mu$ für 2 usw. so läßt sich der mittlere Fehler der einzelnen Parzellen in folgender Form ausdrücken:

$$m^2 = \frac{\mu^2}{(n_1 n_2)^2}[A + Bp^2 + Cq^2 + Dr^2 + \cdots\cdots], \tag{2}$$

wo

$$A + B + C + \cdots\cdots = \frac{n_1 n_2 (n_1 n_2 - 1)}{2}.$$

Bei der praktischen Anwendung dieser Formel wird man sich wohl gewöhnlich damit begnügen, die zwei ersten Glieder der Reihe abzusondern, welche Differenzen zwischen unmittelbar benachbarten Größen

enthalten, also die Glieder A und Bp^2. Bei den übrigen Gliedern setzen wir dann, um zu vereinfachen:

$$q^2 = r^2 = \cdots\cdots\cdots = u^2.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} C + D + \cdots\cdots &= \left[\frac{n_1 n_2 (n_1 n_2 - 1)}{2} - (A + B)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}[(n_1 n_2)^2 - 9 n_1 n_2 + 6 n_1 + 6 n_2 - 4] \\ &= H. \end{aligned}$$

Die Formel (2) wird dann vereinfacht und mit angenäherter Gültigkeit geschrieben:

$$m^2 = \frac{\mu^2}{(n_1 n_2)^2}(A + Bp^2 + Hu^2). \tag{3}$$

Die Größen μ, p und u sind gewisse für das Versuchsfeld eigentümliche Konstanten. Sie mögen auf den verschiedenen Teilen des Feldes verschieden sein, sind aber von der *Ausdehnung* des Feldes unabhängig und werden sich im allgemeinen aus einer relativ geringen Anzahl von Vergleichungen zwischen Elementargrößen mit hinreichender Genauigkeit ermitteln lassen. Somit erlaubt die Formel (3) zu erkennen, wie der berechnete mittlere Fehler mit der Ausdehnung des Feldes zunehmen wird.

Zur Prüfung dieser Theorie lag ein älterer Versuch von B. R. Larsen vor.[1]) Eine drei Jahr alte Wiese mit Phleum, 200 m lang, 30 m breit, wurde in 240 quadratische Parzellen von je 0,25 ar Inhalt geteilt und jede Parzelle für sich abgeerntet. Auf dem ganzen Felde betrug die Ernte 4270 kg, also auf jeder Parzelle von 0,25 ar durchschnittlich 17,8 kg. Die 240 Ernten der einzelnen Parzellen ergaben direkt:

$$m^2 = 8{,}518.$$

Aus den 434 Differenzen $d_1, d_2, \ldots d_{434}$ zwischen zwei Parzellen, welche längs einer Seite aneinanderstoßen, wurde berechnet

$$\mu^2 = \frac{\Sigma d^2}{434} = 6{,}495.$$

Aus den 390 Differenzen $d'_1, d'_2 \ldots d'_{390}$ zwischen Parzellen, welche in einem Eckenpunkte aneinanderstoßen, wurde berechnet:

$$p^2\mu^2 = \frac{\Sigma d'^2}{390} = 8{,}893.$$

Um die Konstante u^2 zu erhalten, bemerken wir, daß $\pm u\mu$ die mittlere Differenz zwischen zwei beliebigen, weit voneinander belegenen Parzellen

1) Berättelse öfver Andra nordiska Landtbrukskongressen i Stockholm 1897. I. S. 17 ff.

ist. Nach der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie ist, wie schon früher bemerkt, mit großer Annäherung:

$$u^2\mu^2 = 2m^2 = 17{,}037.$$

Wir haben nun zur Berechnung des mittleren Fehlers bei verschiedenen Feldgrößen die Konstanten:

$$\mu^2 = 6{,}495,$$
$$p^2 = 1{,}369,$$
$$u^2 = 2{,}623.$$

Mit Hilfe dieser Konstanten und der Formel (3) sind die Werte für m^2 für einige verschiedene Feldgrößen berechnet und in der beistehenden Tabelle unter „m^2 theoretisch" zusammengestellt. Nebenbei sind unter „m^2 empirisch" die unmittelbar aus dem Versuchsmaterial berechneten mittleren Fehler zusammengestellt. Bei der Berechnung der letzteren ist das folgende Verfahren benützt: Das Feld ist in eine Anzahl kleinere, gleich große Felder geteilt. Für jedes der kleineren Felder ist die Mittelernte der Parzellen berechnet, und sind die Differenzen zwischen dieser Mittelernte und den Ernten der einzelnen Parzellen ermittelt. Die Summe der Quadrate dieser Differenzen für das ganze Feld, durch deren Anzahl geteilt, gibt dann das Quadrat des mittleren Fehlers, welcher der kleineren Feldgröße entspricht.

n_1	n_2	$n_1 n_2$	A	B	H	m^2 theoretisch	m^2 empirisch
2	2	4	4	2	0	2,74	2,47
6	2	12	16	10	40	6,09	5,65
6	·5	30	49	40	346	7,30	7,15
6	10.	60	104	90	1576	7,87	8,09
6	20	120	214	190	6736	8,19	8,37
6	40	240	434	390	27856	8,36	8,52

II. Larsens Methode.

Wenn eine größere Anzahl von verschiedenen Versuchsgegenständen miteinander verglichen werden sollen, so wie es bei Feldversuchen häufig gemacht wird, muß man ein hinreichend großes Feld in kleinere Parzellen von je z. B. 0,25 ar Inhalt teilen. Anstatt sämtliche Parzellen mit den zu vergleichenden Versuchsobjekten zu beschicken, wird ein Teil derselben, z. B. jede dritte Parzelle, mit einem bestimmten Versuchsgegenstand beschickt. Diese Parzellen wollen wir *Maßparzellen* nennen. Die übrigen Parzellen werden mit den zu vergleichenden Versuchsgegenständen beschickt. Nun werden die Ernten dieser letzteren

Parzellen nicht unmittelbar miteinander verglichen. Statt der wirklichen Ernte einer Parzelle wird eine „ideale“ in folgender Weise berechnet: Man ermittelt die durchschnittliche Ernte der unmittelbar an die Parzelle angrenzenden Maßparzellen, sucht die Differenz zwischen diesem Durchschnitt und der wirklichen Ernte der Parzelle. Diese Differenz wird dann addiert zu bezw. subtrahiert von der für sämtliche Maßparzellen berechneten Durchschnittsernte. Die so für die Parzellen ermittelten „idealen“ Ernten werden dann in gewöhnlicher Weise miteinander verglichen.

Larsen verteilt die Parzellen nach folgendem Schema, wo die k Maßparzellen bezeichnen.

a	b	k	c	d	k	...
f	k	g	h	k	l	...
k	o	p	k	q	r	...
u	v	k	x	y	k	...
.	.	.	.	.	.	...

Die Parzelle g z. B. grenzt an drei Maßparzellen k. Die Differenz zwischen dem Mittel aus diesen drei und der Parzelle g wird zu dem Mittel der sämtlichen k summiert. Für die am Rande des Feldes belegenen Parzellen, z. B. a, b, ..., f..., muß die „ideale“ Ernte in etwas abweichender Art berechnet werden. Wie das geschieht, ist von Larsen in der Beschreibung seiner Methode dargestellt und wird hier übergangen.

Untersuchen wir nun, wie der mittlere Fehler dieser „idealen“ Ernten sich mit der Feldgröße ändern muß. Wir wollen annehmen, daß alle Vergleichsparzellen gegenüber den angrenzenden Maßparzellen in derselben Weise orientiert sind. Die Differenz d_i zwischen einer Vergleichsparzelle und dem Durchschnitt der angrenzenden Maßparzellen ist dann von der Größe des Feldes unabhängig. Die „ideale“ Ernte einer Vergleichsparzelle ist, wenn wir die durchschnittliche Ernte der Maßparzellen mit M bezeichnen: $M + d_i$. Die wahren Fehler:

$$\frac{[(M + d_i)]}{n} - (M + d_i)$$

werden sich nur unwesentlich von d_i unterscheiden. Der mittlere Fehler wird deshalb von der Feldgröße unabhängig sein. Eine Prüfung mit dem früher benützten Material bestätigt dies vollständig. Von den 240 Parzellen wurden 80 als Maßparzellen angesehen. Unter „Feldgröße“ ist die Anzahl der Versuchsparzellen angegeben.

Feldgröße	Quadrat des mittleren Fehlers
8	3,81
40	3,86
80	3,90
160	3,88

Diese Berechnungsweise ist indessen unzulässig, wenn man den mittleren Fehler der nach Larsens Methode berechneten idealen Ernten mit dem mittleren Fehler sämtlicher Parzellen vergleichen will. Als „wahren" Wert darf man nicht den Durchschnitt der berechneten „idealen" Ernten ansehen, sondern vielmehr den Durchschnitt sämtlicher Parzellen, sei es, daß die Parzellen als Versuchs- oder daß sie als Maßparzellen benützt worden sind.

Es sei i die Ernte einer gewissen Versuchsparzelle. Das Mittel der angrenzenden Maßparzellen sei k_i, und $i - k_i = d_i$. Wenn M der Durchschnitt sämtlicher Maßparzellen ist, so ist die „ideale" Ernte der betrachteten Parzelle $M + d_i$. Um den mittleren Fehler zu berechnen, nehmen wir die Differenz zwischen jeder einzelnen „idealen" Ernte und dem Durchschnitt D *sämtlicher* Parzellen:

$$\begin{aligned}\Delta_i' &= (M + d_i) - D \\ &= (M - D) + (i - k_i).\end{aligned}$$

Wir bemerken jetzt, daß, wenn überwiegend $i > k_i$, dann wahrscheinlich auch $D > M$ ist. Denn M ist ausschließlich aus denselben Parzellen wie die k_i gebildet, aber D ist aus sämtlichen Parzellen gebildet, sowohl den i als den Ernten der Maßparzellen (in unserem Beispiel überwiegend den i). Die zwei Summanden $(M - D)$ und $(i - k_i)$ müssen also vorwiegend entgegengesetzte Vorzeichen haben. Das erste Glied wird mit wachsender Feldgröße sich rasch der Null nähern. Das zweite Glied, $i - k_i = d_i$, ist aber von der Feldgröße unabhängig. Der Zahlenwert von Δ_i' — und bei der Berechnung des mittleren Fehlers kommt es auf das Vorzeichen nicht an — muß deshalb mit wachsender Feldgröße zunehmen, und der mittlere Fehler wird sich dem Grenzwert $\pm d$ nähern. Das Gesetz, nach welchem dieses Anwachsen stattfindet, habe ich nicht festgestellt, und es läßt sich wohl auch schwer auf einfache Gestalt bringen. Wie das Anwachsen bei dem von uns betrachteten Versuchsfelde stattfindet, habe ich beispielsweise berechnet. Der dritte Teil der Parzellen ist als Maßparzelle benützt, die übrigen $\frac{2}{3}$ als Versuchsparzellen. Die Kolumne „Feldgröße" gibt die Anzahl n der Versuchsparzellen an, die zweite Kolumne das aus Vergleich mit

dem Durchschnitt G sämtlicher Parzellen des Feldes berechnete Quadrat des mittleren Fehlers.

Feldgröße	Quadrat des mittleren Fehlers
$n =$ 8	3,38
20	3,77
40	3,82
80	3,96
160	4,12.

Ergebnisse.

1. Bei Anwendung der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie auf Elemente, welche in einer bestimmten geometrischen Lage festgehalten sind, und bei welchen der Unterschied zwischen zwei beliebigen Elementen mit wachsender Entfernung zunimmt, nimmt der berechnete mittlere Fehler mit wachsender Anzahl der Elemente zu. Das Gesetz des Anwachsens ist in dem von uns betrachteten Falle durch die Formel (2) gegeben.

2. Durch Anwendung von „Maßparzellen“ nach Larsens Methode läßt sich der mittlere Fehler bedeutend herabdrücken. Bei dieser Methode wird auch der mittlere Fehler mit wachsender Anzahl der Elemente zunehmen, er nähert sich aber rasch einer Grenze, welche nur von der Differenz zwischen den zusammenstoßenden Elementen abhängt.

Die Perspektive der Brüder van Eyck.

Von Karl Doehlemann in München.

1. Auch unter den großen Künstlern aller Zeiten wird es wenige geben, die durch ihre Werke den Streit der sich oft direkt widersprechenden Meinungen in gleichem Maße herauf beschworen haben, wie die Brüder Hubert und Jan van Eyck. Welche Partien an dem berühmten Genter Altar von dem älteren der Brüder, Hubert, herrühren, wie die nicht bezeichneten Bilder sich unter die beiden Brüder verteilen und chronologisch zu ordnen sind, in welchem Umfange beide Künstler von ihren Vorgängern abhängen und wieviel von ihren Entdeckungen auf ihre Schüler überging, alles das sind Fragen, die sich bei dem Mangel genauer geschichtlicher Angaben fast nur durch das sorgfältigste Studium der vorhandenen Werke beantworten lassen. Da ist es denn sicher mit Freude zu begrüßen, wenn zu den

mehr oder minder doch auf subjektivem Empfinden beruhenden Kriterien, wie sie die künstlerische Analyse eines Bildes liefert, ein neues hinzugefügt wird, das rein formaler Natur ein objektives Moment berücksichtigt: das ist die perspektivische Zeichnung. Herr Dr. G. Josef Kern[1]) hat sich der dankenswerten Arbeit unterzogen, die Bilder der Brüder Eyck, welche durch das Vorhandensein von Architektur eine Kontrolle der genauen perspektivischen Konstruktion ermöglichen, in dieser Richtung zu untersuchen, was auch deswegen wünschenswert war, weil über diesen Punkt die Anschauungen ebenfalls weit auseinander gehen. Auch die Zeit vor den Eycks (Broederlam), sowie Petrus Christus, ein Schüler Jan van Eycks, finden Berücksichtigung. Der Abhandlung sind 14 Tafeln beigefügt, welche in starker Verkleinerung Umrißzeichnungen wiedergeben, die der Verfasser nach den größten erhältlichen Photographien der betreffenden Werke, meistenteils unter gleichzeitiger Benutzung der Originale, angefertigt hat. In den Tafeln finden wir die Konstruktionslinien eingetragen, außerdem sind die Reduktion gegenüber dem Original, sowie die Koordinaten der Flucht- und Schnittpunkte angegeben.

Nach der Richtigkeit der Konstruktion ordnet der Verfasser die Bilder der Eyck in eine Reihe und kommt zu dem Schlusse, daß unter den datierten, bzw. dem Jan van Eyck ziemlich allgemein zugeschriebenen Werken die Madonna des Kanzlers Rolin (Paris, Louvre) als perspektivisch beste Leistung an das Ende dieser Entwicklung zu setzen ist, wobei er noch weiter folgert, daß dieses Bild jedenfalls später als 1436 gemalt sein müsse.[2]) Den Fortschritt, den die perspektivische Darstellung im 15. Jahrhundert in den Niederlanden gemacht hat, faßt Kern in folgende Resultate zusammen: Die Eycksche Linearperspektive nimmt eine Mittelstellung zwischen der Perspektive Broederlams und der Perspektive Masaccios ein. Die Flandrischen Quattrocentisten haben wahrscheinlich die Brunellescosche Lehre nicht gekannt, und die Entwicklung hat sich bei den Gebrüdern van Eyck und bei Petrus Christus, soweit wir sie an ihren Werken verfolgen können, unabhängig von Italien vollzogen.

Um ferner darzutun, daß die Verbindung von Theorie und Praxis kein Vorrecht der italienischen Renaissance, daß vielmehr auch Jan

1) Die Grundzüge der linear-perspektivischen Darstellung in der Kunst der Gebrüder van Eyck und ihrer Schule. I. Die perspektivische Projektion. Mit 3 Zeichnungen im Text und 14 Tafeln. 36 S. Leipzig. E. A. Seemann. 1904. Preis geb. 6 Mark.

2) Die Unwahrscheinlichkeit dieser Datierung habe ich an anderer Stelle besprochen: Mitteilungen der Gesellschaft für vervielfältigende Kunst, Okt. 1905.

van Eyck sich mit Studien über die Perspektive beschäftigt habe, weist der Verfasser darauf hin, daß man kein Recht habe, dem Geschichtsschreiber Bartholomaeus Facius, der 1456 eine Lebensbeschreibung der berühmtesten Männer jener Zeit schrieb, jede Verlässigkeit abzusprechen. Dieser erwähnt aber, daß sich Jan van Eyck besonders mit der Geometrie und mit den Künsten beschäftigt habe, die ihm als Hilfsmittel für die Malerei dienen konnten. Wenn wir auf dem Arnolfini-Bilde einen Konvexspiegel und in ihm das Spiegelbild des Gemaches dargestellt sehen, so spricht dies ja allerdings für diese Auffassung. Der letzte Abschnitt des Buches ist der mittelalterlichen Wissenschaft der Perspektive und ihrer Verbreitung in Nordeuropa gewidmet. Hier wird namentlich auf den Polen Vitellio hingewiesen, der im 13. Jahrhundert die Optik des Arabers Alhazen (etwa 1000 n. Chr.) ins Lateinische übertrug und dadurch die Perspektive Euklids dem Norden überlieferte. Interessant ist folgende Stelle aus diesem Buche: „Parallele Linien scheinen nach der Tiefe zusammenzufliehen, *niemals* aber wird man sie sich wirklich schneiden sehen." Der Verfasser bemerkt mit Recht, daß diese Ansicht der Verbreitung der Perspektive, d. h. der Lehre vom Fluchtpunkt nur hinderlich sein konnte. In der Tat haben ja noch Alberti und Lionardo da Vinci, trotz ihrer Kenntnis des Fluchtpunktsatzes, hierin Schwierigkeiten gefunden. Ich möchte hinzufügen, wie geeignet diese Betrachtungen sind, um die gewaltige Abstraktion erkennen zu lassen, die in der Einführung der *unendlich fernen Elemente* enthalten ist. Denn durch Einführung des unendlich fernen Punktes umgeht doch der moderne Mathematiker *formal* diese große Schwierigkeit.

2. Was nun die soeben erwähnten, etwas allgemein gehaltenen Sätze betrifft, in welche Kern das Resultat seiner Untersuchungen über die Eycksche Perspektive (im wesentlichen) zusammenfaßt, so sind sie wohl als richtig anzuerkennen. Etwas präziser könnte man die Eycksche Perspektive vielleicht dadurch definieren, daß er die Tiefenlinien im Bilde im allgemeinen von außen nach innen verlaufen oder sich drehen läßt (wobei unter Tiefenlinien die auf der Bildebene senkrecht stehenden Geraden verstanden sein mögen), und daß er parallelperspektivische Konstruktionen vermeidet. Mit den Behauptungen und Schlußfolgerungen aber, die sich im *einzelnen* in dem Buche finden, kann ich mich nicht einverstanden erklären. So folgert z. B. der Verfasser (S. 18) aus der Zeichnung der Fußböden des Genter Altars, daß Jan van Eyck das Gesetz von der Flucht der Tiefenlinien, sofern sie *einer* Ebene angehören, im Jahre 1432 gekannt habe. Nun könnte man allerdings meinen, es sei nichts leichter als das zu konstatieren: man hat ja nur nötig, sich mit einem Lineal zu bewaffnen, die Linien

auf der Photographie nachzuzeichnen und zu sehen, ob sie durch einen Punkt gehen oder nicht. *Praktisch* verhält sich die Sache aber doch anders und es verliert dies Kriterium etwas von seiner mathematischen Schärfe, ja es tritt auch hier ein gewisser subjektiver Faktor auf. Denn wenn die Konstruktionslinien auf dem Bilde bzw. auf der Vorzeichnung auch mathematisch richtig gezeichnet waren, so werden sie schon durch den Farbenauftrag etwas ungenau. Weiter verzieht sich die Leinwand, die Holztafel wirft sich. Endlich werden die Linien ja auf der photographischen Reproduktion nachgefahren. Lassen wir die etwaigen Fehler des Objektivs außer acht, so werden doch die Kopien in den Bädern verzerrt und zwar nach verschiedenen Richtungen verschieden stark und schließlich bildet das Aufziehen der Kopien eine letzte Fehlerquelle. Es ist also kein Wunder, daß das nachprüfende Lineal in seinen Stellungen Abweichungen erleidet und daß ein noch so genau konstruiertes Bild kleine Ungenauigkeiten zeigt. Indes wird die Kontrolle von Bildern, die sicher perspektivisch richtig gezeichnet sind, den Anfänger bald belehren, welchen Grad von Genauigkeit er vernünftigerweise von den Konstruktionslinien verlangen darf, sodaß er sich von Pedanterie und Optimismus gleichzeitig ferne hält.

3. Hat nun Jan van Eyck das *Gesetz* vom gemeinsamen Fluchtpunkt der Tiefenlinien einer Ebene, z. B. einer Bodenfläche, gekannt? Solche Fußbodenmuster finden wir auf zahlreichen Bildern des Künstlers und ich habe die Nachmessungen an den Photographien selbst durchgeführt: viele lassen sich sogar auch an den Kernschen Tafeln schon vornehmen.

Betrachten wir zunächst die *Außen*seiten des Genter Altars, so zeigt uns das linke innere Bild — es stellt einen Durchblick auf eine Straße dar — den am *besten* konstruierten Fußboden, welchen Kern merkwürdigerweise nicht abbildet und auch nicht erwähnt. Dieses System von Tiefenlinien darf wohl als mathematisch richtig konstruiert bezeichnet werden. Der Fußboden rechts daneben — wir sehen in dem Bilde eine gotische Nische mit Waschgerät und Handtuch — zeigt schon einige Abweichungen, indem die äußerste Tiefenlinie rechts jedenfalls nicht mehr durch den gemeinsamen Schnittpunkt der andern geht; auf ihn bezieht sich Kern bei seiner oben zitierten Behauptung. Betrachten wir weiter die beiden äußeren Bilder links und rechts, also den Engel der Verkündigung und die betende Maria, so stimmen die beiden Fußböden auch nicht angenähert.

Von der Innenseite des Altars erwähnt Kern noch den Boden in der Darstellung Gottvaters; aber schon die beigegebene Tafel läßt erkennen, daß hier von einem Gesetz bei der Konstruktion nicht die Rede sein kann.

Besser stimmt wieder der Fußboden in dem Bilde des Arnolfini und seiner Frau (London, Nationalgalerie), aber hier kann man nur wenig Tiefenlinien verfolgen. Die Tiefenlinien der Decke zeigen nach der Kernschen Tafel keinen gemeinsamen Fluchtpunkt (die Decke ist so dunkel, daß ich auf der Photographie diese Linien nicht mehr sehe). Endlich können wir diese ermüdende, aber notwendige Betrachtung damit abschließen, daß wir konstatieren, daß auch auf der Rolin-Madonna des Louvre, sowie auf der Madonna des Kanonikus Pala (Brügge, Akademie) datiert von 1436, die Tiefenlinien der Bodenflächen das mathematische Gesetz vom Fluchtpunkt nicht erfüllen.

Nun könnte man hier allerdings einwenden, daß Jan van Eyck das Gesetz vom Fluchtpunkte kannte, daß er aber vielleicht mit Überlegung, also aus ästhetischen Gründen, von ihm abwich. Das halte ich aber, wie auch Kern richtig bemerkt, für sehr wenig wahrscheinlich. Später, im 16. Jahrhundert, haben die Künstler oft sich solche Freiheiten gestattet. Daß aber Jan van Eyck ein Gesetz entdeckt, um es nach kurzer Zeit schon nicht mehr zu beachten, liegt gewiß nicht im Sinne jener Zeit. Dann bleibt mir aber kaum etwas anderes übrig, als anzunehmen, daß Jan das Gesetz vom Fluchtpunkt der Tiefenlinien einer Ebene, das heißt dessen mathematisch präzisen Ausdruck, *überhaupt nicht gekannt* hat. Daß der zuerst erwähnte Fußboden ziemlich genau mit der Theorie in Übereinstimmung sich befindet, muß ich für ein Spiel des Zufalls halten. Hatte der Künstler die Anschauung sich ausgebildet, daß die Tiefenlinien im allgemeinen gegen eine mittlere Stelle zusammenlaufen, so konnte er gegebenen Falles diese Stelle auch einmal zu einem Punkte zusammenschrumpfen lassen.

4. Natürlich hat Jan dann das Gesetz vom Fluchtpunkt der Tiefenlinien *im Raume* auch nicht erkannt und die Rolin-Madonna gibt dafür doch einen unanfechtbaren Beweis. Petrus Christus dagegen scheint das genannte Gesetz zu kennen. Für Jan van Eyck aber kann ich aus der von Kern gegebenen Reihe keine eigentliche Entwicklung herauslesen: gewiß zeigt das eine Bild größere perspektivische Verstöße als das andere, aber die tastende Unsicherheit des Empirikers geht durch alle hindurch und statt einen stetigen *Fortschritt* in der Perspektive zu beobachten, habe ich eher den Eindruck, daß der Künstler probiert und tastet. Wenn dann Jan an Stelle eines Augpunktes ein ganzes *Gebiet* annahm, so trat naturgemäß an Stelle eines Horizontes ein ganzer *Streifen* und so erkläre ich die verschiedenen Horizonte, die Kern konstatiert, der eben in betreff der mathematischen Genauigkeit doch zu geringe Anforderungen an eine perspektivische Zeichnung stellt.

Überhaupt möchte ich der Zeit der Brüder van Eyck in bezug auf Darstellung noch ein ziemliches Maß von Naivität zuschreiben und deswegen scheint mir auch die folgende Auffassung Kerns etwas gewagt: auf dem Verkündigungsbild (Petersburg, Eremitage) laufen die Tiefenlinien der Seitenwand gegen eine andere „Stelle" hin als die des Fußbodens; wo beide Ebenen zusammenstoßen; da ergibt sich für *unser* Auge eine Unzuträglichkeit. Kern spricht nun die Ansicht aus (S. 13), daß der Künstler der Schwierigkeit, die Ebene des Fußbodens mit der Ebene der Wand in einen räumlichen Zusammenhang zu bringen, durch eine geschickte Anordnung des Engels begegnet. Derselbe soll also diese Übergangsstelle verdecken. Ob da nicht dem Künstler ein größeres Raumgefühl zugeschrieben wird, als seine ganze Darstellung in bezug auf die Linienführung verrät? In perspektivischer Hinsicht beleidigten offenbar diese Linien das Auge des Künstlers nicht; er hatte also keinen Grund, die Übergangsstelle durch den Engel zu maskieren, wie er ja auch den Zusammenhang zwischen Seitenwand und Decke durchaus frei ließ.

5. Was endlich noch die Bedeutung der Perspektive Euklids betrifft, so wird meines Erachtens dieselbe leicht überschätzt. Euklid und seine Nachfolger im Mittelalter geben nur eine Theorie der Erscheinung, das heißt Betrachtungen über die *Gesichtswinkel*, unter denen die Gegenstände z. B. gleich lange Strecken erscheinen. Den wesentlichen Schritt, die Sehstrahlenpyramide mit einer Ebene zu schneiden und statt der Winkel den auf dieser Ebene sich ausbildenden *Schnitt* zu studieren, tat erst Brunellesco. Die Sätze, welche sich auf die Gesichtswinkel beziehen, sind aber sehr verschieden von denen, welche über das Bild in der schneidenden Ebene ausgesagt werden können. Mancher moderne Künstler, der einen Menschen an dem Fuß eines Turmes und einen gleich großen in der gleichen Tiefe auf der Plattform des Turmes zu zeichnen hat, zaudert vielleicht einen Moment, ob nicht der Mann auf dem Turme im Bilde kleiner sein müsse. Er ist doch weiter vom Beschauer entfernt! Aber wir *betrachten* ja das Bild und dann entspricht dem Manne oben auch der kleinere Gesichtswinkel. Um also über die theoretischen Kenntnisse des Nordens ins klare zu kommen, müßte man wissen, wer hier den Übergang von den Gesichtswinkeln zur Bildebene und damit zur wirklichen Abstraktion der Perspektive ausgeführt hat, sofern dies unabhängig von Brunellesco geschehen ist.

Wenn zum Schlusse Christian Wiener in seiner vorzüglichen Darstellung der Entwicklung der Perspektive (Lehrbuch der darstellenden Geometrie 1. Bd. S. 9) über Jan van Eyck bemerkt: „in der Linien-

perspektive zeigt er die Kenntnis des Fluchtpunktes, der freilich nicht immer einheitlich gewahrt ist, eine *mathematische* Kenntnis der Perspektive besaß er nicht", so kann ich das nur so verstehen, daß der Begriff Fluchtpunkt nicht im mathematischen Sinne, sondern als ein größeres oder kleineres Gebiet aufgefaßt wird, und dann geben meine Ausführungen für diese Behauptung geradezu den Beweis. Man wird Jan van Eyck in bezug auf die Perspektive als einen Praktiker bezeichnen müssen, der mit ungewöhnlich scharfer Beobachtungsgabe ausgestattet, aber doch nur auf empirischer Grundlage, das parallelperspektivische System seiner Vorgänger verließ und die perspektivische Zeichnung insofern verbesserte, als er die Bilder paralleler Geraden um einen Fluchtpunktbezirk sich drehen ließ.

München, Jan. 1905.

Katoptrisches Okular.

Von Felix Biske in Straßburg i. E.

Unter Verwendung eines Reflektors wird die aufgehobene chromatische Aberration selbst durch die achromatischen dioptrischen Okulare teilweise wieder eingeführt. Ein vollständig achromatisches kann nur ein katoptrisches Okular sein. Ein solches könnte nach demselben Prinzipe wie die Reflektoren konstruiert werden.

Vom großen Spiegel des Reflektors wird ein reelles Bildchen des Objektes gebildet, das durch den kleinen konvexen oder konkaven Spiegel in den Scheitel des großen, oder durch den kleinen ebenen Spiegel in eine um 90^0 gegen die Achse geneigte Richtung, im allgemeinen in Cc entworfen sei (Figur). Es sei vom konkaven Spiegel S_1 mit dem Fokus F_1 ein zum letzten Bildchen konjugiertes in C_1c_1 gebildet und dieses vom konkaven oder konvexen Spiegel S_2 mit dem Fokus F_2 in ein imaginäres Bildchen in C_2c_2 verwandelt, welches zur Beobachtung gelangt. Die Dimensionen des Okulares ergeben sich folgendermaßen.

Es seien zuerst die Strahlen von dem Punkte des entfernten Objektes, der in der Achse des Reflektors liegt, berücksichtigt. Von diesen Strahlen werden die von der Peripherie des großen Spiegels reflektierten hinter dem Bildchen Cc einen Lichtkegel bilden, dessen Öffnung $A_1CS_1 = \alpha$ bekannt ist; dagegen werden die von der Peripherie des kleinen Spiegels abgegrenzten Strahlen einen Schattenkegel bilden, dessen Öffnung $A_1CB = \beta$ auch bekannt ist. Der Spiegel S_1 sei in den Lichtkegel in der Entfernung $CA_1 = a_1$ hingestellt, sodaß er dessen

Durchschnitt ausfüllt und der Spiegel S_2 in den Schattenkegel, in der Entfernung $A_1A_2 = l$, sodaß er auch dessen Durchschnitt ausfüllt.

Soll die Entfernung des Achsenpunktes des Bildchens C_2c_2 von A_1 gleich der deutlichen Sehweite d sein, so ergibt sich folgende Bedingung:

Die Entfernung des Bildchens C_1c_1 vom Spiegel S_1, dessen Fokalweite f_1 und dessen Höhe h_1 sei, wird[1])

(1) $$b_1 = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} - \frac{1}{8}\left(\frac{a_1 - 2f_1}{a_1 - f_1}\right)^2 \frac{h_1^2}{f_1},$$

für den Achsenstrahl ist sie ohne das zweite Glied im zweiten Teile.

Da $C_1A_2 = l - b_1$, so wird die Entfernung des Bildchens C_2c_2 vom Spiegel S_2, dessen Fokalweite f_2 und dessen Höhe h_2 sei, für den Achsenstrahl

$$b_2 = \frac{(l - b_1) f_2}{(l - b_1) \mp f_2},$$

wo das obere Zeichen für konkaven, das untere für konvexen Spiegel gilt, und da diese gleich $\mp (d - l)$ sein soll, so ergibt sich nach Substitution

(I) $$b_2 = \frac{\left(l - \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}\right) f_2}{l - \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} \pm f_2} = \mp (d - l).$$

Sollen noch die peripherischen Strahlen nach der Reflexion vom Spiegel S_1 durch Spiegel S_2 aufgefangen werden und die Größe des letztern dem Durchschnitte des Schattenkegels höchstens gleich sein, so ergibt sich noch folgende Bedingung:

Es ist mit genügender Genauigkeit

$$h_2 = \frac{a_2}{b_1} h_1,$$

oder da $h_1 = a_1 \operatorname{tg} \alpha$ und $h_2 \lesseqgtr (a_1 - l) \operatorname{tg} \beta$ sein soll, so ist nach Substitution

(II) $$\frac{\pm\left(l - \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}\right)}{\frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}} \cdot a_1 \operatorname{tg} \alpha \lesseqgtr (a_1 - l) \operatorname{tg} \beta.$$

Sollen weiter die peripherischen Strahlen nach der Reflexion von S_1 und S_2 durch die Öffnung des Schattenkegels im Spiegel S_1 austreten,

1) Handw. d. Astron. Bd. I S. 743 (1897).

und diese Öffnung die Größe der Augenpupille p nicht überschreiten, so muß der Achsenpunkt des Bildchens $C_2 c_2$ hinter oder mindestens in C liegen, was weitere folgende Bedingung ergibt

(III) $$a_1 \gtreqless d,$$

und es muß

(IV) $$\frac{h_2 \cdot d}{d - l} \leqq p.$$

Es seien die Strahlen vom Rande des Objektes berücksichtigt, so werden diese hinter dem Bildchen Cc einen Lichtkegel bilden, der durch c geht und mit der Achse einen Winkel $A_1 GD = \alpha'$ einschließt, und einen Schattenkegel, der durch c geht und mit der Achse einen Winkel $A_1 EB' = \beta'$ bildet. Der Spiegel S_1 soll den neuen Lichtkegel, der Spiegel S_2 den neuen Schattenkegel ausfüllen.

Die Bedingung der deutlichen Sehweite des Bildchens $C_2 c_2$ gibt dieselbe Gleichung (I).

Die Bedingung der gleichen Größe des Spiegels S_2 mit dem Durchschnitte des Schattenkegels ergibt auch die Gleichung (II), in welcher aber der zweite Teil gleich wird:

(II') $$\gtrless A_2 E \operatorname{tg} \beta' \gtrless (a_1 - l + Cc \operatorname{ctg} \beta') \operatorname{tg} \beta'.$$

Die Bedingung noch, daß die peripherischen Randstrahlen des Bildchens $C_2 c_2$ durch die Öffnung des Schattenkegels im Spiegel S_1 austreten sollen, die kleiner als die Augenpupille sein muß, ergibt, daß der Durchschnitt dieser Strahlen $c_2 B'$ mit der Achse hinter oder in E liegen muß, folglich

(III') $$a_1 \gtreqless d - (Cc + C_2 c_2) \operatorname{ctg} \beta'$$

und

(IV') $$\frac{h_2 (d - C_2 c_2 \operatorname{ctg} \beta')}{d - C_2 c_2 \operatorname{ctg} \beta' - l} \leqq p.$$

Die Bedingung weiter, daß die Vergrößerung des Okulares ein bestimmtes Maß überschreiten soll, ergibt, daß die Größe des Bildchens $C_2 c_2$, da die des Bildchens Cc gegeben ist, größer als $m \cdot Cc$ sein muß.

Die Größe des Bildchens $C_1 c_1$, das nahe vom Fokus F_1 entsteht, ist

$$C_1 c_1 = -\frac{Cc \cdot f_1}{a_1 - f_1};$$

da $C_1 c_1$ auch nahe dem Fokus F_2 liegt, so ist:

$$C_2 c_2 = \mp \frac{C_1 c_1 \cdot f_2}{a_2 \mp f_2},$$

und da diese $\mp m \cdot Cc$ sein muß, so ergibt sich nach Substitution:

$$(\mathrm{V'}) \qquad \pm \frac{\frac{Cc \cdot f_1}{a_1 - f_1} \cdot f_2}{l - \frac{a_1 - f_1}{a_1 f_1} \mp f_4} = \mp m \cdot C.$$

Die Gleichungen bezw. Ungleichungen (I) bis (IV) oder (I') bis (V') enthalten die vier Unbekannten a_1, l, f_1, f_2. Damit die sphärische Aberration der Kugelspiegel nicht sehr störend wirkt, muß h_1 gegen f_1 und h_2 gegen f_2 verhältnismäßig klein sein, infolge der Gleichung (I); oder es muß der Spiegel S_1 elliptisch, dagegen der Spiegel S_2 hyperbolisch angeschliffen werden.

Beispiel. Es seien die folgenden Dimensionen des großen Reflektors zu Melbourne, der nach Cassegrainschem Typus eingerichtet ist, genommen[1])

Öffnung des Hauptspiegels	$2R = 1.219$ m
„ des kleinen Spiegels	$2r = 0.203$ „
Brennweite des Hauptspiegels	$F = 9.14$ „
„ des kleinen Spiegels	$f = 1.9$ „
Entfernung des kleinen Spiegels vom großen	$D = 7.6$ „
Öffnung in der Mitte des großen Spiegels	$2\varrho = 0.203$ „ .

Es sei der Fall des unendlich entfernten Punktes, der in der Achse des Reflektors liegt, berücksichtigt. Die oben entwickelten Formeln gelten für den allgemeinen Fall, daß der Winkel β des Schattenkegels groß genug sein kann und dann $a_1 < d$, zufolge der Gleichungen (III) und (IV), sein müßte; in dem genommenen Beispiele wird der Winkel β klein sein, und es ist nötig in der Gleichung (III) $a_1 = d$ zu nehmen, wodurch in der Gleichung (II) $h_2 = (d - l) \operatorname{tg} \beta$ wird, und die Gleichung (IV) $d \operatorname{tg} \beta \leqq p$ ergibt, was die Größe des nötigen Schattenkegels beschränkt, da p und d bekannt sind. Die übrig gebliebenen Gleichungen (I) und (II) enthalten noch die Unbekannten l, f_1, f_2, erlauben folglich willkürliche Annahme einer von diesen.

Die Entfernung des Bildchens C vom Cassegrainschen Spiegel im großen Reflektor ist $b = \frac{af}{a - f} = -7.125$ m, weil $d = F - D = 1.5$ m ist. Da der peripherische Lichtstrahl des Objektivspiegels am Rande des Cassegrainschen Spiegels zum Bildchen C reflektiert wird, so ist die Öffnung des Lichtkegels gegeben durch $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{b}$; und die Höhe

1) Dr. L. Ambronn: „Handbuch d. Astronom. Instrum.kunde" S. 1184.

des Okularspiegels S_1, zufolge $h_1 = d \operatorname{tg} \alpha$, wo $d = 25$ cm, ergibt sich zu 3.6 mm. Nimmt man den Radius der Pupille des Auges zu 2 mm an, und beziehe sich die willkürliche Annahme auf die Höhe des kleinen Spiegels S_2, die $h_2 = 1.75$ mm sei, so ist $(d - l) = h_2 \operatorname{ctg} \beta = \frac{h_2 \cdot d}{p}$, wovon ergibt sich $l = 31.3$ mm.

Im Falle des konkaven Spiegels S_2 ist $b_1 = \frac{l \cdot h_1}{h_1 + h_2} = 21.0$ mm, folglich $a_2 = l - b_1 = 10.3$ mm und somit $f_1 = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_1 + b_1} = 19.4$ mm, dagegen $f_2 = \frac{a_2 b_2}{a_2 + b_2} = 10.8$ mm, wo $b_2 = -(d - l) = -218.7$ mm. Im Falle des konvexen Spiegels S_2, der von derselben Höhe h_2 und in derselben Entfernung l wie der konkave Spiegel sei, ist $b_1 = \frac{l h_1}{h_1 - h_2} = 61.6$ mm, folglich $a_2 = l - b_1 = -30.3$ mm und somit $f_1 = 49.4$ mm, dagegen $f_2 = \frac{a_2 \cdot b_2}{a_2 - b_2} = 26.6$ mm, wo $b_2 = d - l = +218.7$ mm.

In diesem Beispiele ist das Verhältnis der Öffnung des Lichtkegels zu der des Schattenkegels, $h_1 : p = 1.8$ im Okulare und zufolge der Ähnlichkeit dieser Kegel auch im Objektiv. Da der Radius des Lichtkegels im Objektiv $R = 0.609$ m ist, so hätte der Radius des Schattenkegels im Objektiv zu sein $s = 0.342$ m. Die Öffnung des geometrischen Schattens vom kleinen Spiegel am großen Spiegel hat den Radius $r = 0.102$ m; es entstehen aber hinter dem kleinen Spiegel Diffraktionsringe, die einen größeren zentralen Kegel des unbrauchbaren Lichtes verursachen. In speziellen Fällen wäre es vorteilhafter, die Größe des kleinen Spiegels im Reflektor so auszuwählen, daß die Größe seines geometrischen Schattens im großen Spiegel der Öffnung des für das Okular nötigen Schattenkegels nahe gleich wäre. Ist im obigen Beispiele der Radius eines solchen kleinen Spiegels x, seine Entfernung vom Fokus F des großen Spiegels y und der Radius des für das Okular nötigen Schattenkegels in diesem kleinen Spiegel z, so ist $\frac{x}{R} = \frac{y}{F}$, $\frac{z}{x} = \frac{x}{R}$ und folglich $\operatorname{tg} \beta = \frac{z}{CF - y} = \frac{x^2}{R \cdot CF - Fx}$, wo $CF = q = b + (F - D) = 8.2$ m.

Es ergibt sich aus der quadratischen Gleichung

$$x = -\frac{F \operatorname{tg} \beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{F \operatorname{tg} \beta}{2}\right)^2 + Rq \operatorname{tg} \beta} = 0.17 \text{ m};$$

folglich brauchte der Radius des kleinen Spiegels nur wenig größer zu sein, und das Verhältnis des Lichtkegels zum Schattenkegel im Objektiv wäre $R : x = 3.6$, wodurch auch die Okularspiegel vergrößert werden könnten.

Da bei den cölestischen Objekten, die einen Gesichtswinkel haben, die Größen der Bildchen klein sind, so würden die Dimensionen der Okularspiegel nicht wesentlich geändert.

Bei Einstellung auf die deutliche Sehweite können die Spiegel S_1 und S_2 gemeinsam ein wenig für Vergrößerung derselben vom Bildchen Cc entfernt, für Verkleinerung dagegen diesem Bildchen genähert werden.

In der Photometrie, speziell bei den kolorimetrischen Untersuchungen der Gestirne sind katoptrische Okulare prinzipiell notwendig, weil hier keine chromatische Aberration bleiben soll, damit die wirkliche gesamte Farbe des Objektes beobachtet werden kann.

Graphisch-analytische Ausgleichung eines ebenen Linienzuges nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Von J. Schnöckel in Aachen.

Unter den zahlreichen Reihenentwickelungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, welche I. P. Gram im Journal für Mathematik, Band 94, S. 41 und folgende aufführt, hat die Fouriersche Reihe für praktische Zwecke im besonderen Bedeutung erlangt, da sich ihre Koeffizienten mit Hilfe eines harmonischen Analysators leicht bestimmen lassen. Wesentlich schwieriger gestaltet sich die graphisch-analytische Darstellung eines ebenen Linienzuges in Form von Potenzreihen, deren Koeffizienten Momente verschiedener Ordnung der zu bestimmenden Kurve sind.[1]) Diese Aufgabe kann zwar mit dem Integraphen von Abdank-Abakanowitz gelöst werden, erfordert aber dann eben so viele Kurvenbefahrungen, wie die gesuchte Reihe Glieder enthalten soll.

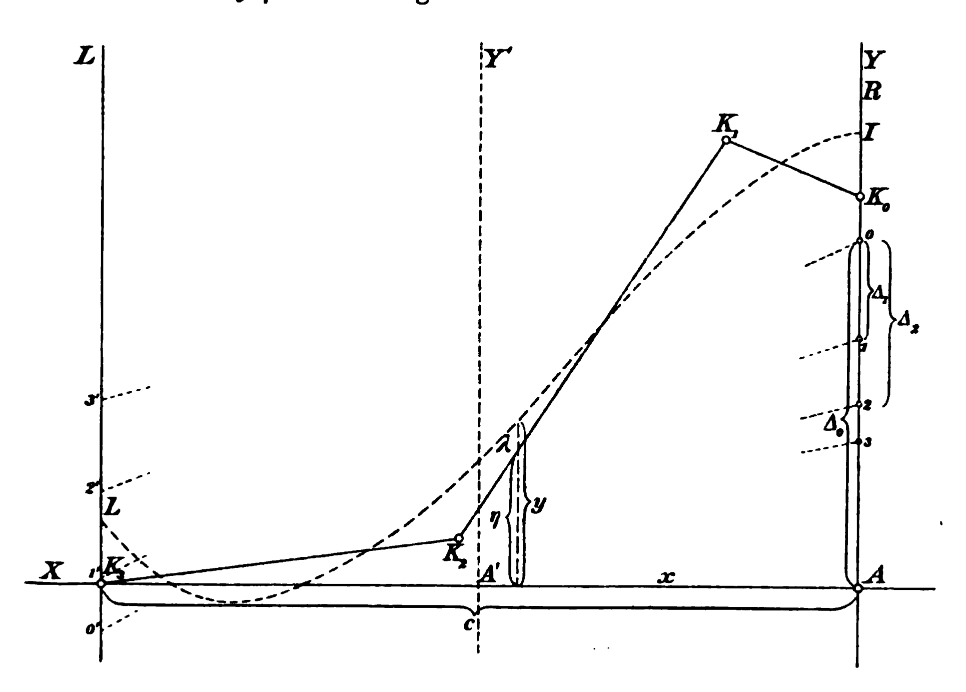
Liegen $m+1$ durch eine Potenzreihe zu interpolierende Beobachtungswerte $\eta = f(x)$ vor und trägt man sie nach Koordinaten auf Millimeterpapier auf, so lassen sich nach einem vom Verfasser in dieser Zeitschrift 51. Band (1904), Heft 1, S. 42 u. flg. angegebenen Verfahren[2]) die Momente verschiedener Ordnung des durch geradlinige Verbindung der $m+1$ Punkte entstehenden Polygons in einfacher konstruktiver Weise ermitteln. Eine zu integrierende Kurve ersetzt man zweckmäßig durch eine eckige Figur, welche sich ihr möglichst gut anschließt, und erreicht dann eine größere Genauigkeit als mit verwickelten

1) Vergl. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Band I, Teil 2, S. 819 und Band II, Teil 1, S. 689. Ferner Bruns, Astronomische Nachrichten, Jahrg. 1898, S. 161.

2) Vergl. ferner Schnöckel, diese Zeitschrift 49. Band (1903), Heft 3, S. 372f.

Apparaten. Die folgenden zur Ermittelung der Koeffizienten dienenden Formeln stützen sich auf die bekannten und von Gram hergeleiteten Reihenentwicklungen[1]) nach den Kugelfunktionen $X^{(n)}$ und schließen sich der erwähnten konstruktiven Lösung des Momentenproblems eng an.

Soll die Gleichung des Linienzuges $K_0, K_1 \ldots K_m$ (für $m = 3$, siehe die Figur) derart dargestellt werden, daß $\Sigma\lambda\lambda = \Sigma(y - \eta)^2$ ein Minimum wird, so hat man das Polygon von K_0 aus gegen die Achse AY nach dem Moment $\int \eta x^n dx$ auszugleichen. Macht man der Reihe nach



$K_1R_0 \parallel K_3K_0$, $K_1R_1 \parallel K_2R_0, \ldots, K_1R_n \parallel K_2R_{(n-1)}$, so ist K_2R_n Gradiente $n$ter Ordnung für $K_0K_1K_2$. Nach $(m-1)$ maliger Ausführung dieser Konstruktion wird $K_0, K_1 \ldots K_m$ durch die Gradienten n-ter Ordnung $\overline{0K_3}, \overline{1K_3}, \ldots, \overline{nK_3}$ ersetzt. Wird $\overline{An} = r_n$ und $r_0 - r_n = \Delta_n$ gesetzt, so werden die Δ in der Regel kleiner als die r sein, da sich die Punkte n um den Punkt 0 zu gruppieren pflegen. Durch Einführung der Δ_n gestalten sich aber auch die folgenden Formeln einfacher. Nach vollzogener Ausgleichung bestimmt man die Größe z nach den Formeln

1) Vergl. M. Plarr, Comptes rendus des séances de l'académie des sciences 1857, S. 984. Ferner R. Schumann, Potenzreihenentwicklung und Methode der kleinsten Quadrate, Leipzig 1905 (Teubners Verlag).

$$(1)\quad \begin{aligned} z_0 &= \Delta_0 \\ z_1 &= \Delta_0 + \quad 2\Delta_1 \\ z_2 &= \quad 5(2\Delta_1 - \Delta_2) \\ z_3 &= \quad 14(2\Delta_1 - 2{,}5\Delta_2 + \Delta_3) \\ z_4 &= \quad 30(2\Delta_1 - 4{,}5\Delta_2 + 4{,}2\Delta_3 - 1{,}4\Delta_4) \\ z_5 &= \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{aligned}$$

Setzt man $A'A = AK_m = 1$ und betrachtet $XA'Y'$ als ersten Quadranten des Koordinatensystems $\mathfrak{x}$, y, so sind die z Koeffizienten einer Reihenentwickelung von K_0, $K_1 \ldots K_m$ nach Kugelfunktionen

$$(2)\quad 2y = z_0 X^{(0)} - z_1 X^{(1)} + z_2 X^{(2)} - z_3 X^{(3)} + - \cdots + (-1)^n z_n X^{(n)}.$$

Um die Gleichung des gegebenen Linienzuges in Form einer Potenzreihe darzustellen, legt man die Ordinatenachse passend durch K_0 und erhält dann für die Koeffizienten der Reihe

$$(3)\quad \begin{aligned} y = \tfrac{1}{2}a_0 - a_1\left(\frac{x}{c}\right) + 3a_2\left(\frac{x}{c}\right)^2 - 10a_3\left(\frac{x}{c}\right)^3 + 35a_4\left(\frac{x}{c}\right)^4 \\ - + \cdots (-1)^n \tfrac{1}{2}(2n)_n \cdot a_n\left(\frac{x}{c}\right)^n \end{aligned}$$

die nachher zu beweisenden Formeln;

$$(4)\quad \begin{aligned} a_0 &= z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + \cdots \\ a_1 &= z_1 + 3z_2 + 6z_3 + 10z_4 + \cdots \\ a_2 &= z_2 + 5z_3 + 15z_4 + \cdots \\ a_3 &= z_3 + 7z_4 + \cdots \\ a_4 &= z_4 + \cdots \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ a_n &= (2n)_0 z_n + (2n+1)_1 z_{(n+1)} + (2n+2)_2 z_{(n+2)} + (2n+3)_3 z_{(n+3)} + \cdots \end{aligned}$$

In den Gleichungen (1), (3) und (4) kann die Abszisse $AK_3 = c$ jeden beliebigen Wert haben. Bricht man die Reihe (3) mit dem Gliede $a_i x^i$ ab, so werden in (1) und (4) die Δ, z und a mit dem Index $(i+1)$, $(i+2)$ ... zu Null.

Beispiel.

Der in der Figur verzeichnete Linienzug $K_0 \ldots K_3$ wird durch die Gradienten $\overline{0K_3}$, $\overline{1K_3}$, $\overline{2K_3}$, $\overline{3K_3}$ ausgeglichen. Es ergeben sich in Millimetern

$$r_0 = \Delta_0 = + 45{,}6,\quad \Delta_1 = + 13{,}0,\quad \Delta_2 = + 21{,}5,\quad \Delta_3 = + 26{,}3$$

Nach (1) werden hieraus berechnet

$$z_0 = +45{,}6, \quad z_1 = +71{,}6, \quad z_2 = +22{,}5, \quad z_3 = -20{,}3$$

Da $c = 100$ mm ist, folgt aus (4) in Verbindung mit (3)

$$y = +59{,}7 - 0{,}173x - 0{,}0237x^2 + 0{,}000203x^3.$$

Um nach Bestimmung des Punktes 4 in der Figur diese Gleichung noch auf den vierten Grad zu bringen, hätte man nach (3) und (4) den Koeffizienten der Reihe nach die Korrekturen $\frac{1}{2}z_4$, $\frac{10}{c}z_4$, $\frac{45}{c^2}z_4$, $\frac{70}{c^3}z_4$, $\frac{35}{c^4}z_4$ hinzuzufügen.

Der Kontrolle und Vergrößerung der Genauigkeit halber ist es erwähnenswert, daß man die Ausgleichung von K_0K_3 auch in bezug auf die Achse K_3L vornehmen darf, ohne die Formeln (1) bis (4) zu verändern. Nur z_1, z_3, z_5 usw. wechseln das Vorzeichen. Um schräge Lagen der Gradienten gegen die Achse K_3L zu vermeiden, ist in der Figur die Ausgleichung des Zuges $\overline{K_3K_2K_1K_0A}$ in K_0 abgebrochen, sodaß man zu den Längen $\overline{0'K_3}$, $\overline{1'K_3}$, $\overline{2'K_3}$, $\overline{3'K_3}$ die Größen $\overline{AK_0}$, $2\cdot\overline{AK_0}$, $3\cdot\overline{AK_0}$, $4\cdot\overline{AK_0}$ zu addieren hat, um r_0, r_1, r_2 und r_3 und daraus die Δ zu erhalten. Für das Beispiel findet sich

$$AK_0 = 51{,}5 \quad \overline{0'K_3} = -6{,}2 \quad \overline{1'K_3} = +0{,}8 \quad \overline{2'K_3} = +12{,}2$$
$$\overline{3'K_3} = +24{,}2 \quad .$$

und daraus

$$\Delta_0 = +45{,}3, \quad \Delta_1 = -58{,}5 \text{ usw.}$$
$$z_0 = +45{,}3, \quad z_1 = +71{,}7 \text{ usw.}$$

Die Mittelbildung aus den beiden auf verschiedenen Wegen erhaltenen z vergrößert die Genauigkeit der Analysierung sehr erheblich.

Ableitung der Reihen (1) bis (4).

Die Bestimmungsgleichung für die Koeffizienten z in (2) lautet nach Gram (s. o.)

$$z_n = (-1)^n(2n+1)\int_{-1}^{+1}\eta X^{(n)}d\xi.$$

Setzt man für die Kugelfunktion $X^{(n)}$ den aus der Ivoryschen Gleichung entwickelten Ausdruck

$$X^{(n)} = \frac{1}{2^n}[(2n)_n\xi^n - n_1(2n-2)_n\xi^{n-2} + \cdots]$$

ein, so erhält man

$$(5)\quad z_n = \frac{(-1)^n(2n+1)}{2^n}\left[(2n)_n\int_{-1}^{+1}\eta\xi^n d\xi - n_1(2n-2)_n\int_{-1}^{+1}\eta\xi^{n-2}d\xi + - \cdots\right].$$

Mit Hilfe des binomischen Satzes kann man für $\mathfrak{x} = AA' - 1 = x - 1$ das Moment $\int\limits_{-1}^{+1} \eta \mathfrak{x}^p d\mathfrak{x}$ als lineare Funktion der Momente $\int\limits_{0}^{2} \eta x^p dx$ von der nullten bis p ten Ordnung darstellen und findet in Rücksicht auf die in Anmerkung 2) S. 430 erwähnte Abhandlung

$$(6) \quad \int\limits_{-1}^{+1} \eta \mathfrak{x}^p d\mathfrak{x} = (-1)^p \cdot 2\left(\frac{p_0 r_0}{1 \cdot 2} - \frac{p_1 2^1 r_1}{2 \cdot 3} + \frac{p_2 2^2 r_2}{3 \cdot 4} - + \cdots \frac{p_i 2^i r_i}{(i+1)(i+2)}\right).$$

Nach Einsetzen in (5) ergibt sich, wenn alle mit r_i behafteten Glieder zusammengefaßt werden, für den Koeffizienten von r_i in z_n

$$(7) \quad \frac{(-1)^i (2n+1)}{(i+1)(i+2) 2^{n-i-1}} [n_0 (n)_i (2n)_n - n_1 (n-2)_i (2n-2)_n + n_2 \cdot (n-4)_i (2n-4)_n - + \cdots].$$

Hiernach sind die Gleichungen (1) zu berechnen, wenn $r_i = r_0 - \Delta_i$ gesetzt wird.

Aus (6) folgt auch, daß sich die Gleichungen (1) und (7) nicht ändern, wenn die Momentenachse AY mit $K_3 L$ vertauscht wird, weil $AA' = K_3 A'$ ist.

Um die Reihen (3) und (4) zu entwickeln, ersetzt man in der Ivoryschen Formel $\mathfrak{x}$ durch $x - 1$:

$$X^{(n)} = \frac{1}{2^n n!} D_x^n (-x)^n (2-x)^n$$

und erhält nach dem binomischen Satz

$$X^{(n)} = \frac{(-1)^n}{n!} D_x^{(n)} \left(x^n - \frac{n_1}{2^1} x^{n+1} + \frac{n_2}{2^2} x^{n+2} - + \cdots \frac{n_i}{2^i} x^{n+i}\right)$$

Durch Differenzieren wird, wenn man alle Glieder summiert,

$$X^{(n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \sum (-1)^i n_i (n+i)_i n! \left(\frac{x}{2}\right)^i$$
$$= (-1)^n \sum (-1)^i (2i)_i (n+i)_{2i} \left(\frac{x}{2}\right)^i.$$

Die Summierung von (2) nach n ergibt nun

$$2y = (-1)^i (2i)_i \left(\frac{x}{2}\right)^i \sum (n+i)_{2i} z_n.$$

Setzt man nach der Reihe $i = n,\ n+1,\ \ldots$, so folgt für die Koeffizienten der Gleichung

$$y = \alpha_0 - \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 - \alpha_3 x^3 + - \cdots (-1)^n \alpha_n x^n$$

allgemein

$$\alpha_n = \frac{(2n)_n}{2^{n+1}}\left[(2n)_0 z_n + (2n+1)_1 z_{n+1} + (2n+2)_2 z_{n+2} + \cdots\right]$$

Hieraus ergeben sich die Formeln (3) und (4) für

$$\alpha_n = \frac{(2n)_n}{2^{n+1}} a_n.$$

Die Einführung des Maßstabverhältnisses $AK_3 = c$ wird durch Einsetzen von $\frac{2x}{c}$ anstatt x erreicht.

Tangentenkonstruktion mit Hilfe des Spiegellineals.

Von K. MACK in Hohenheim.

Der Zweck des von dem verstorbenen Prof. E. Reusch in Tübingen angegebenen Spiegellineals[1]) ist die Konstruktion der Normalen irgend einer Kurve in einem beliebigen Punkt. Das Instrumentchen besteht im wesentlichen in einer geeigneten ebenen spiegelnden Fläche, die längs der Kante eines kleinen Lineals senkrecht zum Zeichnungsblatt angebracht ist. Die Normale einer Kurve im Punkt P wird dadurch erhalten, daß die Linealkante durch P hindurchgelegt und das Lineal durch Drehung um P in diejenige Stellung gebracht wird, in welcher das vor dem Spiegel liegende Kurvenstück und sein Spiegelbild sich ohne Knickung aneinander anschließen.

Handelt es sich um die *Tangente* der Kurve im Punkte P, so kann man natürlich derart verfahren, daß man zunächst mit Hilfe des Spiegellineals in der eben geschilderten Weise die Normale zeichnet und sodann durch P die zu ihr Senkrechte zieht. Die Aufgabe läßt sich aber auch ganz direkt mit Hilfe des Spiegellineals lösen, und es nimmt beinahe Wunder, daß Reusch in seiner oben zitierten Notiz nicht auf diese Möglichkeit hingewiesen hat. Man denke sich in Punkt P (s. Fig. 1) das Spiegellineal MN so angelegt, daß seine Richtung angenähert in die Richtung der Tangente fällt; wenn, wie wir voraussetzen, beide Richtungen nicht genau zusammenfallen, so wird die Linealkante die Kurve in einem benachbarten Punkte P_1 zum zweiten Mal schneiden. Da das Kurvenstück PP_1 vom Spiegellineal ver-

1) E. Reusch. Das Spiegellineal. Carls Rep. f. Exp. Phys. **16**, 255, 1880.

[illegible] die nicht verdeckten benachbarten Kurventeile [illegible] der Anblick der in Fig. 2 wiedergegebene sein. Man braucht nun bloß mit dem Spiegellineal diejenige kleine Drehung um P auszuführen, welche bewirkt, daß die Länge des Stückes PP_1 gleich Null wird. Es läßt sich dies mit aller Genauigkeit erreichen, vorausgesetzt daß die auf dem Zeichnungsblatt aufruhende Kante des Spiegellineals ganz scharf ist, d. h. daß die spiegelnde Fläche bis an das Zeichnungsblatt herunterreicht. Träfe letztere Bedingung nicht zu, wäre vielmehr, wie dies bei manchen Ausführungen des Spiegellineals der Fall ist, jene Kante abgestumpft, so würde das Spiegelbild gerade von den dem Lineal zunächst liegenden Kurventeilen fehlen; die Reduktion der Länge PP_1 auf Null ließe sich dann nicht genügend genau durchführen. Ich möchte vermuten, daß bei dem ursprünglichen Reuschschen Modell diese untere Spiegelkante nicht in genügender Schärfe hergestellt war, und daß deshalb Reusch von der direkten Benutzung des kleinen Apparats zur Tangentenkonstruktion absah. Heutzutage ist es mit Hilfe einer Glasschleifmaschine leicht möglich, für genügende Schärfe jener Kante zu sorgen.

In Fig. 3 ist das Spiegellineal in richtiger tangentialer Stellung gezeichnet; das Spiegelbild des Kurventeils PA sei PA_1, dasjenige von PB sei PB_1. Faßt man nun die Linienzüge APB_1 und A_1PB ins Auge, so ist klar, daß beide in P einen Wendepunkt haben. Man hat also für die richtige tangentiale Stellung des Lineals P das weitere Kriterium, daß die Kurventeile AP und PB_1 einerseits, A_1P und PB andererseits, im Punkt P ohne Knickung ineinander übergehen.

Hohenheim, den 3. Dezember 1904.

Kleinere Mitteilungen.

Guccia-Medaille.

Der Circolo Matematico di Palermo (Via Ruggiero Settimo 30) gibt in einem Rundschreiben vom 1. November 1904, unterzeichnet von seinem Präsidenten M. L. Albeggiani, folgendes bekannt. Er wird bei dem IV. internationalen Mathematiker-Kongreß, der im Jahre 1908 in Rom stattfinden soll, einen internationalen Preis für Geometrie erteilen. Dieser Preis, der nach seinem Stifter „Guccia-Medaille" heißt, wird aus einer kleinen tragbaren Goldmedaille und einer Summe von 3000 Lire bestehen.

Die Theorie der algebraischen Raumkurven ist bekanntlich seit den Arbeiten, die durch den Steinerschen Preis von 1882 hervorgerufen wurden, vernachlässigt worden. Die großen Fortschritte der Geometrie, welche durch die synthetischen, algebraischen und funktionentheoretischen Methoden erreicht wurden, haben diese Theorie nicht berührt, sodaß weder die fundamentalen Betrachtungen, die in den erwähnten Arbeiten begonnen wurden, noch andere Fragen, die man stellen könnte, Gegenstand späterer Arbeiten gewesen sind. Geht man ferner vom dreidimensionalen Raume zu höheren Räumen über, so begegnet man für die algebraischen Kurven (insbesondere was ihre Einteilung, das Studium der kanonischen Kurven gegebenen Geschlechts usw. angeht), einer Menge von wichtigen Fragen, mit denen sich bis jetzt noch niemand beschäftigt hat. Auch kennt man über die algebraischen Raumkurven nur wenige Sätze, welche die Realitätsverhältnisse oder einen gegebenen Rationalitätsbereich betreffen. Betrachtungen dieser Art haben den Circolo Matematico di Palermo bewogen, in Übereinstimmung mit den Absichten des Stifters, die Guccia-Medaille

einer Abhandlung zu erteilen, welche die Theorie der algebraischen Raumkurven wesentlich fördert.

Hierbei sollen jedoch in keiner Weise die Probleme und Methoden der Untersuchung im voraus beschränkt werden.

Wenn keine der zur Bewerbung eingesandten, auf die genannte Theorie bezüglichen Arbeiten des Preises würdig befunden wird, so kann er

einer Abhandlung zugesprochen werden, die einen wesentlichen Fortschritt in der Theorie der algebraischen Kurven oder anderer algebraischer Mannigfaltigkeiten bezeichnet.

Die eingereichten Abhandlungen dürfen noch nicht veröffentlicht sein. In einer der vier Sprachen: italienisch, französisch, deutsch oder englisch abgefaßt und, abgesehen von den Formeln, mit der Schreibmaschine geschrieben, sind sie dem Präsidenten des Circolo Matematico di Palermo vor dem 1. Juli 1907 in drei Exemplaren einzureichen. Sie müssen mit einem Motto versehen und von einem verschlossenen Umschlag begleitet sein, der außen das Motto und innen Namen und Wohnort des Verfassers zeigt. Die gekrönte

Abhandlung wird in den „Rendiconti" oder einer anderen Publikation des Circolo Matematico di Palermo abgedruckt. Der Verfasser erhält 200 Sonderabdrücke kostenfrei.

Wenn überhaupt keine der eingereichten Abhandlungen des Preises würdig befunden wird, so kann dieser einer schon veröffentlichten Arbeit zugesprochen werden, die sich auf die oben genannten Theorien bezieht, falls sie zwischen dem Zeitpunkt der Veröffentlichung dieses Programms und dem 1. Juli 1907 erschienen ist.

Den Preis erteilt der Circolo Matematico di Palermo gemäß der Entscheidung einer internationalen Kommision von drei Mitgliedern, die aus den Herren: Max Nöther, Professor an der Universität Erlangen, Henri Poincaré, Professor an der Universität Paris, Corrado Segre, Professor an der Universität Turin besteht. In einer der Sitzungen des IV. internationalen Mathematiker-Kongresses, der 1908 in Rom tagt, wird der Bericht der Kommission verlesen, der Preis erteilt und der Name des gekrönten Gelehrten bekannt gegeben werden.

Bücherschau.

R. Marcolongo, Meccanica razionale, Parte I: Cinematica, Statica, VII u. 271 S., 3 Lire; Parte II: Dinamica, Principii di idrodinamica, VI u. 324 S., 3 Lire. Milano, Ulrico Hoepli, 1905.

Die von der Verlagsbuchhandlung Ulrico Hoepli herausgegebene Sammlung kleiner, billiger Handbücher enthielt bereits ausgezeichnete Werke aus der höheren Mathematik und der Physik, es fehlte jedoch eins über theoretische Mechanik. Diese Lücke ist jetzt durch die beiden Bändchen der *Meccanica razionale* von Herrn Marcolongo in trefflicher Weise ausgefüllt worden. Die Bändchen sind bestimmt, den Studierenden der Universitäten und technischen Hochschulen, Anstalten, die in Italien vereinigt sind, als Führer zu dienen, und decken sich dementsprechend zum großen Teil mit dem Inhalt der Vorlesungen, die der Verfasser in Messina gehalten hat. Der Reihe nach wird die Kinematik, Statik und Dynamik materieller Punkte und starrer Körper behandelt, und den Schluß bildet ein kurzer Abriß der Hydrostatik und Hydrodynamik. Man findet darin nicht nur eine knappe, aber recht klare Übersicht über die klassischen Theorien, sondern es sind auch die neueren und neuesten Forschungen herangezogen worden. Da es in Italien an einer Sammlung von Aufgaben aus der Mechanik fehlt, hat der Verfasser den einzelnen Kapiteln Aufgaben hinzugefügt, im ganzen über 200; die Lösungen sind teils angegeben, teils angedeutet. Sehr dankenswert sind auch die zahlreichen Zitate und historischen Anmerkungen, die, wie Herr Marcolongo in der Vorrede mit Recht bemerkt, geeignet sind, das Interesse des Studierenden zu erwecken und zu beleben. Was die Methode der Darstellung betrifft, so ist von den Begriffen und Bezeichnungen der Vektorrechnung ein glücklicher Gebrauch gemacht worden, wobei dem Verfasser das Vorbild von F. Castellano, *Lezioni di meccanica razionale*, Turin 1894 und A. Föppl, *Vorlesungen über technische Mechanik* zu statten

gekommen ist, bildet doch ohne Zweifel gerade die Mechanik für die Anwendung der Vektorrechnung eines der schönsten und dankbarsten Gebiete. Daß in dem ersten Kapitel der Kinematik die Grundlagen der Vektorrechnung auseinandergesetzt werden, ist freilich nur ein unter den gegenwärtigen Umständen erklärlicher Notbehelf, denn diese Grundlagen gehören nicht in die Mechanik, sondern in die Geometrie; es ist dringend zu wünschen, daß überall diese jedem Mathematiker unentbehrlichen Kenntnisse entweder durch eine kleine selbständige Vorlesung oder durch entsprechende Abschnitte in den Vorträgen über analytische oder synthetische Geometrie zugänglich gemacht würden.

Hannover. PAUL STÄCKEL.

Rudolf Lämmel. Untersuchungen über die Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten. (80 S.) Zürich, Jean Frey, 1904.

Die kleine Schrift, von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion der Züricher philosophischen Fakultät als Inauguraldissertation approbiert, stellt sich im wesentlichen als eine erkenntnistheoretische Studie im Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung dar. Ihr Verfasser hält eine Prüfung und Berichtigung der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie für umso notwendiger, als diese Lehre bei dem heutigen Streben nach Mathematisierung der Naturwissenschaften immer mehr an Bedeutung gewinnt und selbst auf die Festlegung der Fundamente der exakten Wissenschaften Einfluß zu nehmen berufen ist.

Nach einer Kritik des v. Kriesschen Wahrscheinlichkeitsbegriffes, den der Verfasser ablehnt, einmal weil er sich nicht streng verwirklichen lasse und zum andern das Anwendungsgebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu eng begrenze, sucht er die Paradoxie, die er darin erblickt, daß hierher gehörige Probleme häufig mehrfache Lösungen zuließen, als eine notwendige Folge der Natur der Sache nachzuweisen. Er geht nun daran, zu zeigen, wie man trotzdem brauchbare numerische Wahrscheinlichkeiten ermitteln könne. Von den drei Methoden, die er unterscheidet, gibt die erste, die intuitive, da sie auf bloßen subjektiven, jeder Kontrole unzugänglichen Erwägungen beruht, zu einer weiteren Untersuchung keinen Anlaß. Umso ausführlicher behandelt der Verf. die zweite Methode, die er als Methode der Hypothesenbildung bezeichnet; in der richtigen Durchführung des Prozesses, den sie erfordert, erblickt er mit Recht die eigentliche Schwierigkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung und schreibt Wahrscheinlichkeiten, die nach dieser Methode gefunden worden, den relativ größten Erkenntniswert zu. Er zerlegt den Hypothesenprozeß, der zur Lösung des Problems: „Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein gewisses A die Eigenschaft x habe?“ führt, in drei Akte: H_1, Feststellung der Menge jener A, die überhaupt in Betracht kommen; H_2, Feststellung jener Teilmenge der A, welcher das Prädikat x eigen ist; H_3, Bewertung der einzelnen A durch Zuordnung einer in der Natur des Problems begründeten Valenz. Was die Durchführung dieses Gedankenganges kennzeichnet, das ist die Einführung des Cantorschen Mengenbegriffs. Von der Natur der Mengen, welche die sämtlichen A (mögliche „Fälle“) und die mit dem Merkmal x begabten unter ihnen (günstige „Fälle“) bilden, hängt die Wahr-

scheinlichkeitsdefinition ab. Durch Kombinierung der Mengeneigenschaften: abzählbar, nicht abzählbar; nirgends dicht, stellenweise dicht, überall dicht; ohne Inhalt, mit Inhalt — werden 12 verschiedene Mengenarten konstruiert, und durch paarweise Verbindung dieser (nach dem Prinzip der Variationen mit Wiederholung) würden sich 144 Typen von Wahrscheinlichkeitsaufgaben ergeben; davon entfallen aber manche als praktisch unmöglich. Eine Auswahl dieser Typen wird nun der speziellen Behandlung zugeführt, so der Typus (a, a): beide Mengen abzählbar; (c, c): beide Mengen von der Mächtigkeit eines Kontinuums (geometrische Wahrscheinlichkeiten); (c, a): die mögliche Menge von der Mächtigkeit eines Kontinuums, die günstige abzählbar usw. Vieler dieser Typen werden sich nur im Gebiete der Zahlentheorie verwirklichen lassen.

Wo nun der Hypothesenprozeß unausführbar ist, und es ist dies bei dem größten Teile der praktischen Anwendungen der Fall, da tritt die dritte Methode in Wirksamkeit, die der Verf. als die statistische bezeichnet: es ist die Beobachtung des Geschehens unter Trennung der beobachteten Fälle nach ihren durch das Problem unterschiedenen Eigenschaften.

Den Abschluß der erkenntnistheoretischen Untersuchung bildet ein Versuch der Aufstellung eines Minimalsystems (von Axiomen und Definitionen) der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie solche Versuche in unserer Zeit auf verschiedenen Gebieten der Mathematik unternommen worden sind.

Im zweiten Teile werden einige spezielle Probleme behandelt; das erste betrifft Fragen über die durch einen unendlichen Kettenbruch erzeugbaren Zahlen; das zweite ein nach Gyldén benanntes, auf die Konvergenz gewisser Reihen bezügliches Problem; das dritte ist eine Verallgemeinerung des Nadelproblems dahingehend, daß die Nadel vermöge ihrer die Distanz der Parallelen übertreffenden Länge mehrere Parallelen zugleich kreuzen kann.

Die Schrift ist der Aufmerksamkeit der an der Wahrscheinlichkeitstheorie Interessierten zu empfehlen.

Wien. Czuber.

Josef F. Heller, k. k. Direktor der deutschen Staatsrealschule in Pilsen, **Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der darstellenden Geometrie für Realschulen.** I. Teil für die 5. Klasse. 2. nach dem Lehrplan vom Jahre 1899 umgearbeitete Auflage. Mit 5 Tafeln, enthaltend 127 Figuren. 103 S. Wien 1903, Hölder. Pr. geh. 1 K 68 h, geb. 2 K 18 h.

Diese durchweg einfachen, aber ganz instruktiven Elementaraufgaben, welche in rechtwinkliger Projektion durchzuführen sind, beziehen sich auf Punkte, Gerade und Ebenen und ihre gegenseitigen Beziehungen, auf die Einführung neuer Projektionsebenen, Drehung um eine Achse, Schatten ebener Figuren und Darstellung des Kreises. Die zu verwendenden Elemente sind durch ihre Koordinaten gegeben.

München, März 1905. Karl Doehlemann.

Neue Bücher.[1])

Arithmetik.

1. Rogel, Franz, Das Rechnen mit Vorteil. Eine gemeinfaßliche, durch zahlzahlreiche Beispiele erläuterte Darstellung empfehlenswerter Vorteile und abkürzender Verfahren. Leipzig, Teubner. M. —.80.

Astronomie und Geodäsie.

2. Bauschinger, Julius, Die Bahnbestimmung der Himmelskörper. Leipzig 1906, Engelmann. M. 34.— ; geb. M. 37.—.
3. Gast, Paul, Über Luftspiegelungen im Simplon-Tunnel. Habilitationsschrift Darmstadt. Stuttgart 1904, Wittwer.
4. Hessen, Kurt, Die rechnerische Bearbeitung der Messungen von Monddistanzen. (Astronom. Abhandlungen Nr. 10.) Kiel. (Hamburg, Mauke Söhne.) M. 2.50.

Darstellende Geometrie.

5. Hartwig, Th., Leitfaden der konstruierenden Stereometrie. Darstellung der Raumformen im Schrägbilde, nebst einigen Anwendungen von Schrägbildern auf dem Gebiete der theoret. und rechn. Stereometrie, darstell. Geometrie, Mineralogie, mathem. Geographie u. Physik. Wien, Fromme. M. 1.—
6. Körber, Strahlendiagramm zur vereinfachten Herstellung perspektivischer Zeichnungen. Zum Gebrauch f. Architekten, Ingenieure, Kunstgewerbetreibende und Landschaftsgärtner. (1 Bl. auf Pauspapier m. Fig.) Berlin, Ernst & Sohn. M. 1.50.
7. Regis, Domenico, Corso di applicazioni della geometria descrittiva nella r. scuola d'applicazione per gl'ingegneri in Torino. Fasc. V. Torino. L. 3.—.
8. Vonderlinn, J., Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie. (Sammlung Göschen Nr. 260.) Leipzig, Göschen. Geb. in Leinw. —.80.

Mechanik.

9. Appell, Paul, Cours de mécanique à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales. 2ème éd. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 12.—
10. Bach, C., Elastizität und Festigkeit. 5. verm. Aufl. Berlin, Springer. geb. in Leinw. M. 18.—.
11. Duhem, P., Les origines de la statique. I. Paris, Hermann. Frs. 10.—.
12. Keck, Wilh., Vorträge über Elastizitätslehre als Grundlage für die Festigkeitsberechnung der Bauwerke. 2. verm. Aufl., neu bearb. v. Ludw. Hotopp. 1. Teil. Hannover, Helwing. M. 8.— ; geb. in Leinw. M. 9.—
13. Linders, Olof, Zur Klarstellung der Begriffe Masse, Gewicht, Schwere und Kraft. Leipzig, Jäh & Schunke. M. 1.—
14. Milankovitch, M., Beitrag zur Theorie der Betoneisenträger. Wien, Lehmann & Wentzel.
15. Routh, E. J., The elementary part of a treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies. Being part I of a treatise on the whole subject. With numerous examples. 7th ed. revised and enlarged. London, Macmillan. 14 s.

1) Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1905.

Physik.

16. Abraham, Henri, et Langevin, Paul, Les quantités élémentaires d'électricité. Ions, életrons, corpuscules. Mémoires réunis. (Société française de Physique. Collection de mémoires relatifs à la Physique. 2ème série) Paris, Gauthier-Villars. Frs. 35.—
17. Abraham, M., Theorie der Elektrizität, II. Bd., Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 10.—.
18. Berndt, Geo. W., Physikalisches Praktikum. 1. Teil. Halle 1906, Marhold. M. 3.80; geb. in Leinw. M. 4.—
19. Bouasse, H., Essais des matériaux. Notions fondamentales relatives aux déformations élastiques et permanentes. (Bibliothèque de l'élève ingénieur.) Paris, Gauther-Villars. Frs. 5.—.
20. Clark, Alex., Molecular forces and Newtonian laws. Glasgow, Holmes. 3 s. 6 d.
21. J. Classen, Zwölf Vorlesungen über die Natur des Lichtes. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 4.—.
22. Dressel, Ludwig, Elementares Lehrbuch der Physik, nach den neuesten Anschauungen für höhere Schulen und zum Selbstunterricht. 3. verm. und umgearb. Aufl. 2 Bde. Freiburg i. B., Herder. M. 16; geb. in Leinw. M. 17.60.
23. Fortschritte, die, der Physik im J. 1904. Dargestellt von der deutschen physikal. Gesellschaft. 60. Jahrg. 2. Abtlg. Elektrizität und Magnetismus, Optik des gesamten Spektrums, Wärme. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 32.—.
24. Frick, J., Physikalische Technik oder Anleitung zu Experimentalvorträgen, sowie zur Selbstherstellung einfacher Demonstrationsapparate. 7., vollkommen umgearbeitete und stark vermehrte Aufl. v. Otto Lehmann I. Bd. 2. Abtlg. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 24.—; geb. M. 26.—.
25. Friedmann, Herm., Über ein physikalisches Endlichkeitsprinzip und den allgemeinsten Ausdruck der Naturgesetzlichkeit. Jurjew-Dorpat, Krüger. M. 1.80.
26. Gleichen, Alexander, Vorlesungen über photographische Optik. Leipzig, Göschen. M. 9.—.
27. Graetz, Leo, Das Licht und die Farben. 6 Vorlesungen. („Aus Natur und Geisteswelt" Nr. 17.) 2. Aufl. Leipzig, Teubner M. 1.—; geb. in Leinw. M. 1.25.
28. Keferstein, Hans, Strahlengang und Vergrößerung in optischen Instrumenten. Eine Einführung in die neueren optischen Theorien. (Abhandlungen zur Didaktik und Philosophie der Naturwissenschaft, Heft 5.) Berlin, Springer. M. 1.60.
29. Kolbe, Bruno, Einführung in die Elektrizitätslehre. Vorträge. II Dynamische Elektrizität. 2., verb. u. verm. Aufl. Berlin, Springer. M. 3.—; geb. in Leinw. 3.80.
30. Marchis, L., Thermodynamique. (Bibliothèque de l'élève ingénieur.) t. II. Introduction à l'étude des machines thermiques. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 5.—.
31. Meyer, Jul., Einführung in die Thermodynamik auf energetischer Grundlage. Halle, Knapp. M. 8.—.
32. Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik und Meteorologie. (In 4 Bdn.) 10. umgearb. u. verm. Aufl. hrsg. v. Leop. Pfaundler. 1. Bd. Mechanik und Akustik. 1. Abtlg. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 7.—.
33. Poynting, J. H., and Thomson, J. J., A textbook of Physics. Properties of matter. 3 rd ed. carefully revised. London, Griffin. 10 s. 6 d.
34. Riecke, Eduard, Lehrbuch der Physik zum eigenem Studium und zum Gebrauche bei Vorlesungen. 2 Bde. 3. verb. u. verm. Aufl. 1. Mechanik, Molekularerscheinungen und Akustik, Optik. 2. Magnetismus und Elektrizität, Wärme. Leipzig, Veit & Co. zus. M. 25.—; geb. in Leinw. M. 27.—.
35. Righi, Aug., Die moderne Theorie der physikalischen Erscheinungen (Radioaktivität, Jonen, Elektronen.) Aus dem Ital. v. B. Dessau. Leipzig, Barth. kart. M. 2.80.

36. ROHR, M. v., Die optischen Instrumente. („Aus Natur und Geisteswelt" Nr. 88.) Leipzig, Teubner. M. 1.—; geb. in Leinw. M. 1.25.

37. SCHREBER, K., und SPRINGMANN, P., Experimentierende Physik. Zugleich vollständig umgearb. Ausg. v. Henri Abrahams Recueil d'expériences élémentaires de physique. 1. Bd. Leipzig, Barth. M. 3.60; geb. in Leinw. 4.40.

38. WIEN, W., Über Elektronen. Vortrag, gehalten auf der 77. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran. Leipzig, Teubner.

39. WINCKELMANN, A., Handbuch der Physik. 2. Aufl. V. Bd. 1. Hälfte. Elektrizität und Magnetismus. II. Leipzig, Barth. M. 16.—

S. auch Nr. 3.

Tafeln.

40. BIDSCHOF, FRDR., und VITAL, ARTH., Fünfstellige mathematische und astronomische Tafeln. Zum Gebrauche für Mathematiker, Astronomen, Geographen und Seeleute zusammengestellt und mit Formelsammlungen versehen. Ster.-Ausg. Wien, Deuticke. geb. in Leinw. M. 7.50.

Verschiedenes.

41. SCHUBERT, HERMANN, Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis. I. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 4.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

ABRAHAM, H., et LANGEVIN, P., Les quantités élémentaires d'électricité, Ions, électrons, corpuscules. 1[er] et 2[d] fascicules, s, N. B. („Neue Bücher") Nr. 16.

ABRAHAM, M., Theorie der Elektrizität, II, s. N. B. 17.

APPELL, P., Cours de mécanique, s. N. B. 9.

BAILLAND, B., et BOURGET, H., Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. Avec une préface de Emile Picard. Tome II. (18 octobre 1889 — 15 décembre 1894.) Paris, Gauthier-Villars. Frs. 16.—.

BAUSCHINGER, J., Bahnbestimmung der Himmelskörper, s. N. B. 2.

BOUASSE, H., Essais des matériaux, s. N. B. 19.

CLASSEN, J., Zwölf Vorlesungen über die Natur des Lichtes, s. N. B. 21.

DRESSEL, L., Elementares Lehrbuch der Physik, s. N. B. 22.

DUHEM, P., Les origines de la statique, s. N. B. 11.

FRICK, J., Physikalische Technik. 7. Aufl. I. Bd. 2. Abtlg., s. N. B. 24.

GAST, P., Über Luftspiegelungen im Simplon-Tunnel, s. N. B. 3.

GLEICHEN, A., Vorlesungen über photographische Optik, s. N. B. 26.

GLINZER, E., Lehrbuch der Elementargeometrie. 1. Tl. Planimetrie. 9. verb. Aufl. Leipzig, Degener. M. 1.80.

GOURSAT, EDOUARD, Cours d'analyse mathématique. Tome II. Theorie des fonctions analytiques. Equations différentielles Équations aux dérivées partielles. Éléments du calcul des variations. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 20.—.

GUICHARD, C., Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes tripleorthogonaux. („Scientia" Nr. 25.) Paris, Gauthier-Villars. Cartonné Frs. 2.—.

HEFFTER, L., und KÖHLER, C., Lehrbuch der analytischen Geometrie. 1. Bd. Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 14.—.

HERMITE, CHARLES, Oeuvres. Publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences. Tome I. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 18.—.

Holzmüller, Gustav, Die Planimetrie für das Gymnasium. 1. Tl. Von Quarta bis Untersekunda einschließlich reichend. 2. Aufl. Leipzig und Berlin, Teubner. geb. M. 2.40.

Jessen, K., und Girndt, M., Leitfaden der Baustofflehre für Baugewerkschulen. Leipzig und Berlin.

Wien, W., Über Elektronen, s. N. B. 38.

Kefferstein, H., Strahlengang und Vergrößerung in optischen Instrumenten, s. N. B. 28.

Körber, Strahlendiagramme, s. N. B. 6.

Schubert, H., Auslese, s. N. B. 41.

Linders, O., Zur Klarstellung der Begriffe Masse usw., s. N. B. 13.

Lobatschewsky, N. J., Pangéometrie, ou précis de géometrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles. Réimpression fac-similé conforme à l'édition originale. Paris, Hermann. Frs. 5.—.

Marchis, M. L., Thermodynamique. II. s. N. B. 30.

Marti, C., The weather-forces of the planetary atmospheres. Printed as manuscript. Nidau, Printer E. Weber.

Milankovitch, M., Betoneisenträger, s. N. B. 14.

Müller, H., und Plath, J., Lehrbuch der Mathematik zur Vorbereitung auf die Mittelschullehrer-Prüfung und auf das Abiturientenexamen am Realgymnasium. Leipzig und Berlin 1906, Teubner.

Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik und Meteorologie, s. N. B. 32.

Newest, Th., Gegen die Wahnvorstellung vom heißen Erdinnern. Einige Weltprobleme. II. Teil. Populär-wissenschaftliche Abhandlung. Wien 1906, Konegen. M. 1.50.

Rogel, Franz, Das Rechnen mit Vorteil, s. N. B. 1.

Rohr, M. v., Die optischen Instrumente, s. N. B. 36.

Russell, John Wellesley, Elementary treatise on pure Geometry. With numerous examples. New and revised edition. Oxford, Clarendon Press. Cloth. 9 s.

Schoute, P. H., Mehrdimensionale Geometrie. II. Die Polytope. (Sammlung Schubert XXXVI.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 10.—.

Schröder, Richard, Die Anfangsgründe der Differentialrechnung und Integralrechnung. Für Schüler von höheren Lehranstalten und Fachschulen, sowie zum Selbstunterricht. Leipzig, Teubner. kart. M. 1.60.

Schütte, Fritz, Anfangsgründe der darstellenden Geometrie für Gymnasien. Leipzig und Berlin, Teubner. M. —.80.

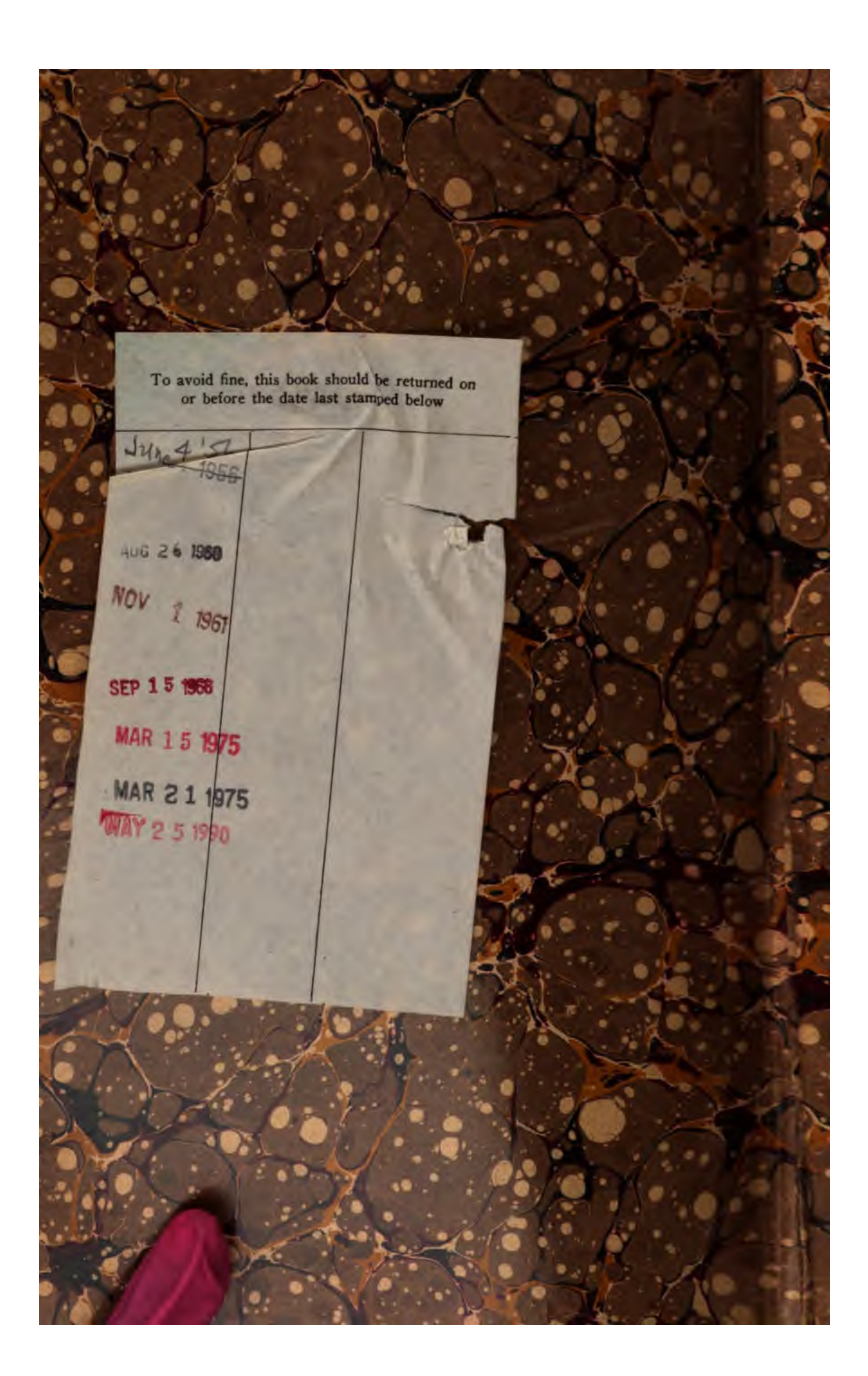
Stolz, Otto, und Gmeiner, J. Anton, Einleitung in die Funktionentheorie. 2. umgearb. u. verm. Aufl. der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik“ nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“ von O. Stolz. (Teubners Lehrbücher, Bd. XIV.) 2. Abtlg. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 9.—. (Vollständig in 1 Bd. geb. M. 15.—.)

Weber, Heinr., und Wellstein, Jos., Enzyklopädie der Elementarmathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. 2. Bd. Elemente der Geometrie. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 12.—.

Wieleitner, Heinrich, Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für den Zeitabschnitt von 1890—1904. Beilage zum Jahresbericht des Königl. humanistischen Gymnasiums zu Speyer für das Schuljahr 1904/05. Leipzig, Göschen. brosch. M. 1.50.

Wieleitner, Heinr., Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung. (Sammlung Schubert XLIII.) Leipzig, Göschen. geb. 10.—.

Wilson, J. Cook, On the traversing of geometrical figures. Oxford, Clarendon Press. Cloth 6 s.



To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below
AUG 26 1960
NOV 1 1961
SEP 15 1968
MAR 15 1975
MAR 21 1975
MAY 25 1990


510.5
Z48
V.52
1906